

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

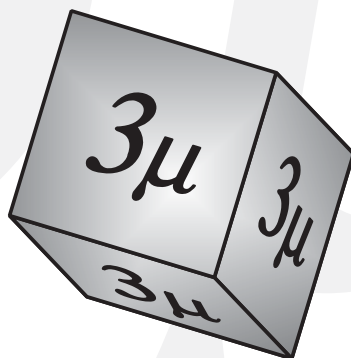
---



JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ, pobočka Ostrava  
KATEDRA MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE VŠB-TU Ostrava

Sborník z 21. semináře

# Moderní matematické metody v inženýrství



4.6. - 6.6. 2012

Horní Lomná

**ISBN 978-80-248-2883-1**

Vážené a milé kolegyně a kolegové,

mezinárodní seminář Moderní matematické metody v inženýrství letos vstoupil do své druhé dvacítky. Organizaci 21. ročníku semináře v souladu s tradicí zajistila ostravská pobočka Jednoty českých matematiků a fyziků a Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠB - TU Ostrava. Vzhledem k probíhající rekonstrukci Rehabilitačního a rekreačního střediska Armáda v Dolní Lomné u Jablunkova jsme se letos sešli o pár kilometrů dál. Do hotelu Excelsior v Horní Lomné přijelo 48 účastníků, z toho 6 zahraničních (5 z Polska, 1 ze Slovenska). Převahu mezi účastníky měly i letos mladší ročníky, což nás všechny potěšilo.

Cyklus tří přednášek z historie matematiky zaměřil v tomto roce pan doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. z Matematicko – fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze na 150. výročí založení Jednoty českých matematiků a fyziků a na matematiku na Univerzitě Karlově a její Matematicko-fyzikální fakultě.

Bylo předneseno celkem 30 referátů a komentováno 5 posterů zaměřených odborně (matematické modelování, simulace, kódování, statistika, aplikace matematiky v geologii, geodézii, ekonomice) i metodicky (analýza náročnosti studia na technice, přijímací testy).

Zájem o novinku na letošním semináři, workshop GeoGebra, předstihl očekávání. Předpokládáme proto jeho pokračování i v dalších ročnících.

Letos opět nedostáváte do rukou sborník v tradiční tištěné podobě, ale na CD. Upozorňujeme, že publikované příspěvky byly dodány ve formě camera ready a neprošly proto ani odbornou ani jazykovou korekturou.

Upřímně děkujeme všem sponzorům, kteří svými finančními příspěvky pomáhají udržet na přijatelné úrovni výši vložného a umožňují tak účast širokému okruhu zájemců, včetně doktorandů.

Závěrem si Vás dovoluujeme pozvat na příští, 22. ročník semináře Moderní matematické metody v inženýrství, který proběhne v termínu 3. – 5. června 2013 opět v hotelu Excelsior v Horní Lomné u Jablunkova.

Za organizační a programový výbor Jarmila Doležalová, editor.

# OBSAH

◆ Boháč, Zdeněk – Doležalová, Jarmila – Kreml, Pavel, VŠB – TU Ostrava <a href="#">Ohlasy na elektronické studijní opory katedry MDG VŠB – TU Ostrava po čtyřech letech</a> .....	6
◆ Burak, Tadeusz – Krowicki, Piotr – Przybyła, Henryk, PS Gliwice <a href="#">Wykorzystanie programowania liniowego do wyboru strategii funkcjonowania przedsiębiorstwa</a> .....	13
◆ Burak, Tadeusz – Krowicki, Piotr – Przybyła, Henryk, PS Gliwice <a href="#">Wykorzystanie metod taksonomicznych w systemie zarządzania kopalniami</a> .....	18
◆ Dłutek, Krzysztof, PS Gliwice <a href="#">Pewne niestandardowe funkcje wpływów</a> .....	26
◆ Doležalová, Jarmila, VŠB – TU Ostrava <a href="#">Tvorbá personalisovaných e-learningových učebních opor</a> .....	31
◆ Drobek, Jaroslav, VŠB – TU Ostrava <a href="#">Jedna charakterizace lineárně nezávislých funkcí</a> .....	39
◆ Kolcun, Alexej, ÚGN AV ČR Ostrava <a href="#">Kružnicový oblúk v štruktúrovaných sieťach</a> .....	43
◆ Korban, Zygmunt, PS Gliwice <a href="#">Use of Creeping Trend Method with Harmonic Weights in Forecasting of Radiation Hazard in Mining Areas – Case Study</a> .....	48
◆ Kotůlek, Jan, VŠB – TU Ostrava <a href="#">Matematika na VŠB v příbramském období (1895–1945)</a> .....	54
◆ Kováčová, Monika, STU Bratislava <a href="#">On Should Be Our E-learning Materials More Interactive?</a> .....	65
◆ Kowalik, Stanisław, WSB Dąbrowa Górnicza <a href="#">Równowaga Stackelberga w Grach Sekwencyjnych dla Stabilizowanego Kryterium Followera o Nieznanej Wartości</a> .....	73
◆ Krček, Břetislav – Tužilová, Michaela, VŠB – TU Ostrava <a href="#">O numerickém řešení obyčejných diferenciálních rovnic</a> .....	78
◆ Manowska, Anna, PS Gliwice <a href="#">Jak odnowić front eksploatacyjny?</a> .....	83
◆ Mierzejowska, Aleksandra – Kowalska-Kwiatek, Jolanta, PS Gliwice <a href="#">Wyznaczenie wartości parametrów teorii geometryczno-całkowej w oparciu o obniżenia zarejestrowane na punktach rozproszonych</a> .....	89
◆ Navrátil, Vladislav – Novotná, Jiřina, MU Brno <a href="#">Povrchové napětí jako motivační prvek ve výuce fyziky</a> .....	95
◆ Polcerová, Marie, VUT Brno <a href="#">E-learningový kurs opakování základů středoškolské matematiky</a> .....	102

◆ Sikora-Drabik, Paulina, PS Gliwice <a href="#">Wykorzystanie wybranych metod statystyki opisowej w procesie analizy wypadkowości w górnictwie węgla kamiennego w Polsce w latach 2008 – 2011</a> .....	107
◆ Stryja, Jakub, VŠB – TU Ostrava <a href="#">Singulární okrajová úloha pro diferenciální rovnici druhého řádu</a> .....	113
◆ Svoboda, Pavel – Zajaczek, Stanislav – Unger, Jan, VŠB – TU Ostrava <a href="#">Magnetická vazba ve virtuální laboratoři</a> .....	119
◆ Štěpánová, Martina, UK Praha <a href="#">Geršgorinovy kruhy</a> .....	123
◆ Tutak, Magdalena, PS Gliwice <a href="#">Obliczanie ilości powietrza dopływającego do pola zawalowego ściany przewietrzanej systemem na „u“ do granic pola eksploatacji</a> .....	130
◆ Lukáš Vízek, UK Praha <a href="#">Úlehlovy početnice</a> .....	135
◆ Volná, Jana, UTB Zlín – Volný, Petr, VŠB – TU Ostrava – Smetanová, Dana, VŠTE České Budějovice <a href="#">Variační posloupnost</a> .....	144
◆ Záhonová, Viera, STU Bratislava <a href="#">Úspešnosť študentov v predmete Matematika I na Sjf STU v Bratislave</a> .....	148
<a href="#">Seznam účastníků</a> .....	153

## [Reklama](#)

### Příloha: [Workshop GEOGEBRA](#)

Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie .....	I-II
◆ Dlouhá, Dagmar, VŠB – TU Ostrava První krůčky s GeoGebrou .....	III-XIV
◆ Morávková, Zuzana, VŠB – TU Ostrava Upevnění pojmu funkce pomocí slovních úloh .....	XV-XXII
◆ Hamříková, Radka, VŠB – TU Zajímavé animační úlohy .....	XXIII-XXXIV
◆ Volný, Petr, VŠB – TU Ostrava Demonstrace vybraných pojmů z matematické analýzy .....	XXXIV-XLII
Obsah .....	XLIII

## [Celý sborník ke stažení](#)

## [Fotogalerie \(na webu konference\)](#)

# OHLASY NA ELEKTRONICKÉ STUDIJNÍ OPORY KATEDRY MDG VŠB-TU OSTRAVA PO ČTYŘECH LETECH

Zdeněk Boháč, Jarmila Doležalová, Pavel Kreml

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail : [zdenek.bohac@vsb.cz](mailto:zdenek.bohac@vsb.cz), [jarmila.dolezalova@vsb.cz](mailto:jarmila.dolezalova@vsb.cz), [pavel.kreml@vsb.cz](mailto:pavel.kreml@vsb.cz)

**Abstrakt:** V rámci projektu Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia, který byl řešen na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava a v partnerských organizacích v letech 2006-2008, bylo vytvořeno 20 elektronických studijních materiálů [1, 2]. Po ukončení práce jsme pečlivě sledovali veškeré ohlasy na vytvořené učební materiály a na základě připomínek jsme případně opory dále upravovali. V tomto příspěvku uvádíme přehled názorů na vytvořené materiály.

**Abstract:** The project Study supports with prevailing distance factors for subjects of the theoretical base for study was solved at the VSB – Technical University of Ostrava and the co-operating organizations from 2006 to 2008. Within the project, 20 e-learning materials were produced [1, 2]. After that, we carefully watched all the responses to the created educational materials and we further edited them on the bases of the received comments. In this paper, we present an overview of the opinions on the created e-learning materials.

## 1 Úvod

Studijní opory, které vznikly na katedře matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TU Ostrava, jsou i nadále v různé míře využívány ve výuce v prezenční i kombinované formě studia [4]. Pedagogové s nimi pracují přímo ve vyučovacích hodinách, všem studentům jsou k dispozici na adrese [www.studopory.vsb.cz](http://www.studopory.vsb.cz) [8] nebo [mdg.vsb.cz](http://mdg.vsb.cz).

Bezprostřední názor na všechny studijní materiály, jejich členění, obsah, náročnost jsme zjišťovali ještě v rámci projektu ESF formou dotazníku, který vyplnilo v akademickém roce 2007/08 více než 5000 studentů prezenčního a kombinovaného studia [3, 5].

V akademickém roce 2010/11 autoři tohoto příspěvku zjišťovali pomocí téhož dotazníku, zda se změnil přístup studentů k elektronickým studijním oporám v předmětech, které vyučují. Dotazníky anonymně vyplnilo přes 750 studentů prezenčního a kombinovaného studia [6, 7].

## 2 Ohlasy uživatelů

Autoři pochopitelně kromě řízených dotazníků sledují i další reakce a ohlasy na vytvořené studijní materiály, které získali například na internetu, elektronickou nebo tištěnou poštou, ústním podáním. S některými z nich čtenáře seznámíme v tomto příspěvku.

Upozorňujeme, že jsme všechny ohlasy nechali v originálním tvaru, neopravovali jsme tedy pravopisné ani stylistické chyby. Je zajímavé, že texty autorů vyššího věku jsou psány pečlivěji a vesměs bez pravopisných a stylistických chyb. Z níže uvedeného je vidět, že mladá generace otázku pravopisu a stylu ve velké většině příliš neřeší.

Ohlasy jsme podle jejich obsahu rozřídili do 4 kategorií.

### 2.1 Ohlasy standardní

Do této kategorie jsme zařadili ty názory na elektronické učební materiály, které považujeme za běžné. Kurzívou jsme odlišili reakci autora příslušné opory.

**L.**

koukal jsem se zatím na elipsu, a je to moc dobrý, perfektní. kéž by takových věcí, a ne jenom z Geometrie, bylo víc, psaných jazykem "pro blbce". Leoš ČVUT

**W.**

<http://www.matematika.educato.cz>

Mate to tady moc hezke... Super web... Jen tak dal...

**X. Y.**

mate to tu pekny, jsem z UTB Zlín a docela hodně mi tyto stránky pomohly. akorát mám problém s roščožením vaseho pluginu na opere 9.50b, takže musím používat IE, ale i tak jsem velmi spokojen. velice přehledné a názorné...

*J. D. reaguje:*

*Děkuji, opět mě těší, že se stránky líbily a pomohly i jinde...*

*Souboj s větrnými mlýny v podobě podpory různých plug-inů v různých prohlížečích už jsem vzdal, a tak jsem taky, naneštěstí pro Vás, přestal testovat, kde co funguje nebo ne... A jsem rád, že jste to i přesto nevzdal a snad se Vám to vyplatilo...*

**A. U.**

Dobrý den,

Moc děkuji za tyto výborný stránky, jsem student SPŠST Panské a Geometrie mě baví ,ale poslední dobou s ní mám docela problémy a zdejší modely mi převelice pomáhají pochopit co a jak.

Chtěl bych se zeptat v čem je možné vyrobit takovéto modely?

**hufo**

dělám dálkově strojárnu,jsem už dost daleko,ale geometrii pořád nemám,vaše stránky mně snad pomohou,myslím že je to nejlepší,co zatím jsem našel,takže taky díky.

**M. P.**

Dobrý den,

jsem studentem ekonomické fakulty a chtěl bych vám moc poděkovat za studijní video materiály právě k Matematice. Díky nim, jsem se naučil většinu věcí a poznal, že matematika se dá zvládnout. Myslím, že bez nich bych neuspěl.

Děkuji moc ...

**D. S.**

Byla jsem požádána, zda bych nedoučila matematiku žáka 2. ročníku střední školy. Přeci jen jsem ze škol venku již hodně let, a protože matematiku v praxi používám pouze na úrovni školy základní, mnoho věcí se mi za ta léta z hlavy vykouřilo. Vaše stránky mi pomohly osvěžit paměť, takže doučování bylo bezproblémové. Díky moc, jsou velice pěkně a názorně zpracované.

## 2.2 Ohlasy neočekávané

Mezi ohlasy byly i takové, které nás velmi překvapily. Patří mezi ně reakce starších občanů nebo učitelů. Například pedagog z VUT Brno se rozhodl vyřešit úlohy pro samostatnou práci z elektronického materiálu Matematika III a poskytnout je jako učební pomůcku studentům.

**Ing. J. V., Ph.D.**

Dnes mi běžely mašiny a místo programování jsem relaxoval a opakoval si geometrii. Už jsem zapomněl, že existují chordály. Vaše stránky si dám mezi oblíbené. Zjišťuji, že ačkoli se živím aplikováním geometrie, potřebuji mnohé znalosti obnovit a myšlení občerstvit.

Platon (nad vchodem do Akademie): Necht' nevstupuje, kdo předtím nestudoval geometrii.

**D. P.**

Dobré. Opravdu. Je mi 55 let a lehce si na Vašich stránkách opakuji DG jen tak pro radost, vůbec to v praxi nepotřebuji. Ale je to estetická záležitost. Ve škole mě to dost otravovalo. Mohl bych mít prosbu. Doplnit v kótovaném promítání odchylku (úhel) stop roviny. To jsem nějak na škole kdysi nepochopil. Možná, že když bude obrazový doprovod, že se chytnu.

## 2.3 Kuriozity

Z následujících reakcí je zřejmé, že někteří studenti využili možnosti komunikace s autory opor k objasnění vlastních nedostatků (někdy velmi fatálních) ve vědomostech.

**karel**

dobrá den, potreboval bych poradit-u zápočtové práce č.3 pro Fast je rovina ? kolmá k bodu S1?

*J. D. reaguje:*

*Dobrá, dobrá, Karle... Asi Vás moc nepotěším, ale vlastně Vám nemohu dost dobře odpovědět - ony totiž roviny bývají občas kolmé k nějakým přímkám, nebo k jiným rovinám, ale k bodům nikdy...*

*Sorry, snad jsem Vás neodradil a příště to bude lepší...*

**e-preklad.sk**

<http://tlmocenie.e-preklad.sk>

Pekna stranka, nechceli by ste ju spustit aj v inych jazykoch? Pekny den prajem.

*J.D. reaguje:*

*Aj Vám...*



## Petii

Dobrý den, chtěla jsem se zeptat co mám s tímhle udělat ?!

→ Jsou dány dvě shodné úsečky AB, MN, které leží na rovnoběžných přímkách a, b. Njděte středu S souměrnosti, ve které úsečka AB přejde v úsečku MN.

??? Předem díky za odpověď

*J.D. reaguje:*

*Zkuste si na papír nakreslit úsečku AB a někde vedle si zvolte bod S (ať neleží na přímce  $a=AB$ ); a pak sestrojte úsečku MN, která je středově souměrná s AB podle středu S - a pak Vám to třeba dočvakne...*

### 1. dotaz M. H., 2.9.2010 (09:38)

Dobrý den, studuji KS učitelství pro 1. stupeň ZŠ a budu vykonávat zkoušku z geometrie u docenta P. Mám dotaz, nerozumím příliš rotaci. Víím, že rovnostranný trojúhelník je 4x v rotaci. Jak to ale poznám? Díky a přeji hezký den. Také bych se chtěla zeptat, jaký je rozdíl mezi čtyřstěnem a trojbokým pravidelným jehlanem... podle mě je to totéž, ale v zadání ve skriptech jsem našla, že každý má jiné souměrnosti a jinou rotaci. Je tomožné? Hezký den. M. H.

*J.D. reaguje:*

*Promiňte, ale s první částí týkající se rotace v rovině Vám asi nepomůžu - nějak mě nenapadá, jak si vyložit Vaše tvrzení, 'že rovnostranný trojúhelník je 4x v rotaci' - zkuste ho víc matematicky upřesnit...*

-----  
*Pravidelný čtyřboký jehlan - jeho vrcholy jsou takové čtyři body v prostoru neležící v jedné rovině, že jedna jeho stěna, tzv. podstava, je rovnostranný trojúhelník a zbývající tři stěny, které mají společný tzv. hlavní vrchol, jsou (shodné) rovnoramenné trojúhelníky; nebo jinak a možná běžněji - přímka, která spojuje hlavní vrchol se středem podstavného rovnostranného trojúhelníka, je k rovině podstavy kolmá...*

*Snad to takhle stačí - kdyby ne, dejte vědět...*

### 2. dotaz M. H., 2.9.2010 (18:43)

Děkuji za předchozí vysvětlení. Mohu se na Vás obrátit s dalšími dotazy?

1. Je dána kružnice  $k(S,r)$ . Určete množinu středů všech shodných tětiv délky  $d$  této kružnice... Víím, jak vypadá obrázek řešení, ale nevím, jak se k němu dopracovat. Děkuji

2. Je dána krychle ABCDEFGH a roviny ACE a HGB. Jaká je jejich vzájemná poloha, mají-li průnik, jaký. ... Podle mého názoru jsou roviny různoběžné a průnikem je přímka HB, ale nejsem si jistá. Mám problém s představivostí v tomhle směru. Nedokážu si ty roviny nakreslit tak, abych průnik viděla... Děkuji za odpověď a přeji hezký den. M. H.

*J.D. reaguje:*

*1. Jestliže sestrojíte jednu takovou tětivu a necháte ji rotovat kolem středu S, pak dostanete všechny ostatní tětivy dané délky - a jejich středy tudíž vytvoří kružnici o středu S a poloměru  $r'=\sqrt{r^2-(d/2)^2}$ ;*

*2. Zkuste si představit nebo nakreslit řezy dané krychle danými rovinami - pro rovinu ACE je tímto řezem obdélník ACEG a dál už zkuste sama - dané roviny jsou opravdu různoběžné a jejich průnikem je opravdu tělesová úhlopříčka krychle, ale jiná než přímka HB...*

### 3. dotaz M. H., 2.9.2010 (21:13)

Zkusím k příkladu 2, který jsem dotazovala. Může být průnikem přímka AG? Pokud budu vycházet z toho, že polorovina HGB bude v řezu znázorněna v bodech HGBA - podle nákresu mi to tak vychází... Pokud by to bylo správně, tak jste mi odhalil novou věc, a to, že

si tu polorovinu musím představit jako obdélník. Já si jí vždycky kreslila jako trojúhelník - podle těch bodů. :-)

Moc Vám děkuji za radu a ochotu. Jsem v koncích, večer před zkouškou, doma mám dvě malé děti a nervy už mi nefungují. Všechno se mi plete a mám pocit, že i přesto, že jsem všechny příklady procházela stokrát, některým věcem zkrátka nerozumím. Holt jsem humanistka. Ještě jednou velké díky a možná, že v průběhu večera ještě napíšu o radu... Děkuji za Váš báječný web

*J.D. reaguje:*

*Ano, je to přímka AG... No ale s tím odhalením bych nespěchal, třeba rovina ACH protne danou krychli přesně v rs trojúhelníku ACH...*

*Přeji hodně štěstí, třeba to vyjde... A díky za díky...*

#### **4. dotaz M. H., 2.9.2010 (22:07)**

Ještě jednou pěkný večer... :-)

Mám problém: 1. dokažte asociativnost sčítání úseček

2. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu a obvodu kosočtverce z úhlopříček e,f...

Děkuji a zdravím...

*J.D. reaguje:*

*1. Nevím ani mě nějak nenapadá, co se myslí sčítáním úseček...*

*2. Úhlopříčky rozdělí kosočtverec na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky o délkách odvěsen  $e/2$  a  $f/2$ , a z toho dáte snadno dohromady obsah, délku strany a tedy i obvod...*

Dobry den,jmenuji se X. Y. a ucim ..... Byl jsem pozadan kolegy z ..... Univerzity ....., abych pro ne ucil predmet Pravdepodobnost a statistika. Vzhledem k tomu, ze to neni primo muj obor, nemam vlastni vyukovy text. Na Internetu jsem nasei Vas studijni material Pravdepodobnost a statistika na strance <http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/>, \_

ktery se mi nejen velice libi, ale v podstate odpovida tomu, co je mym studentum predepsano. Mohu jej pro vyuku mych studentu pouzít? Pochopitelne dodrzime vsechny zasady, ktete s tim souviseji.

Dekuji za odpoved a tesim se na pripadnou spolupraci.

**X. Y.**

Dobry den,

v materialech "Pravdepodobnost a statistika" je chybicka v kapitole 5.4. v poznamce "Výsledek příkladu 5.4.2c. je znám pod názvem pravidlo 3s...". Na konci ma byt 99.7%, ne 97.7%. Jinak moc dekuji za vyborny studijni material, je velice pekne a srozumitelne napsan.

S pozdravem, M. K., student CVUT FEL

## **2.4 Ohlasy na flash animace**

### **M. B. FŽP UJEP**

Dobrý den,

dostal jsem adresu vaší stránky <http://www.studopory.vsb.cz/index.html> od kamaráda. Nevěděl jsem si rady s matematikou na vysoké škole. Chtěl bych říct že to co jste vytvořili je něco neskutečného. Pochopil jsem to i já. Člověk který v matematice naprosto plaval. Ta část kde na videu s komentářem řešíte příklady je fantastická. Možná kdyby toho bylo více....

Děkuji Vám s pozdravem student ...

## K. K. - FMMI 2. roč. KS

Dobrý den,  
chtěl bych se informovat, jestli je možné zakoupit Sbíрку úloh z matematiky v Javě na CD nebo DVD nosiči, aby ji bylo možné spouštět i mimo internet. Děkuji a těším se na odpověď.

S pozdravem ...

## K.

Dobrý den,  
Vaše mluvená matematika je užasný nápad, ale proč bohužel končí u limit-mluvený komentář. Je dostupná nějaká aktualizace, moc Vám děkuji za odpověď.

Děkuji ...

## 3 Závěr

Vytvořené studijní opory jsou od akademického roku 2006/07 užívány ve výuce na VŠB-TU Ostrava a podle ohlasů také na jiných vysokých školách.

Z ohlasů jednoznačně vyplývá převaha pozitivních názorů na vytvořené studijní materiály. Vzhledem k náročnosti uvedených předmětů pro studenty jsou pro ně elektronické učební opory cennou pomůckou v přípravě na výuku a zejména na zkoušku. Velkou výhodou pro studenty je rovněž uložení všech studijních opor na adrese [www.studopory.vsb.cz](http://www.studopory.vsb.cz) [8], která umožňuje v případě potřeby snadno a rychle nalézt scházející poznatky mezi dalšími studijními oporami a také komunikaci s autorem.

Jedním ze základních požadavků kladených na projekty ESF je jejich trvale udržitelný rozvoj. Zkušenosti potvrzené evaluačními dotazníky a ohlasy uživatelů ukazují, že studijní opory vytvořené v rámci projektu Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia R.č. CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 jsou stále intenzivně využívány a to nejen na VŠB – TU Ostrava, ale i na jiných vysokých školách, o čemž svědčí řada kladných ohlasů od uživatelů mimo VŠB – TUO. Autoři navíc vytvořené materiály neustále doplňují a podle připomínek upravují. Z tohoto pohledu je rozvoj výstupů z projektu zajištěn.

## Literatura

- [1] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J.: *Informace o projektu ESF řešeném na Katedře matematiky a deskriptivní geometrie VŠB – TU Ostrava*. Sborník Mez. Konf. Moderní matematické metody v inženýrství, s. 13-15, Dolní Lomná 2006, ISBN 80-248-1224-X.
- [2] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J.: *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia*. Sborník Mez. Konf. INFOTECH 2007, Olomouc 2007, ISBN 978-80-7220-301-9.
- [3] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J. – KREML, P.: *Statistická analýza I výsledků projektu ESF Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia*. Sborník 17. Mez. Konf. Moderní matematické metody v inženýrství, s. 19-24, Dolní Lomná 2008, ISBN 978-80-248-1871-9.
- [4] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J. – KREML, P.: *Využití elektronických studijních materiálů z matematiky v prezenčním a kombinovaném studiu*. 8<sup>th</sup> International Conference APLIMAT, str. 653-662, Bratislava 2009, ISBN 978-80-89313-31-0.

- [5] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J. – KREML, P.: *Statistical Analysis II of Results of Project ESF Study Supports with Prevailing Distance Factors for Subjects of the Theoretical Base for Study*. 9th International Conference APLIMAT, str. 723-728, Bratislava 2010, ISBN 978-80-89313-47-1.
- [6] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J. – KREML, P.: *Elektronické studijní opory na katedře MDG VŠB-TU Ostrava po třech letech*. In Sborník 20. Mez. Konf. Moderní matematické metody v inženýrství, s. 16-21, Dolní Lomná 2011, ISBN 978-80-248-2517-5
- [7] BOHÁČ, Z. – DOLEŽALOVÁ, J. – KREML, P.: *Elektronické studijní opory na katedře MDG VŠB-TU Ostrava po třech letech II*. In Sborník 11th International Conference APLIMAT, str. 695-700, Bratislava 2012, ISBN 978-80-89313-58-7.
- [8] [www.studopory.vsb.cz](http://www.studopory.vsb.cz)

# WYKORZYSTANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO DO WYBORU STRATEGII FUNKCJONOWANIA PRZEDSIĘBIORSTWA

**Tadeusz Burak, Piotr Krowicki, Henryk Przybyła**

**Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Politechnika Śląska w Gliwicach  
Akademicka 2, 44-100 Gliwice**

**E-mail:** [tadeusz.burak@polsl.pl](mailto:tadeusz.burak@polsl.pl), [piotr.krowicki@polsl.pl](mailto:piotr.krowicki@polsl.pl), [henryk.przybyla@polsl.pl](mailto:henryk.przybyla@polsl.pl)

Abstract:

The primary function of management is to plan, which must include answers to the questions: What?, When?, How much?, In what form?, To whom?, At what price?, At what cost?.

Weather that supports the planning process answers the question whether the strategies currently used to meet the requirements of tomorrow will put the receiver and conditions that will be placed the environment. As a rule, so that the strategies used so far in the future will not be so effective and efficient to meet the competition requirements of our customers and the environment. In such situations, management and planning helps prepare new strategies with organizational methods and techniques, and modeling using mathematical methods in this particular dynamic programming.

Rola i znaczenie metod i technik wspomagających zarządzanie rośnie przynajmniej w takim stopniu jak zmienia się otoczenie podmiotu zarządzającego, jak narasta konkurencja. To konkurencja sprawia, że klienci stają się coraz bardziej wymagający, coraz mniej lojalni, czas życia produktu liczony od momentu inkubacji do momentu zestarzenia staje się coraz krótszy. Wymagania klienta dotyczą samego produktu, jego zdolności znamionowych, energochłonności, niezawodności, uniwersalności jak również prostoty, bezpieczeństwa użytkowania, bycia przyjaznym względem środowiska i możliwości recykulacji ale także i kultury obsługi.

Podstawową funkcją zarządzania jest planowanie, które musi zawierać odpowiedzi na pytania: co?, kiedy?, ile?, w jakiej postaci?, komu?, za jaką cenę?, przy jakim koszcie?.

Prognoza, która wspomaga proces planowania odpowiada na pytanie czy stosowane dotychczas strategie spełniają wymagania, jakie jutro będzie stawiał odbiorca i warunki, jakie będzie stawiało otoczenie.

Z reguły jest tak, że stosowane dotychczas strategie nie będą w przyszłości na tyle skuteczne i efektywne, aby sprostać konkurencji, wymaganiom klientów i otoczenia. W takich sytuacjach zarządzających i planujących wspomaga przygotowanie nowych strategii

z wykorzystaniem metod i technik organizatorskich, oraz modelowania przy użyciu metod matematycznych w tym szczególnie programowania dynamicznego.

W programowaniu na pierwszym miejscu stawia się rozpoznanie i zdefiniowanie problemu, a na jego podstawie opracowanie modelu (najczęściej matematycznego). Z problemem mamy do czynienia wtedy gdy decydent (indywidualny, zbiorowy – grupa interesariuszy) ma określone cele do zrealizowania. Cel ten można zrealizować przy użyciu różnych kombinacji środków rzeczowych, finansowych, osobowych, a decydent nie ma przekonania przy której kombinacji środków realizacja tych celów będzie najkorzystniejsza. Cały proces decyzyjny realizowany jest w określonym środowisku, które może wpływać na skuteczność i efektywność realizacji celu. Najczęściej w środowisku (otoczeniu) mogą występować problemy z dostępnością do określonych zasobów sprawiło to, że wśród różnych modeli zainteresowanie autorów skoncentrowało się na programowaniu liniowym, które uwzględnia wielość celów i dostępność środków.

Przez model będziemy rozumieć celowe i świadome uproszczenie rzeczywistości celem wyjaśnienia badanego aspektu tej rzeczywistości. Jesteśmy świadomi tego, że do opisanego rzeczywistości należałoby użyć prawie nieskończonej liczby cech, a każda z nich ma inne znaczenie w wyjaśnianiu badanego aspektu. W zbiorze tych cech istnieją cechy nieistotne, mało istotne, i istotne. Celem określenia istotności badanych cech w wyjaśnianiu badanego aspektu tejże rzeczywistości stosuje się powszechnie rachunek korelacji i regresji, analizę przyczynowo skutkową, sondaż opinii ekspertów. Cechy wykorzystywane w modelu muszą być względem siebie niezależne i wymaga się aby cechował je: a) znaczny zakres zmienności, b) znaczny wpływ na wyjaśnianie badanego aspektu.

Wśród modeli matematycznych szeroki zakres zastosowań wykazuje programowanie liniowe.

W programowaniu liniowym występują:

$$F_1 = C_{11} \cdot X_1 + C_{12} \cdot X_2 + \dots + C_{1n} \cdot X_n$$

a) Funkcje celu :

$$F_m = C_{m1} \cdot X_1 + C_{m2} \cdot X_2 + \dots + C_{mn} \cdot X_n$$

gdzie:  $X_j$  - zmienne decyzyjne /  $j=1,2,\dots,n$

$j$  - liczba zmiennych decyzyjnych

$m$  - liczba funkcji celu

$C_{ij}$  - użyteczność, wartość lub cena przypisane danej zmiennej decyzyjnej

b) Zbiór równań z uwzględnieniem dostępności do środków niezbędnych do utworzenia zmiennej decyzyjnej  $X$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2$$

⋮

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m$$

gdzie  $a_{pj}$  - norma zużycia danego dobra  $b_m$  dla otrzymania jednej jednostki zmiennej decyzyjnej,  $b_p$  środki dostępne dla realizacji celów  $p=1,2,\dots,m$ .

c) Warunek nieujemności zmiennych decyzyjnych  $x_j \geq 0$

Jeżeli zmiennymi decyzyjnymi są na przykład usługi to  $a_{pj}$  stanowią normy zużycia czasu, materiału, energii, liczby pracowników obsługi itd.

Programowanie liniowe – pozwala wyznaczyć taką kombinację wartości zmiennych decyzyjnych po pierwsze, która jest możliwa do uzyskania przy danej dostępności do materiałów, energii itd. koniecznej do ich wytworzenia. Po drugie taki zbiór zmiennych decyzyjnych, przy których funkcja celu jest maksymalna  $F \Rightarrow \max$ .

Dla celów aplikacyjnych programowanie liniowe może być stosowane:

- a) w analizie wrażliwości na zmianę cen,
- b) ocena zaopatrzenia i wyznaczenie optymalnej wielkości potrzeb materiałowych
- c) określenie optymalnej struktury zmiennych decyzyjnych ze względu na przyjęte kryteria

#### Analiza wrażliwości na zmianę cen

Jeżeli w funkcji celu będziemy kolejno zmieniać np. ceny o tę samą wielkość lub o ten sam stosunek w odniesieniu do ceny pierwotnej to otrzymamy:

$$F_1^1 = (c_1 + \Delta c) \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

$$F_1^2 = c_1 \cdot x_1 + (c_2 + \Delta c) \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

...

$$F_2^1 = 1,1 \cdot c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

$$F_2^2 = c_1 \cdot x_1 + 1,1 \cdot c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

Dla każdego obliczenia wyznaczamy wartość zmiennych decyzyjnych oraz wartość funkcji celu. Dla relacji  $F/F'$  wyznaczamy tę zmienną decyzyjną, przy której zmiana ceny powoduje najbardziej znaczącą zmianę funkcji celu.

#### Optymalny poziom środków do realizacji zmiennych decyzyjnych.

a) Wyznaczamy kolejno:

1) Wartość funkcji celu przy ustalonej dostępności środków **b**

b) Równanie dla którego **b=0**

1) eliminujemy ze zbioru równań (co jest o tyle niekorzystne gdyż do realizacji wchodzi co najwyżej tyle zmiennych decyzyjnych ile jest równań)

2) zakładamy, że nie ma ograniczeń w dostępności tego środka

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 \dots b_n \rightarrow \infty$$

c) dla tych nowych warunków wyznaczamy wartość funkcji celu i wartości zmiennych decyzyjnych. W przypadku gdy następuje wzrost wartości funkcji celu wyznaczamy

1) różnicę przyrostu  $\Delta F = F^p - F$

2) różnicę pomiędzy pierwotną ilością środka do realizacji a potrzebną dla nowej sytuacji decyzyjnej

$$\Delta b = 10b^p - b^f$$

gdzie  $b^f$  – niewykorzystana ilość środka do realizacji

3) wyznaczamy maksymalną cenę pozyskania tego środka

$$\Delta F > C^b \times \Delta b$$

Różnica  $\Delta F - C^b \times \Delta b$  stanowi korzyść jaką uzyskuje przedsiębiorstwo z tytułu wzrostu sprzedaży. Obliczenia te można powtarzać tak długo aż uzyskamy sytuację-  $b_1, b_2, \dots b_m = 0$

### Wielokryterialna ocena rozwiązań

Każde kolejne rozwiązanie optymalne ze względu na nową funkcję celu może być akceptowalne tylko wtedy, gdy jego użyteczność jest wyższa lub co najmniej taka sama jak przy pierwszym rozwiązaniu. Można to uzyskać:

a) przez wprowadzenie do zbioru równań ograniczających pierwotnej funkcji celu

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n > F$$

b) przez wprowadzenie nowej funkcji celu

$$F_k = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n - \text{min.}$$

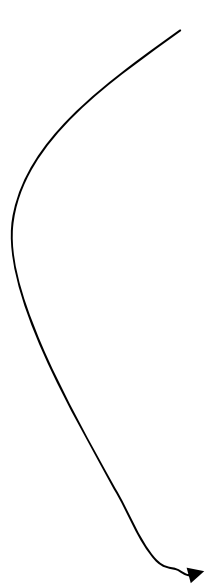
gdzie  $k$  – koszt jednostkowy realizacji zmiennych decyzyjnych

Można też obliczyć wartość funkcji celu wprowadzając do równania:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Wartości  $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$  tj. uzyskane z uwzględnieniem nowej funkcji celu

Porównanie  $F^k$  z  $F$  pozwala ocenić, które z rozwiązań staje się suboptymalne. Wykorzystując wiedzę, doświadczenie i intuicje osób zarządzających ustalamy funkcje celu, które stanowią o ocenie programu realizowanego. Dla uszeregowania funkcji celu ze względu na ich znaczenie prócz zarządzających można i należy korzystać z opinii ekspertów.


$$\begin{aligned} F_1 &= C_{11} \cdot X_1 + C_{12} \cdot X_2 + \dots + C_{1n} \cdot X_n \\ &\vdots \\ F_o &= C_{o1} \cdot X_1 + C_{o2} \cdot X_2 + \dots + C_{on} \cdot X_n \\ \\ a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \dots + a_{1n} X_n &< b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot X_1 + a_{m2} \cdot X_2 + \dots + a_{mn} \cdot X_n &< b_m \\ X_i &\geq 0 \\ \\ F_2^k &= C_{11} \cdot X_1^k + C_{12} \cdot X_2^k + \dots + C_{1n} \cdot X_n^k \\ a_{11} \cdot X_1^k + a_{12} \cdot X_2^k + \dots + a_{1n} X_n^k &< b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot X_1^k + a_{m2} \cdot X_2^k + \dots + a_{mn} \cdot X_n^k &< b_m \\ C_{m1} \cdot X_1^k + C_{m2} \cdot X_2^k + \dots + C_{mn} \cdot X_n^k &\geq F_1 \\ X_i^k &\geq 0 \end{aligned}$$

Klasyczne rozwiązanie (ocena jednokryterialna) polega na poszukiwaniu najkorzystniejszej (optymalnej) funkcji celu

$$\begin{aligned} F &= C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n \\ a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \dots + a_{1n} X_n &< b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot X_1 + a_{m2} \cdot X_2 + \dots + a_{mn} \cdot X_n &< b_m \end{aligned}$$

Przy ocenie wielokryterialnej poszukujemy takiego rozwiązania, które jest optymalne względem zbioru funkcji celu.



Literatura:

1. T. Burak, P. Krowicki, H. Przybyła - „Wykorzystanie metod wielowymiarowej analizy porównawczej do pozyskania trudno lub niedostępnych informacji.” Wiadomości Górnicze 5/2012
2. Edmund Ignasiak „Badania Operacyjne”. PWE Warszawa 1997r.
3. M. Kozdrój, H. Przybyła „Metody matematyczne w organizacji produkcji górniczej” wydawnictwo Pol. Śl.
4. Przybyła H., Krowicki P. – Wielowymiarowa analiza porównawcza inspiracją do reorganizacji procesów produkcyjnych. Moderni matematicke metody v inženýrství. Dolní Lomná 2008.
5. Wiesław Sadowski „Teoria podejmowania decyzji”. PWE –Warszawa 1976r.

# WYKORZYSTANIE METOD TAKSONOMICZNYCH W SYSTEMIE ZARZĄDZANIA KOPALNIAMI.

**Tadeusz Burak, Piotr Krowicki, Henryk Przybyła**

**Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Politechnika Śląska w Gliwicach  
Akademicka 2, 44-100 Gliwice**

**E-mail:** [tadeusz.burak@polsl.pl](mailto:tadeusz.burak@polsl.pl), [piotr.krowicki@polsl.pl](mailto:piotr.krowicki@polsl.pl), [henryk.przybyla@polsl.pl](mailto:henryk.przybyla@polsl.pl)

Abstract:

Features specific to the volatility of coal mining and geological conditions and limited access to information. Under these conditions, support manager taxonomic procedures. Sources of information are of similar mines mining and geological conditions, risks of mining, etc. We examine the similarity and reliability of information obtained from various coal mines.

Do specyficznych cech górnictwa węgla kamiennego zalicza się zmienność warunków górniczo-geologicznych oraz utrudniony lub niemożliwy dostęp do informacji. W takich sytuacjach decydenta wspomagają procedury taksonomiczne. Dodatkowym źródłem informacji stają się kopalnie o najwyższym stopniu podobieństwa z których można pozyskiwać informacje lub badać wiarygodność własnych informacji (np. zagrożenia górnicze, warunki zalegania itp.).

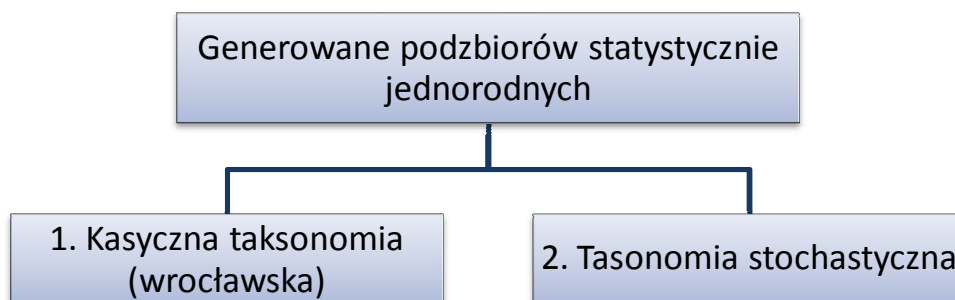
P. F. Drucker w swoich pracach zaznacza, że nie ma ani dobrych ani złych przedsiębiorstw, są tylko przedsiębiorstwa dobrze lub źle zarządzane. Jeżeli zarządzanie potraktujemy jako sekwencyjny proces podejmowania decyzji i uwzględnimy to, że decyzje podejmowane są w warunkach pewności, niepewności ryzyka lub konfliktu, to znaczącą rolę w tym procesie odgrywają informacje.

W teorii o słuszności takiego rozumowania, a potwierdza to również praktyka, uważa się, że skuteczną i efektywną osobą jest ta, która jest kompetentna, zmotywowana i dobrze **poinformowana**. Z analizy procesów decyzyjnych wynika, że bardzo często występują braki informacyjne czy też stany wątpliwości co do wiarygodności informacji. Powyższe

stwierdzenia skłoniły autorów do poszukiwania takich metod i technik, które umożliwiają pozyskanie brakujących informacji, miary wiarygodności tych informacji którymi dysponujemy czy też wzbogacenie *dyspozycyjnego* zbioru informacji. W pracy „Wykorzystanie wielowymiarowej analizy porównawczej do pozyskiwania trudno lub niedostępnych informacji”[1] przedstawiliśmy procedurę pozyskiwania informacji z wykorzystaniem analizy wielowymiarowej na rzecz której do porównania obiektów użyto taksonomii wrocławskiej.

W przedmiotowym opracowaniu proponujemy wzbogacenie klasycznej taksonomii wrocławskiej tak by możliwe było generowanie odpowiednio dużej liczby alternatywnych podzbiorów obiektów oraz aby była możliwa ocena jakości przeprowadzonego grupowania. Do generowania alternatywnych podzbiorów wykorzystaliśmy średnicę zbioru  $R$  (1). Do oceny jakości grupowania wykorzystano stosunek wariancji wewnątrz grupowej do wariancji międzygrupowej. Za najkorzystniejszy podział zbioru na podzbiory statystycznie jednorodne uznajemy ten podział dla którego  $F_m/F_w \Rightarrow \max$

Procedurę grupowania przedstawiono w formie algorytmu na rys. 1.



Rys. 1. Podział podzbiorów na zbiory statystycznie jednorodne (*źródło własne*)

Ad. 1 Klasyczna taksonomia wrocławska. W klasycznej taksonomii grupowanie w podzbiory statystycznie jednorodne odbywa się według. formuły:

$$R = \bar{s} + n * S \quad (1)$$

gdzie:

$R$  – promień

$\bar{s}$  – średnie odchylenie

$s$  – odchylenie standardowe

$n$  – współczynnik z przedziału  $0 - 2$

Do generowanie podzbiorów przyjęto przedział zmienności  $0 \div 2$ .

$$\begin{aligned}
R_1 &= \bar{s} + 0 * S = d \\
R_2 &= \bar{s} + 0,2 * S \\
&\vdots \\
R_n &= \bar{s} + 2 * S
\end{aligned}$$

Każdy z podziałów jest oceniany przez porównanie wariancji międzygrupowej  $F_m$  do wariancji wewnątrzgrupowej  $F_w$ .

$$F = \frac{F_m}{F_w} \quad (2)$$

Wariancja międzygrupowa jest miarą rozproszenia średnich uzyskanych w porównywanych grupach w stosunku do średniej ogólnej. Formalny zapis średniej międzygrupowej zapisujemy:

$$F_m = \frac{\sum_{i=1}^k (\mu_i - \mu)^2}{k - 1} \quad (3)$$

gdzie:

$\mu_i$  - średnia ze zmiennej zależnej w  $i$ -tej grupie (w oparciu o wyniki z tej grupy), a  $\mu$  średnią ogólną wyliczoną w oparciu o wszystkie wyniki, pełnego zbioru obiektów.

$k$  - parametr opisujący ilość porównywanych grup.

W przypadku prawdziwości hipotezy zerowej (wszystkie średnie grupowe, a także średnia ogólna są sobie równe) wariancja międzygrupowa wynosi 0, tzn. nie ma żadnej zmienności w porównywanych średnich grupowych. Im większe jest zróżnicowanie między porównywanymi grupami, tym większa jest również wariancja międzygrupowa, a wobec tego również wartość statystyki  $F$ .

Wariancja wewnątrzgrupowa jest natomiast miarą rozproszenia wyników w obrębie grupy, do której należy dany wynik. Wariancja międzygrupowa dane jest wzorem:

$$\begin{aligned}
F_w &= \frac{\sum_{i=1}^{m_1} (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{m_2} (x_i - \bar{x}_2)^2 + \sum_{i=1}^{m_3} (x_i - \bar{x}_3)^2 + \dots + \sum_{i=1}^{m_k} (x_i - \bar{x}_k)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \dots + (n_k - 1)} \\
F_w &= \frac{\sum_{i=1, j=1}^{i=l, j=n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{(n - k)} \quad (4)
\end{aligned}$$

gdzie:

$X_i$  -  $i$ -ty wynik w danej grupie  $\bar{x}_i$  jest średnią z wyników w  $i$ -tej grupie,  $m$  jest ilością obiektów w tej grupie w  $i$ -tej grupie,

$x_{ij}$  jest wartością zmiennej zależnej dla  $j$ -tej podgrupy z  $i$ -tej grupy,

$k$  - ilość porównywanych grup<sup>1</sup>

$n$  - ilość wszystkich obiektów w grupach.

<sup>1</sup> W rozważanym problemie występuje tylko jedna grupa, którą tworzą Kopalnie Węgla Kamiennego

Ad. 2.

Niech  $\omega$  oznacza przestrzeń metryczną, jeśli każdej parze punktów  $P_k, P_w$  ( $P_k \in \omega, P_w \in \omega$ ) przyporządkowana jest liczba rzeczywista  $|P_k - P_w| \geq 0$  zwana odległością punktu  $P_k$  od punktu  $P_w$  /lub metryką/, która spełnia następujące warunki;

$$|P_k - P_w| = 0 \leftrightarrow P_k = P_w \quad (5)$$

$$|P_k - P_w| = |P_w - P_k| \quad (6)$$

$$|P_k - P_w| + |P_w - P_t| > |P_k - P_t| \quad (7)$$

Wynika stąd, że przestrzenią metryczną jest również każdy podzbiór takiej przestrzeni.

Przestrzeń euklidesowa  $E_n$ , której punktami są ciągi  $m$  liczb rzeczywistych  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  jest przestrzenią metryczną z następującą metryką:

$$|P_k - P_w| = \left[ \sum_{i=1}^n (x_{kj} - x_{wj})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

gdzie:

$$k, w=1, 2, \dots, n \quad k \neq w$$

Górne wartości wszystkich liczb  $|P_k - P_w|$ , a więc maksymalne wartości wzajemnych odległości punktów przestrzeni metrycznej  $\omega$ , nazywa się średnicą przestrzeni  $\omega$  i oznacza się symbolem  $\delta(\omega)$ .

Przestrzenie metryczne  $\omega$ , w których  $\delta(\omega) < \alpha$  nazywa się przestrzeniami ograniczonymi.

Dany jest w przestrzeni metrycznej  $E_n$  skończony zbiór punktów

$$Q = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (9)$$

Niech  $[X]$  oznacza macierz, której wierszami są współrzędne punktów  $P_i$   $\{i=1, 2, \dots, m\}$ :

$$[x] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & \dots & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{ml} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ciągi  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ , czyli współrzędne punktu  $P_i$  ze względu na konieczność porównania ich ze sobą są zestandaryzowane.

$$\bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_{ij} - \bar{x}_j = 0 \quad (11)$$

$$S_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = 1 \quad (12)$$

gdzie:

$$j=1, 2, \dots, n$$

$$z_j = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_i}$$

Opis metody.

Zbiór  $Q$ , jako podzbiór przestrzeni metrycznej jest również przestrzenią metryczną z metryką (8) i własnościami (5), (6), (7).

Oznaczamy

$$|P_i - P_w| = d_{iw} \quad (13)$$

$[D]$  – jest macierzą odległości w  $Q$  to znaczy:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & 0 & \dots & d_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Jeżeli zostanie obliczona macierz  $[D]$  można dokonać dyskryminacji zbioru  $Q$  na  $S$  podzbiorów, tak aby

$$Q^1 \cup Q^2 \cup \dots \cup Q^s = Q \quad (15)$$

$$Q^i \cap Q^1 = \emptyset$$

gdzie:

$$i, l=1, 2, \dots, S, \quad i \neq l$$

Do danego podzbioru  $Q^l$  zalicza się te punkty, które znajdują się w kuli  $K(P_k, r)$  o promieniu  $r$  i środku w losowo wybranym punkcie  $P_k$ , który nie należy do żadnego z wcześniej wybranych podzbiorów:

$$Q^l = \left\{ P_i : P_i \in \left( Q - \bigcup_{j=1}^{l-1} Q^j \right) \wedge d_{ki} \leq r \right\} \quad (16)$$

skąd

$$P_k \in Q^2 \quad \text{gdyż} \quad d_{kk} \leq r$$

Dyskryminacje przeprowadza się do momentu, gdy

$$Q - \bigcup_{j=1}^s Q^j = \emptyset \quad \text{gdzie} \quad \bigcap_{j=1}^s Q^j = \emptyset \quad (17)$$

W opisaney metodzie w przypadku dyskryminacji zbioru skończonego istotne jest :

1. Losowanie punktu stanowiącego środek kuli.
2. Dobór odpowiedniego promienia. Proponujemy

$$R = d + n * S$$

Przy pomocy opisaney metody dokonano podziału zbioru obiektów na podzbiory statystycznie jednorodne, przy danym promieniu  $R$  tak aby ich liczba była jak najmniejsza.

W opisanej metodzie dokonuje się losowego wyboru punktów stanowiących środek kul  $K(P_k, R)$  i jednocześnie dyskryminuje zbiór  $Q$  tak aby spełnione były warunki (11), (12), (13). Liczba podzbiorów będzie nie tylko funkcją promienia lecz zależęć będzie również od wylosowanych środków.

$$P(S \leq S_o/r) \leq \alpha \quad (18)$$

Podzbiór  $Q^l (l=1, 2, \dots, s_o)$  otrzymany w wyniku dyskryminacji zbioru  $Q$  na  $S_o$  podzbiorów przy zadanym promieniu  $R$  nazywa się skupieniem, a punkty  $P_i^l (l = 1, 2, \dots, S_o, i \in I = \{1, 2, \dots, m\})$  stanowiące środki kul o promieniu  $R$ , które zawierają skupienia  $Q^l$ , nazywamy środkami skupień.

Opisana metoda dyskryminacji zbioru na najmniejszą liczbę podzbiorów, jest postępowaniem iteracyjnym o następującym algorytmie, gdzie  $S, t$  są kolejnymi liczbami naturalnymi i oznaczają:

$l_c$  – licznik cykli

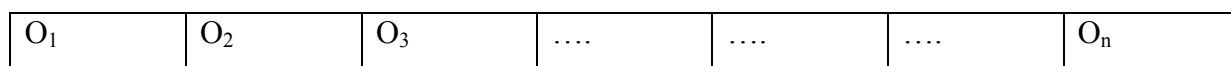
$t$  – licznik iteracji (liczba losowań punktu startowego do obliczeń)

Do doboru zmiennych objaśniających stosowano procedurę wyszukiwania tych zmiennych, które są silnie skorelowane ze zmienną (zmiennymi objaśnianymi) nie są skorelowane ze sobą (są niezależne względem siebie) i charakteryzują się dużą zmiennością (o dużej pojemności informacyjnej). Procedurę doboru zmiennych objaśniających szczegółowo przedstawiono w pracy [4].

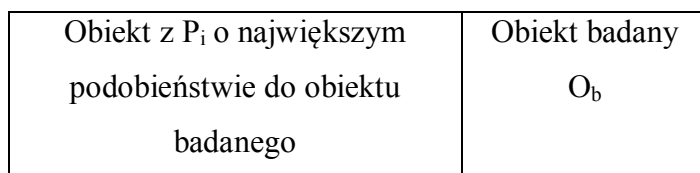
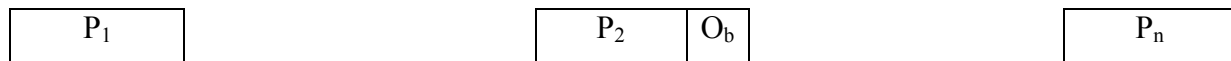
Dla obiektywizacji wyników obliczeń porównujemy ze sobą najkorzystniejsze podziały na podzbiory statystycznie jednorodne. Otrzymane przy użyciu klasycznej metody taksonomii i stochastycznej. Wybór oparty jest o porównywanie wariancji międzygrupowej do wewnątrzgrupowej  $F_w/F_g$ .

Na potrzeby uzupełnienia zbioru informacji do grupowania obiektów ograniczamy zbiór zmiennych objaśniających do tych, które zawiera obiekt badany. Po uzyskaniu najkorzystniejszego grupowania z grupy w której znajdują się obiekt badany wyszukujemy w danej podgrupie obiektu który wykazuje największe podobieństwo do obiektu badanego. Następnie uzupełniamy informację w obiekcie badanym pobierając je z obiektu o najwyższym stopniu podobieństwa.

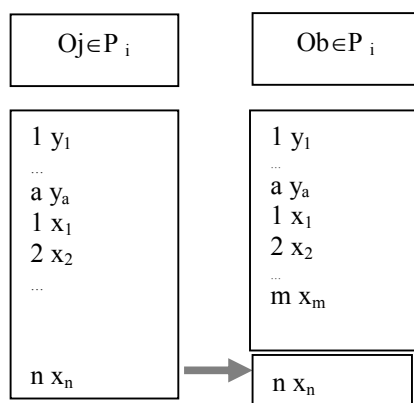
Zbiór obiektów (KWK)



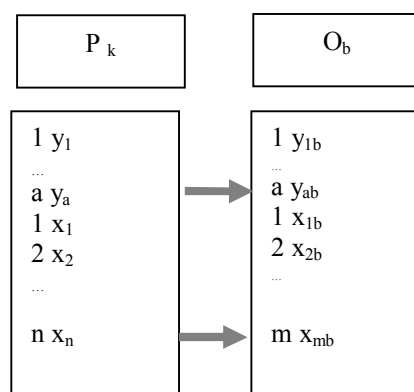
Podzbiory statystycznie jednorodne



Proces uzupełniania informacji



Weryfikacja wiarygodności informacji





Przyjęty stopień podobieństwa  $S_p = 0.9$

$$Y_{1b} \in S_p * Y_{1wz} \div \frac{Y_{1wz}}{S_p} \quad (19)$$

Jeżeli badany Y zawarty jest w przedziale określanym wzorem (19) należy uznać, że informacja jest wiarygodna

#### Literatura:

1. T. Burak, P. Krowicki, H. Przybyła - „Wykorzystanie metod wielowymiarowej analizy porównawczej do pozyskania trudno lub niedostępnych informacji.” Wiadomości Górnicze 5/2012
2. Zdzisław Hellwig „Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju”, Przegląd statystyczny nr 4/1968.
3. M. Kozdrój, H. Przybyła „Metody matematyczne w organizacji produkcji górniczej” wydawnictwo Pol. Śl.
4. Przybyła H., Krowicki P. – Wielowymiarowa analiza porównawcza inspiracją do reorganizacji procesów produkcyjnych. Moderni matematicke metody v inženyrstvi. Dolni Lomna 2008.

# PEWNE NIESTANDARDOWE FUNKCJE WPLYWÓW

Krzysztof Dłutek

Instytut Matematyki, Politechnika Śląska w Gliwicach  
ul. Kaszubska 23, 44-101 Gliwice  
E-mail: [krzysztof.dlutek@polsl.pl](mailto:krzysztof.dlutek@polsl.pl)

**Abstrakt:** W artykule omówiono pewne funkcje wpływów typu Cauchy'ego w modelu S. Knothego – W. Budryka, opisującego kształt powyrobowiskowej niecki obniżeniowej.

**Abstract:** The article discusses some Cauchy type of influence functions in the model S. Knothe - W. Budryk.

Jednym z najważniejszych problemów związanych z eksploatacją górnictw jest możliwość określenia jaki wpływ na powierzchnię ma eksploatacja podziemna. Rozpatrywane są dwie sytuacje dynamiczna i statyczna, nazywane stanami nieustalonymi i ustalonymi. Przez stany nieustalone rozumiemy chwilowy kształt niecki spowodowany przez trwające prace górnicze, natomiast przez stan ustalony końcowy kształt nieulegający dalszym zmianom w czasie. Zależność pomiędzy powyższymi stanami opisuje równość

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_N(t) = S_U$$

gdzie  $S_U$  oznacza stan ustalony, natomiast  $S_N$  stan nieustalony w chwili  $t$ . Istnieje wiele metod określania kształtu powyrobowiskowej niecki obniżeniowej. Jedną z najczęściej stosowanych jest metoda S. Knothego – W. Budryka. Opiera się ona na wykorzystaniu tak zwanej funkcji wpływów. Funkcja wpływów opisuje teoretyczne obniżenie terenu wywołane przez wyeksploatowanie pojedynczego punktu wyrobiska. W tej sytuacji stan ustalony opisywany jest w następujący sposób

$$O(x, y) = \iint_K W(x - s, y - k) dsdk$$

Gdzie  $W(x, y)$  jest funkcją wpływów, natomiast  $K$  obszarem wyeksploatowanym. Funkcja wpływów powinna spełniać następujące warunki

1.  $W(x, y) \geq 0$  dla wszystkich  $x, y \in R$
2.  $\max W(x, y) = W(0, 0)$
3.  $\iint_{R^2} W(x, y) < +\infty$

W klasycznym modelu S. Knothego – W. Budryka funkcja wpływów ma postać

$W(x, y) = Ae^{-B(x^2+y^2)}$  dla  $A, B > 0$ . Podstawową wadą tak wyrażonej funkcji wpływów są trudności obliczeniowe spowodowane nie elementarnością całki z funkcji  $e^{-x^2}$ . W tym artykule proponuję używać funkcji wpływów związanej z rozkładem Cauchy'ego postaci  $W(x, y) = \frac{A}{(1+Bx^2+By^2)^{3/2}}$  dla  $A, B > 0$ . Funkcja ta jest nieujemna, posiada maksimum globalne w punkcie (0,0) o wartości A oraz skończoną całkę po całej przestrzeni wynoszącą  $\frac{2\pi A}{B}$ . Spełnia więc warunki dla funkcji wpływów. Przy tak dobranej funkcji wpływów stan ustalony opisywany jest w następujący sposób

$$O(x, y) = \iint_K \frac{A}{(1+Bx^2+By^2)^{3/2}} dx dy$$

Zaletą tego modelu jest możliwość elementarnego opisanie stanów ustalonych dla klasycznych kształtów wyrobisk. Na przykład w najczęściej występującej sytuacji wyrobiska będącego prostokątem (o wymiarach od 0 do S oraz od 0 do K) stan ustalony wyraża się wzorem całkowym postaci

$$O(x, y) = \int_0^S \left[ \int_0^K \frac{A}{[1+B(x-u)^2+B(y-w)^2]^{3/2}} dw \right] du,$$

który elementarnie można zapisać w sposób jawny

$$\begin{aligned} O(x, y) = \frac{2A}{B} \{ & \arctg \left[ \sqrt{B}x + \sqrt{B}(y-K) + \sqrt{1+Bx^2+B(y-K)^2} \right] \\ & + \arctg \left[ \sqrt{B}(x-S) + \sqrt{B}y + \sqrt{1+B(x-S)^2+By^2} \right] \\ & - \arctg \left[ \sqrt{B}x + \sqrt{B}y + \sqrt{1+Bx^2+By^2} \right] \\ & - \arctg \left[ \sqrt{B}(x-S) + \sqrt{B}(y-K) + \sqrt{1+B(x-S)^2+B(y-K)^2} \right] \}. \end{aligned}$$

W wypadku gdy front eksploatacji jest bardzo szeroki można model uprościć do jednowymiarowego postaci

$$O(x, y) = \frac{2A}{\sqrt{B}} \int_0^S \frac{1}{1+B(x-u)^2} du = \frac{2A}{B} [\arctg(\sqrt{B}x) - \arctg(\sqrt{B}(x-S))].$$

W rzeczywistości niecki obniżeniowe charakteryzują się niesymetrycznością względem kierunku eksploatacji. W celu uwzględnienia tego efektu proponuję drugą wersję

funkcji wpływów (dzięki której uzyskujemy efekt niesymetryczności kosztem niewielkiego zwiększenia komplikacji obliczeniowych

$$W(x, y) = \begin{cases} \frac{A}{(1 + Bx^2 + Dy^2)^{3/2}}, & x < 0 \\ \frac{A}{(1 + Cx^2 + Dy^2)^{3/2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

W sytuacji gdy  $B=C=D$  otrzymujemy poprzedni model. W tym modelu stan ustalony niecki obniżeniowej dla wyrobiska w kształcie prostokąta ma postać

$$O(x, y) = \begin{cases} \int_0^S \int_0^K \frac{A}{[1 + B(x-u)^2 + D(y-w^2)]^{3/2}} dw]du, & x < 0 \\ \int_0^x \int_0^K \frac{A}{[1 + C(x-u)^2 + D(y-w^2)]^{3/2}} dw]du + \int_x^S \int_0^K \frac{A}{[1 + B(x-u)^2 + D(y-w^2)]^{3/2}} dw]du, & S > x \geq 0 \\ \int_0^S \int_0^K \frac{A}{[1 + C(x-u)^2 + D(y-w^2)]^{3/2}} dw]du, & x \geq S \end{cases}$$

i chociaż jest bardziej skomplikowany to również da się elementarnie przedstawić w sposób jawny.

Osobnym problemem jest opisywanie stanów nieustalonych. W ich opisie poza funkcją wpływów wykorzystywane są również funkcja czasu wydobywania ( $C_W$ ) oraz funkcja opóźnienia wpływu ( $W_0$ ). Funkcja opóźnienia wpływu powinna spełniać warunki

1.  $W_0(t) = 0, t < 0$
2.  $W_0$ - nie malejąca
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_0(t) = 1$ .

W klasycznym modelu S. Knothe'go – W. Budryka ma ona postać

$$W_0(t) = 1 - e^{-ct}, c > 0.$$

Funkcja czasu wydobywania określa natomiast czas w którym wydobyto dany punkt wyrobiska. Przykładowo może ona mieć następujące postacie

1.  $C_W(x, y) = 0$  dla  $(x, y) \in K$
2.  $C_W(x, y) = ax$  dla  $(x, y) \in K$
3.  $C_W(x, y) = \begin{cases} ax, P > x > 0 \\ ax + \beta, x \geq P \end{cases}$  dla  $(x, y) \in K$

wersja pierwsza w sytuacji jednoczesnego wybrania całego wyrobiska, druga podczas jednostajnego wydobywania pokładu, natomiast trzecia gdy w czasie jednostajnego wybierania doszło do przerwy w pracy.

Przy tak dobranych oznaczeniach stany nieustalone można opisać wzorem

$$O_N(x, y, t) = \iint_{K_t} W(x-s, y-k) W_0(t - C_W(s, k)) dsdk$$

gdzie  $K_t$  jest obszarem wyeksploatowanym do chwili  $t$ . W klasycznym modelu S. Knothe'go – W. Budryka równanie to będzie miało postać

$$O_N(x, y, t) = \iint_{K_t} A e^{-B[(x-s)^2 + (y-k)^2]} [1 - e^{-c(t - C_W(s, k))}] dsdk,$$

natomiast dla funkcji wpływu typu Cauchy'ego

$$O_N(x, y, t) = \iint_{K_t} \frac{A}{[1 + B(x-s)^2 + B(y-k)^2]^{3/2}} \left[ 1 - \frac{C}{t - C_W(s, k) + C} \right] dsdk.$$

Można jednak zaproponować inne funkcje opóźnienia wpływów, takie jak

1.  $W_0(t) = 1 - \frac{C}{t+C}$  dla  $t \geq 0, C > 0$
2.  $W_0(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^\alpha}$  dla  $t \geq 0, \alpha > 0$
3.  $W_0(t) = 1 - \frac{C}{1+t^\alpha}$  dla  $t \geq 0, \alpha > 0$ .

Tak określone funkcje opóźnienia wpływów wraz z zaproponowanymi funkcjami wpływów dają wiele interesujących efektów, w tym wiele dających się opisać elementarnie. Przykładowo w sytuacji jednostajnego wydobywania wyrobiska w kształcie prostokąta z wykorzystaniem pierwszej funkcji opóźnienia wpływów otrzymujemy następujący wzór na opisanie stanów nieustalonych

$$O_N(x, y, t) = \int_0^S \left[ \int_0^K \frac{A}{[1 + B(x-u)^2 + B(y-w)^2]^{3/2}} \left( 1 - \frac{C}{t - \alpha u + C} \right) dw \right] du.$$

## Bibliografia

1. Knothe S. *Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej*. Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1984.

2. Knothe S. *Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania*. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t.I, z. I, 1953.
3. Strzałkowski P. *Zarys ochrony terenów górniczych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2009.

# TVORBA PERSONALISOVANÝCH E-LEARNINGOVÝCH UČEBNÍCH OPOR I

Jarmila Doležalová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava  
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba  
E-mail : [jarmila.dolezalova@vsb.cz](mailto:jarmila.dolezalova@vsb.cz)

**Abstrakt:** Personalizace výuky znamená přizpůsobit každému studentovi výuku „na míru“ jeho osobnosti. Předpokládá to především znalost těch základních charakteristik každého studenta, které mají vliv na průběh jeho procesu výuky a na jeho učební styl. Dále je třeba mít k dispozici variabilní studijní materiály a program, který na základě charakteristik studenta upraví nejen obsah výuky, ale také sestaví obsah výuky do odpovídající posloupnosti kroků.

**Abstract:** Personalization of education means to adapt the education to each student to be "tailored" to his personality. Above all, it assumes to know those basic characteristics of each student that affect the process of his education and his learning style. It is also necessary to have a variable study materials and a program that, based on the characteristics of the student, not only adjusts the content of teaching, but also compiles the content of teaching in the corresponding sequence of steps.

## 1 Úvod

Stejně jako neexistují dva úplně stejní lidé, neexistují dva úplně stejní studenti. Každý student je individualita, proto se jednotliví studenti liší inteligencí, nadáním pro daný obor, mírou vstupních znalostí, pílí, motivací ke studiu, rychlostí chápání, mírou představivosti, mírou podpory v rodině, učebním stylem, smyslovým vnímáním, druhem a tréninkem paměti, schopností soustředit se, potřebou komunikace se spolužáky a pedagogem, podmínkami, které potřebuje ke studiu, atd.

Personalizace učebního procesu si klade za úkol tyto okolnosti zohlednit a přizpůsobit celý proces učení se osobnostním charakteristikám jednotlivých studentů.

Cíl výuky se nemění: Každý student musí mít možnost naučit se stejným základním výsledným znalostem a dovednostem. Mění se v případě potřeby jen přístup ke studentovi, způsob nebo postup učebního procesu.

Personalizace učebního procesu lze dosáhnout teoreticky dvěma způsoby:

1. Výukové materiály zpracovat v mnoha odlišných variantách pro různé typy studentů. Je zřejmé, že tato cesta je vzhledem k množství studentů prakticky nerealizovatelná.

2. Studijní materiály podrobně rozčlenit a výukový proces z jednotlivých částí podle individuálních vlastností studentů vhodně sestavovat.

Druhý způsob byl řešen v záměru CZ.1.07/2.2.00/07.0339 s názvem Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu v rámci operačního programu ESF Vzdělávání pro konkurenceschopnost, jehož nositelem byla VŠB – Technická univerzita Ostrava.

Personalizace učebního procesu předpokládá naplnění tří základních úkolů:

1. Znat základní studijní vlastnosti každého studenta.
2. Mít k dispozici vhodné výukové materiály.
3. Mít k dispozici program, který sestavuje a řídí výuku studenta podle jeho vlastností.

## 2 Virtuální student

Znalost důležitých charakteristik studenta, a to těch, které mají vliv na proces jeho učení, na jeho učební styl, je nezbytným předpokladem pro adaptivní způsob výuky.

Nestačí však tyto charakteristiky znát. Abychom mohli proces učení adaptovat studentům na míru, je nezbytné ohodnotit vlastnosti charakterizující učební styl každého studenta numericky. Pro každou vybranou vlastnost (případně pro každý její pól) byla zavedena stupnice v rozmezí  $\langle 0, 100 \rangle$ , respektive  $\langle -100, 100 \rangle$ , viz [1].

Jednou z rozhodujících vlastností, určujících způsob studia je **smyslové vnímání**, které můžeme rozdělit do 4 kategorií: vizuální Sviz, auditivní Saud, kinestetické Skin a verbální Sver. Pro numerickou klasifikaci musí platit  $Sver+Sviz+Saud+Skin = 100$ . Na vysvětlenou - student s čistě vizuálním vnímáním je popsán čtveřicí  $\{0, 100, 0, 0\}$ , student s kombinací vizuálního a auditivního vnímání je popsán čtveřicí  $\{0, 50, 50, 0\}$ , atd.

Další charakteristikou je **sociální aspekt** StSoc (nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$ ), který popisuje zapojení do okolního sociálního prostředí při studiu. Přibližně platí

- 0 student se rád připravuje sám, nepotřebuje kontakt s okolím,
- 30 studuje ve dvojici, vyhovuje mu diskuse nad tématem,
- 100 studuje ve skupině, vyhledává spolupráci s kolegy.

Významnou charakteristikou ovlivňující proces učení je také motivace ke studiu. Parametr StAfek (**afektivní aspekt**) nabývá hodnot z intervalu  $\langle -100, 100 \rangle$  s přibližnými hodnotami:

- 100 odpor ke studiu,
- 50 nezáměr o studium,
- 0 lhostejný přístup, na studiu mu nezáleží,
- 50 spíše pozitivní přístup ke studiu,
- 100 silně motivovaný student, který ví, čeho chce dosáhnout.

Důležitou charakteristikou je dále **autoregulace** StAreg, tedy míra schopnosti studenta si své studium sám řídit. Tomuto parametru jsou přiřazeny hodnoty z intervalu  $\langle -100, 100 \rangle$  přibližně takto:

- 100 nepřizpůsobivý svérázný student, neochotný podřídit se jakémukoliv řízení,
- 50 nesamostatný student, který potřebuje direktivní řízení,
- 0 sdílení řízení,
- 50 vyhovuje mu volné řízení,
- 100 naprosto samostatný student, který si své učení řídí sám.

**Taktiky učení** byly kvantifikovány následujícím způsobem:

**Systematičnost** StSyst z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$  s mezními hodnotami

- 0 student potřebuje řád, metodiku, pracuje systematicky,
- 100 potřebuje úplnou volnost, zpracovává materiál spíše náhodně, nehledá vazby mezi poznatky.



**Způsob zpracování informací** odlišuje teoretický a experimentální přístup, avšak ne ve vylučovacím smyslu. Předpokládá se, že každý v sobě nese jistou míru teoretického vnímání stejně jako nějakou schopnost experimentovat. Vzhledem k tomu byly zavedeny 2 parametry: **teoretické odvozování** StTeor z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$  a **experimentování** StExp z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$ .

**Postup učení** rozlišujeme

**detailistický** StDetail z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$ , kdy student postupuje zdola nahoru, tedy od jednotlivostí k celku, učí se po malých částech, které seskupuje do celku, **holistický** StHol z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$ , kdy student postupuje shora dolů, vnímá nejprve celek a pak teprve řeší detaily.

**Pojetí zpracování informací** StPoj z intervalu  $\langle -100, 100 \rangle$  charakterizuje schopnost nastudovat učivo do hloubky.

- 100 **patologicky povrchové** - učení se z paměti, bez snahy o pochopení podstaty,
- 50 **povrchové** - záměr splnit základní požadavky předmětu, udělat zkoušku s co nejmenším úsilím,
- 0 – 50 **strategické** - záměr dosáhnout co nejlepšího výsledku s přiměřeným úsilím,
- 100 **hloubkové** - potřeba porozumět učivu, pochopit význam informací, nalézt vazby mezi nimi a spojit je do celku.

Dotazník pro zjišťování vyjmenovaných charakteristik vytvořil v rámci uvedeného záměru odborník - psycholog. Obsahuje celkem 31 otázek s klíčem, podle kterého se určí základní vstupní (startovní) hodnoty pro každého studenta. S těmito hodnotami student vstupuje do systému adaptivní výuky. Po prvním procesu učení se podle jeho postupu, způsobu řešení, počtu chyb atp. vyhodnotí studijní protokol, hodnoty jednotlivých vlastností se automaticky nebo ručně doladují a následující proces výuky probíhá podle upravených hodnot.

Definované vlastnosti tvoří 14-rozměrný vektor. Pokud bychom uvažovali pro každou z nich pouze 2 mezní hodnoty, získali bychom  $2^{14} = 16\,384$  typů studentů. Proto byl zaveden pojem **virtuální student**, ve kterém jsou definovány na základě shlukování výsledků dotazníků a zpětné vazby po proběhnutí výukového procesu nejčastěji se vyskytující typy.

### 3 Tvorba adaptibilních studijních opor

Aby mohl řídicí program, nazvaný **virtuální učitel**, přizpůsobit proces výuky na míru jednotlivým typům virtuálního studenta, musí být učivo zpracováno mnoha odlišnými způsoby. Fakta předkládaná k výuce jsou stále stejná, mění se jen podrobnost jejich komentování, podrobnost průběžných pedagogických pokynů, pořadí jejich výkladu a dalších průvodních částí výkladu. Proto je nutno učební materiály zpracovat strukturovaně, rozdělit je na jednotlivé elementární části, které pak podle potřeby virtuální učitel spojí v nejrůznější varianty výuky na základě vlastností studenta.

Nejvyšší strukturou je pojem **Předmět**, který je určen jednosemestrálním předmětem na vysoké škole. Předmět dělíme na lekce.

**Lekce** je výuková jednotka, která odpovídá jedné vyučovací hodině (jedné přednášce) a dále se dělí na rámce.

**Rámec** je elementární část lekce, která obsahuje jednotkovou výukovou informaci. Rámec dělíme na jednotlivé varianty a vrstvy. Základní rámec definuje jeho obsahovou náplň, varianty rámce se liší jen formou nebo hloubkou výkladu, podrobností zpracování. Obsah musí zůstat zachován.

**Varianty rámce** dělíme podle formy (verbální, vizuální, auditivní, kinestetická) a hloubky. Jako základní byla zvolena hloubka 2, což je obvykle používaný výklad ve výuce. Hloubka 3 je určena méně motivovaným nebo slabším studentům (pomalejším, s nižší úrovní vstupních znalostí), obsahuje podrobnější výklad nejprve s jednoduššími a postupně se složitějšími příklady. Hloubka 1 nabízí výbornému, rychle chápajícímu studentovi, rozšiřující informace, souvislosti a vazby na jiné oblasti. Celkem tedy existuje 12 variant rámce (4 formy \* 3 hloubky).

Rámce dále dělíme na **vrstvy**, což jsou části homogenní z hlediska fází vyučovacího procesu (výklad teorie, vysvětlování, upevňování, prověřování vědomostí, motivace, řízení výuky). Rozlišujeme proto vrstvy:

**výkladové** (vlastní výklad probírané látky), které mohou být:

**teoretické T** (obsahují teorii: definice, pojmy, pravidla, algoritmy, zpravidla nejdůležitější typ vrstvy),

**sémantické S** (vysvětlují zaváděné pojmy, obsahují doplňující informace k teoretické vrstvě, objasňují souvislosti plynoucí z teorie atd.),

**fixační F** (pomocí opakování, jiných formulací a alternativních pojmů, zasazením do širšího kontextu usnadňují lepší zapamatování teorie),

**řešené příklady R** (obsahují typové řešené příklady na využití teorie, měly by být pro studenta předlohou k řešení dalších úloh),

**praktické P** (využívají teoretické znalosti, obsahují řešení aplikačních úloh z praxe),

**testovací** (skupina vrstev pro průběžné testování získaných znalostí). Patří sem

**otázky O** (teoretické otázky z probrané látky, mohou sloužit jen jako kontrola studentovi nebo je využije adaptivní algoritmus k řízení dalšího výkladu),

**úlohy U** (příklady pro procvičení teorie),

**praktické úlohy X** (příklady na aplikaci teorie v praxi),

**cíle C** (formulované cíle lekce nebo rámce, obdobně jako v distančních oporách),

**motivační M** (motivující informace o předmětu, lekci nebo rámci, které by nemotivovanému studentovi zdůvodnily smysl studia daného předmětu),

**navigační N** (pedagogické a organizační pokyny, informace, vlastně průvodce lekcí, doporučený postup při studiu),

**literatura L** (doporučená studijní literatura).

Vrstvu lze rozdělit do více částí stejného typu. Jestliže rámec zavádí nové pojmy, které spolu souvisejí, není nutno jej dělit do více rámců, ale sestavíme **multivrstvu** (například při definici dvou pojmů T1, T2, S1, S2 nebo T1, S1, T2, S2). Pořadí použitých typů vrstev je určeno typem studenta.

#### 4 Příklad učební opory z matematiky

Při řešení uvedeného projektu byly vytvořeny výukové materiály z řady předmětů. Jako příklad uvádím jeden rámec z matematiky. Vybraný předmět Matematika IV je zařazen do prvního semestru navazujícího magisterského studia Fakulty strojní VŠB – TU Ostrava [3, 4].

Předmět: Matematika IV

Lekce: Dvojměrný (dvojný) integrál v obdélníku

Rnazev = Výpočet dvojného integrálu		RPor = 4	
	Varianta - hloubka:	VHloub = 2	
	Varianta - forma:	VForm = 90,10,0,0	
VrImpl	Obsah vrstvy	VrTyp	VrPor
1	<p>Výpočet dvojného integrálu: <b>Dirichletova věta</b></p> <p>Je dán obdélník <math>D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle</math>. Jestliže <math>f(x, y)</math> je funkce spojitá v obdélníku <math>D</math>, pak</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$	T	1
2	<p>Integrál <math>\iint_D f(x, y) dx dy</math> nazýváme <b>dvojměrný</b> nebo také dvojný,</p> <p>integrály <math>\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy</math> se nazývají <b>dvojnásobné</b>.</p> <p>Integrál v závorce nazýváme <b>vnitřní integrál</b> a integrál mimo závorku se nazývá <b>vnější integrál</b>.</p>	T	2
3	<p>Podle Dirichletovy věty vypočítáme dvojměrný integrál převedením na integrál dvojnásobný.</p> <p>Praktický výpočet provádíme tedy dvojnásobnou integrací funkcí jedné proměnné, při čemž druhou proměnnou považujeme vždy za konstantu podobně jako při praktickém výpočtu parciálních derivací.</p> <p>Ve dvojnásobném integrálu počítáme <b>nejprve integrál</b> v závorce - <b>vnitřní</b> a teprve <b>pak integrál</b> mimo závorku - <b>vnější</b>.</p>	S	1
4	<p>Dvojnásobné integrály obvykle pro větší přehlednost zapisujeme ve tvaru</p> $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad 1a)$ $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad 1b)$	T	3
5	<p>V zápisech 1a) <math>\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy</math> a 1b) <math>\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx</math> je integrálem vnitřním vždy integrál napravo a integrálem vnějším integrál nalevo.</p>	S	2
	<p><b>Příklad 1:</b></p> <p>Vypočtete dvojměrný integrál</p>	R	1

6	$A_1 = \iint_D e^{2x+3y} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 1, 2 \rangle\}.$ <p>1. Podle vztahu (1a) platí:</p> $A_1 = \int_0^1 dx \int_1^2 e^{2x+3y} dy = \int_0^1 dx \int_1^2 e^{2x} e^{3y} dy = \int_0^1 e^{2x} dx \left[ \frac{e^{3y}}{3} \right]_1^2 =$ $= \int_0^1 e^{2x} \left( \frac{1}{3} e^6 - \frac{1}{3} e^3 \right) dx = \frac{1}{3} e^3 (e^3 - 1) \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{3} e^3 (e^3 - 1) \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 =$ $= \frac{1}{3} e^3 (e^3 - 1) \frac{1}{2} (e^2 - 1) = \frac{1}{6} e^3 (e^3 - 1) (e^2 - 1).$ <p>2. Podle vztahu (1b):</p> $A_1 = \int_1^2 dy \int_0^1 e^{2x+3y} dx = \int_1^2 dy \int_0^1 e^{2x} e^{3y} dx = \int_1^2 e^{3y} \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 dy =$ $= \int_1^2 e^{3y} \left( \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \int_1^2 e^{3y} dy = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \left[ \frac{1}{3} e^{3y} \right]_1^2 =$ $= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \left( \frac{1}{3} e^6 - \frac{1}{3} e^3 \right) = \frac{1}{6} e^3 (e^3 - 1) (e^2 - 1).$	
7	<p><b>Příklad 2:</b></p> <p>Vypočtěte integrál <math>A_2 = \iint_D (2x - 4y) dx dy, \quad D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 3 \rangle, y \in \langle -1, 1 \rangle\}.</math></p> <p>Podle vztahu (1a) platí:</p> $A_2 = \int_1^3 dx \int_{-1}^1 (2x - 4y) dy = \int_1^3 dx \left[ 2xy - 2y^2 \right]_{-1}^1 = \int_1^3 dx [2x - 2 - (-2x - 2)] =$ $= \int_1^3 4x dx = \left[ 2x^2 \right]_1^3 = 2 \cdot 9 - 2 \cdot 1 = 7.$ <p>Stejný výsledek získáte i použitím vztahu 1b).</p>	R 2
8	<p>Obecně nezáleží na pořadí integrace, tedy na tom, který ze vztahů (1a, 1b) použijeme. V některých případech ale daný dvojrozměrný integrál může být snadno řešitelný jedním způsobem, druhý způsob však může být komplikovaný v závislosti na tvaru integrované funkce.</p>	S 3
9	<p><b>Příklad 3:</b></p>	R 3

	Vypočtete integrál $A_3 = \iint_D \frac{2x}{3y} dx dy$ , $D = \{(x, y) : x \in \langle 1, 3 \rangle, y \in \langle 1, 2 \rangle\}$ .						
	Podle vztahu (1a) platí:						
	$A_3 = \int_1^3 dx \int_1^2 \frac{2x}{3y} dy = \frac{2}{3} \int_1^3 dx \int_1^2 x \frac{1}{y} dy = \frac{2}{3} \int_1^3 dx \int_1^2 x \ln y  dy =$ $= \frac{2}{3} \int_1^3 dx [x \ln 2 - x \ln 1] = \frac{2}{3} \int_1^3 x(\ln 2 - \ln 1) dx = \frac{2}{3} (\ln 2 - 0) \int_1^3 x dx$ $= \frac{2}{3} \ln 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{3} \ln 2 \cdot (9 - 1) = \frac{8}{3} \ln 2.$						
	Stejný výsledek získáte i použitím vztahu 1b).						
	<b>O Dvojnásobný integrál</b>	VrSk=1	VrPov=P	VrBod=1	VrVyh=P	<b>O</b>	<b>1</b>
	Jaké je obecně pořadí výpočtu jednotlivých integrálů v dvojnásobném integrálu funkce $f(x, y)$ ?						
				<b>OBod</b>	<b>OTyp</b>	<b>OSpr</b>	<b>OPor</b>
	Nejprve počítáme vnější integrál, pak teprve vnitřní.			<b>0</b>	<b>Vnm</b>	<b>N</b>	
	Na pořadí nezáleží.			<b>0</b>		<b>N</b>	
	Nejprve počítáme vnitřní integrál, pak teprve vnější.			<b>1</b>		<b>A</b>	
10	Oba integrály počítáme současně.			<b>0</b>		<b>N</b>	
	<b>U Dirichletova věta</b>	VrSk=2	VrPov=P	VrBod=3	VrVyh=P	<b>U</b>	<b>1</b>
	Převeďte dvojný integrál funkce $f(x, y) = x + y$ na obdélníku $D = \langle 1, 3 \rangle \times \langle -2, 4 \rangle$ na dvojnásobný integrál.						
				<b>OBod</b>	<b>OTyp</b>	<b>OSpr</b>	<b>OPor</b>
	$\int_1^3 dx \int_{-2}^4 (x + y) dy$			<b>1</b>	<b>Vnm</b>	<b>A</b>	
	$\int_1^3 x dx \int_{-2}^4 y dy$			<b>0</b>		<b>N</b>	
	$\int_1^3 x dx + \int_{-2}^4 y dy$			<b>0</b>		<b>N</b>	
	$\int_1^3 (x + y) dx \int_{-2}^4 dy$			<b>0</b>		<b>N</b>	
	$\int_{-2}^4 y dy \int_1^3 x dx$			<b>0</b>		<b>N</b>	
11	$\int_{-2}^4 dy \int_1^3 (x + y) dx$			<b>1</b>		<b>A</b>	

## 5 Závěr

Tvorba personalisovaných e-learningových výukových opor je časově náročná. Výhodou je, že v rámci záměru vytvořili řešitelé formulář, do kterého se jednotlivé části učebních materiálů vepisují, viz [2].

Adaptibilní výukové materiály, které sestavuje virtuální učitel studentovi podle jeho schopností na míru, jsou cennou učební pomůckou. Podle mého názoru ji ocení především dvě skupiny studentů.

- a) Studenti, jejichž cílem je udělat zkoušku s minimem námahy, a proto nejsou ochotni danému předmětu věnovat příliš mnoho času a studovat mnohostránková skripta.
- b) Studenti, kteří mají v daném předmětu nižší úroveň vstupních znalostí, případně pomaleji daný předmět chápou, je pro ně obtížný.

## Literatura

- [1] KOSTOLÁNYOVÁ, K.: *Teorie adaptivního e-learningu*. OU, s. 118, Ostrava 2012, ISBN 978-80-7464-014-8.
- [2] ŠARMANOVÁ, J. – KOSTOLÁNYOVÁ, K.: *Tvorba adaptivních e-learningových opor*. OU, s. 48, Ostrava 2012.
- [3] BURDA, P. – DOLEŽALOVÁ, J.: *Matematika III. Skriptum VŠB-TU, Ostrava 2006, ISBN 80-248-1195-2.*
- [4] [www.studopory.vsb.cz](http://www.studopory.vsb.cz)

# Jedna charakterizace lineárně nezávislých funkcí

Jaroslav Drobek

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava  
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava-Poruba  
e-mail: jaroslav.drobek@vsb.cz

**Abstrakt.** Je známo, že z řádků matice  $\mathbf{A}$  typu  $n \times m$ , kde  $n \geq m$ , lze sestavit regulární matici řádu  $m$  právě tehdy, když sloupce matice  $\mathbf{A}$  jsou lineárně nezávislé vektory. Dokážeme zobecnění tohoto tvrzení představující charakterizaci lineárně nezávislých funkcí uvažovaných na libovolné podmnožině množiny komplexních čísel  $\mathbb{C}$ .

Symbolem  $\mathbf{o}_m$  budeme označovat nulový vektor v  $m$ -rozměrném vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^m$ .

**Definice 1.** Nechtě  $m, n \in \mathbb{N}$ . Vektory  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$  jsou *lineárně nezávislé*, jestliže pro libovolný vektor  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m$  má rovnost

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = \mathbf{o}_n$$

za následek rovnost

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T = \mathbf{o}_m.$$

**Definice 2.** Nechtě  $m \in \mathbb{N}$ . Funkce  $g_1, \dots, g_m$  uvažované na množině  $M \subset \mathbb{C}$ , jsou *lineárně nezávislé nad tělesem*  $\mathbb{R}$ , jestliže pro libovolný vektor  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m$  má identita

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(z) = 0, \quad z \in M,$$

za následek rovnost

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T = \mathbf{o}_m.$$

*Poznámka 1.* Lineární nezávislost jediné funkce, řekněme  $g_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ , nad tělesem  $\mathbb{R}$  je možno charakterizovat prostřednictvím podmínky „ $g_1$  je nenulová“. Je-li totiž  $g_1$  lineárně nezávislá a předpokládáme-li současně, že je nulová, potom pro libovolné  $\lambda_1 \neq 0$  platí

$$\lambda_1 g_1(z) = 0, \quad z \in M,$$

načež z lineární nezávislosti plyne, že  $\lambda_1 = 0$ , což je spor, a tedy  $g_1$  je nenulová. Naopak, je-li  $g_1$  nenulová, tj. existuje-li  $z_1 \in M$  takové, že  $g_1(z_1) \neq 0$ , potom z identity

$$\lambda_1 g_1(z) = 0, \quad z \in M,$$

musí plynout  $\lambda_1 = 0$ , neboť v opačném případě by platilo  $\lambda_1 g_1(z_1) \neq 0$ , což by byl spor. To ovšem znamená, že  $g_1$  je lineárně nezávislá.

Následující lemma je intuitivně jasné. Není nám však známo, že by v literatuře byla dokázána jeho netriviální část.

**Lemma 1.** Necht  $m \in \mathbb{N}$  a  $g_1, \dots, g_m$  jsou reálné funkce uvažované na množině  $M \subset \mathbb{C}$ . Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) funkce  $g_1, \dots, g_m$  jsou lineárně nezávislé nad tělesem  $\mathbb{R}$ ,
- (ii) existují body  $z_1, \dots, z_m \in M$  takové, že matice

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} g_1(z_1) & \cdots & g_m(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(z_m) & \cdots & g_m(z_m) \end{bmatrix} \quad \text{je regulární.}$$

*Důkaz.* Implikaci (i) $\Rightarrow$ (ii) dokážeme indukcí podle  $m \in \mathbb{N}$  ve třech krocích:

I. Necht  $m = 1$  a funkce  $g_1$  je lineárně nezávislá nad  $\mathbb{R}$ . Na základě poznámky 1 existuje bod  $z_1 \in M$  takový, že  $g_1(z_1) \neq 0$ , načež matice  $\mathbf{A}_1$  je regulární.

II. Předpokládejme, že implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) platí pro nějaké  $m > 1$ .

III. Dokažme platnost implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) pro  $m + 1$  sporem:

Necht  $g_1, \dots, g_{m+1}$  jsou lineárně nezávislé nad  $\mathbb{R}$  a matice  $\mathbf{A}_{m+1}$  je singulární pro libovolnou volbu bodů  $z_1, \dots, z_{m+1} \in M$ . Zřejmě  $g_1, \dots, g_m$  jsou lineárně nezávislé nad  $\mathbb{R}$  a podle předpokladu existují body  $z_1, \dots, z_m \in M$  takové, že matice  $\mathbf{A}_m$  je regulární. Pro každé  $j \in \{1, \dots, m + 1\}$  zavedme vektor

$$\mathbf{a}_j = [g_j(z_1), \dots, g_j(z_m)]^T.$$

Zřejmě vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  představují sloupce matice  $\mathbf{A}_m$  a existuje jediný vektor  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m$  splňující

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{m+1}.$$

Uvažujme nyní libovolný bod  $z \in M$ . Podle předpokladu je matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} g_1(z_1) & \cdots & g_m(z_1) & g_{m+1}(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_1(z_m) & \cdots & g_m(z_m) & g_{m+1}(z_m) \\ g_1(z) & \cdots & g_m(z) & g_{m+1}(z) \end{bmatrix}$$

singulární. Pro každé  $j \in \{1, \dots, m + 1\}$  zavedme ještě vektory

$$\mathbf{b}_j = [g_j(z_1), \dots, g_j(z_m), g_j(z)]^T$$

představující sloupce matice  $\mathbf{B}$ .

Ukažme nejdříve, že vektory  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  jsou lineárně nezávislé: Jestliže pro vektor  $[\nu_1, \dots, \nu_m]^T \in \mathbb{R}^m$  platí

$$\sum_{j=1}^m \nu_j \mathbf{b}_j = \mathbf{o}_{m+1},$$

potom pro každé  $i \in \{1, \dots, m\}$  platí

$$\sum_{j=1}^m \nu_j g_j(z_i) = 0,$$

a tedy

$$\sum_{j=1}^m \nu_j \mathbf{a}_j = \mathbf{o}_m.$$



Protože  $\mathbf{a}_j$  jsou, coby sloupce regulární matice  $\mathbf{A}_m$ , lineárně nezávislé vektory, plyne z poslední rovnosti, že

$$[\nu_1, \dots, \nu_m]^T = \mathbf{o}_m.$$

Vektory  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  jsou tedy skutečně lineárně nezávislé.

Vektory  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{m+1}$  ovšem lineárně nezávislé nejsou, neboť jsou sloupce singulární matice  $\mathbf{B}$ . Potom existuje nenulový vektor  $[\mu_1, \dots, \mu_{m+1}]^T \in \mathbb{R}^{m+1}$  takový, že

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j \mathbf{b}_j = \mathbf{o}_{m+1}.$$

Navíc  $\mu_{m+1} \neq 0$ . V opačném případě by totiž platilo

$$\sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{b}_j = \mathbf{o}_{m+1},$$

odkud bychom na základě lineární nezávislosti vektorů  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  dostali

$$[\mu_1, \dots, \mu_m]^T = \mathbf{o}_m$$

a vektor  $[\mu_1, \dots, \mu_{m+1}]^T$  by byl nulový.

Rovnost (2) je tedy ekvivalentní s rovností

$$(3) \quad \sum_{j=1}^m -\frac{\mu_j}{\mu_{m+1}} \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{m+1},$$

odkud speciálně

$$\sum_{j=1}^m -\frac{\mu_j}{\mu_{m+1}} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{m+1}.$$

Ale protože soustava (1) má jediné řešení, a to  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$ , musí být

$$\lambda_j = -\frac{\mu_j}{\mu_{m+1}}, \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

což umožňuje přepsat (3) ve tvaru

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{m+1} = \mathbf{o}_{m+1}.$$

Přítom srovnáním posledních složek této vektorové rovnosti dostáváme

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(z) - g_{m+1}(z) = 0.$$

Tím jsme završili důkaz identity

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(z) - g_{m+1}(z) = 0, \quad z \in M.$$

Současně ovšem

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_m, -1] \neq \mathbf{o}_{m+1},$$

a tedy funkce  $g_1, \dots, g_{m+1}$  nejsou lineárně nezávislé, což je spor.

Tím je důkaz indukci zakončen.

Důkaz implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) je triviální:

Nechť platí (ii) a  $z_1, \dots, z_m \in M$  jsou takové body, pro něž je matice  $\mathbf{A}_m$  regulární. Nechť pro vektor  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T \in \mathbb{R}^m$  platí identita

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(z) = 0, \quad z \in M.$$

Potom speciálně pro každé  $i \in \{1, \dots, m\}$  platí

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(z_i) = 0,$$

odkud

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{a}_j = \mathbf{o}_m.$$

Protože  $\mathbf{a}_j$  jsou, coby sloupce regulární matice  $\mathbf{A}_m$ , lineárně nezávislé vektory, plyne z poslední rovnosti, že

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T = \mathbf{o}_m.$$

□

Pokud budeme předpokládat, že  $M$  je konečná podmnožina množiny  $\mathbb{R}$ , bude právě dokázané lemma představovat běžně používané tvrzení zmíněné v abstraktu.

Motivace zabývat se zobecněním tohoto tvrzení vznikla v souvislosti s analýzou řešitelnosti soustav lineárních algebraických rovnic generovaných metodou hraničních prvků v komplexní proměnné ([1]).

#### REFERENCE

- [1] J. Drobek: *Význam integrálu Cauchyho typu o po částech lineární hustotě ve vývoji komplexní metody hraničních prvků*. Disertační práce, Olomouc, 2011.
- [2] L. Jokl: osobní konzultace.

# KRUŽNICOVÝ OBLÚK V ŠTRUKTÚROVANÝCH SIEŤACH

Alexej Kolcun

Ústav geoniky AV ČR, v.v.i.  
Studentská 1768, 708 00 Ostrava-Poruba  
E-mail : [alexej.kolcun@ugn.cas.cz](mailto:alexej.kolcun@ugn.cas.cz)

**Abstrakt:** Štruktúrovanou sieťou rozumieme diskretizáciu priestoru, ktorá vznikne lokálnym posunom uzlov pravidelnej mriežky a rozdelením takto vzniknutej štvoruholníkovej siete pomocou jednej z uhlopriečok na trojuholníky. V príspevku popisujeme metódy generovania štruktúrovaných sietí pre geometriu obsahujúcu časti kružnicových oblúkov.

**Abstract:** The structured mesh is created from regular rectangular mesh using the local displacement of the nodes and dividing the tetragons to triangles by one of the diagonals. In the presented article the method of generation of structured mesh when the discretized geometry obtains the circular arcs is described.

## 1. Úvod

V súčasnej dobe generátory MKP sietí spravidla využívajú diskretizačné schémy s výslednou neštruktúrovanou sieťou – napr. [2], [6]. Z druhej strany, oblúbe sa tešia metódy diskretizácie, ktoré vychádzajú z pravidelnej pravouhlej štvoruholníkovej siete, napr. [1], [3], [7]. Dôvodom je niekoľko: detailná rozpracovanosť parametrického modelovania kriviek a plôch [1] dovoľuje priamo prepojiť CAD systémy používané pre návrh geometrie a automatickú manipuláciu s ňou, s numerickou analýzou. Nezanedbateľným aspektom je i tradícia, keď v prácach zameraných hlavne na samotnú numerickú analýzu, je preferovaný jednoduchší spôsob delenia priestoru a použitie jednoduchších dátových štruktúr i na úkor efektívnosti (z hľadiska geometrie) výslednej diskretizácie.

Hlavnou nevýhodou pravidelných sietí je problém lokálneho zjemnenia. Pravidelná štruktúra susednosti uzlov siete vedie k tomu, že jemnú diskretizáciu musíme použiť i v miestach, kde to numerická analýza nevyžaduje. Toto vedie k nárastu počtu uzlov a elementov výslednej siete. Riešením je použitie napr. multigrídových prístupov. To ale vedie k dodatočným nárokom na samotný modelovací prístup.

V niektorých situáciách však i pravidelné siete dovoľujú elegantne a efektívne zvládnuť lokálne zjemnenie.

## 2. Kružnicový oblúk v rámci štruktúrovaných sietí

Typickým geometrickým prvkom v úlohách podzemného staviteľstva je kružnica, resp. jej časť (vrt, tunelový tubus).

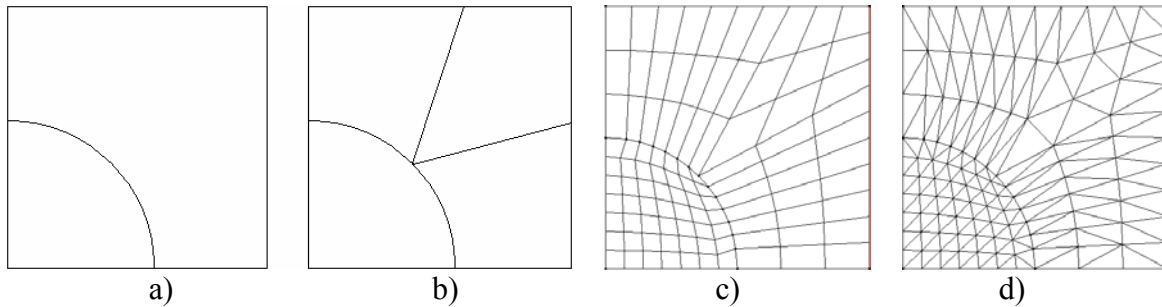
Obmedzíme sa na 2D aproximáciu. Uvažuje sa spravidla obdĺžniková oblasť dostatočnej veľkosti s rovnomernou diskretizáciou na hranici, pričom jemnosť diskretizácie na vonkajšej a vnútornej časti hranice môže byť rôzna. Vzhľadom na riešené úlohy vyžadujeme

i diskretizáciu v oblasti prázdneho priestoru. Symetria dovoľuje obmedziť sa len na modelovanie štvrtiny kružnicového oblúka – Obr.1a).

## 2.1 Parametrické modely

Štandardný prístup vychádzajúci z parametrického modelovania spočíva v nasledujúcom:

1. celú oblasť rozdelíme na štyri podoblasti obr. 1b),
2. vyznačené indexové línie nahradíme kružnicovými oblúkmi,
3. pre ostatné línie použijeme vhodnú interpoláciu (modelovacie systémy používajú interpolácie založené na neuniformných B-spline aproximačných krivkách).

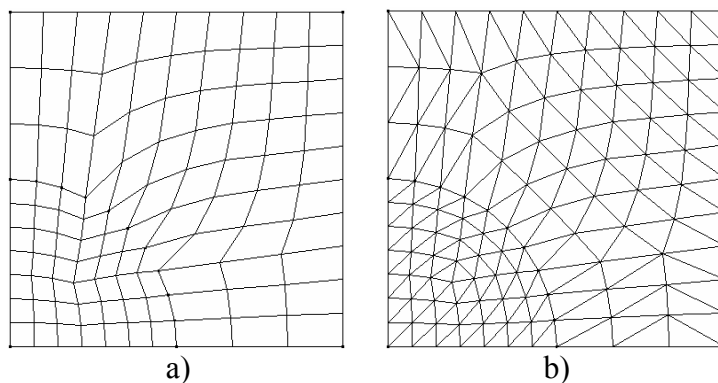


Obr. 1. Parametrické generovanie siete.

Vidíme, Obr. 1c)–d), že podmienka rovnomerného delenia siete na vonkajšej a vnútornej hranici spravidla vedie k artefaktu v okolí diagonály, ktorý je tým výraznejší, čím väčší je rozdiel jemnosti delenia na vonkajšej a vnútornej hranici.

## 2.2 Aktívne diagonály

Vyššie uvedený nepriaznivý jav je možné eliminovať inou stratégiou generovania sietí, keď k vyjadreniu požadovanej geometrie aktívne využijeme nielen indexové línie štrukturovaných sietí Obr. 2a), ale aj uhlopriečky štvoruholníkových elementov – Obr. 2b).



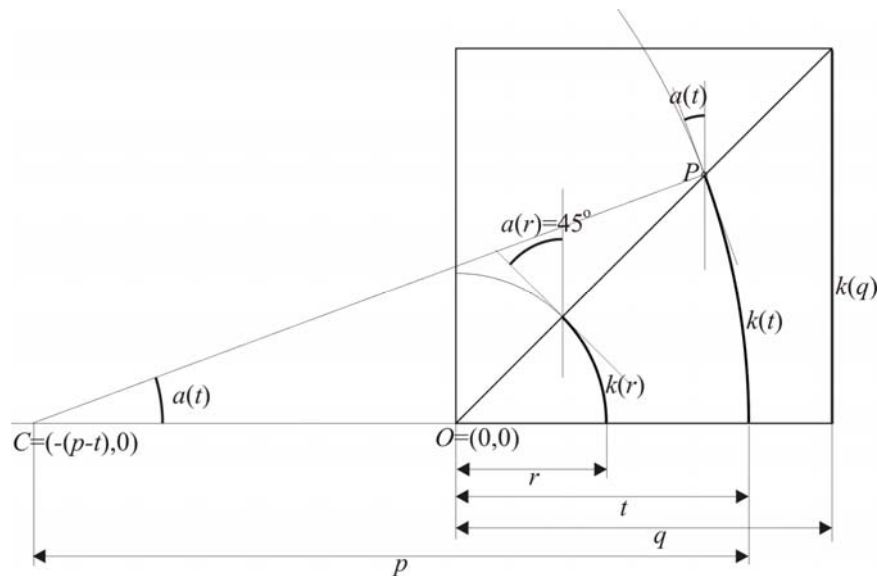
Obr. 2. Štrukturovaná triangulácia s aktívnymi diagonálami.

Tento spôsob vedie v 2D k dobrým výsledkom [5], určité problémy však môžu nastať v prípade potreby dodatočnej modifikácii siete (zmena indexovej osnovy, požiadavka riadenej kontroly postupného zahustenia siete). V 3D je zdrojom problémov fakt, že pre niektoré konfigurácie povrchových uhlopriečok kvádra neexistuje jeho rozklad na štvorsteny [4].

Ukážeme, že k uspokojivému výsledku možno dospieť i bez použitia aktívnych diagonál.

### 2.3 Uhlová interpolácia

Nech je daná štvorcová oblasť veľkosti  $q$ . Pre generovanie štrukturovanej siete s kružnicovou geometriou použijeme nasledujúci spôsob interpolácie – Obr. 3.



Obr. 3. Interpolácia indexových línií pomocou kružnicových oblúkov.

Medzi východným kružnicovým oblúkom  $k(r)$  o polomere  $r$  a koncovou hranou štvorca  $k(q)$ <sup>1</sup> generujeme časť indexovej línie ako časť kružnicového oblúka

$$K[C, p] = K[(-(p-t), 0), p]: (x + (p-t))^2 + y^2 = p^2, \quad (1)$$

ktorý pre zvolenú hodnotu  $x = t$

1. prechádza bodom  $(t, 0)$ ,
2. pretína uhlopriečku pod uhlom  $\frac{\pi}{4} + \alpha(t)$ , kde

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{4} \frac{q-t}{q-r}, \quad r \leq t \leq q. \quad (2)$$

Ináč povedané to znamená, že uhol pod ktorým kružnica pretína uhlopriečku uvažovanej štvorcovej oblasti je lineárnou interpoláciou medzných hodnôt  $\pi/2$  a  $\pi/4$ , ktoré dosahujeme v medzných prípadoch kriviek  $k(r)$  a  $k(q)$ .

Bod  $P$  definuje hranicu kruhového výseku uhlu  $\alpha(x)$  kružnice (1) – Obr. 3, preto

$$\begin{aligned} x_P &= p \cos(\alpha(t)) - (p-t) \\ y_P &= p \sin(\alpha(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

Vzhľadom na to, že bod  $P$  je na diagonále, tj.  $x_P = y_P$ , z (3) dostávame

$$p \cos(\alpha(t)) - (p-t) = p \sin(\alpha(t)),$$

<sup>1</sup> V tejto konštrukcii chápeme systém kružníc tak, že v limitnom prípade  $k(q)$  je časť kružnice s nekonečným polomerom.

tj.

$$p = \frac{t}{1 + \sin(\alpha(t)) - \cos(\alpha(t))}. \quad (4)$$

Pre body na diagonále máme

$$x = y = p \sin \alpha = t \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}, \quad r \leq t < q, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \frac{q-t}{q-r}. \quad (5)$$

Substitúcia  $\omega = (t-r)/(q-r)$ ,  $\lambda = (\pi/4)\omega$ , dáva

$$\begin{aligned} t &= r + \omega(q-r) \\ \alpha &= (\pi/4)(1-\omega) = \pi/4 - \lambda \end{aligned}$$

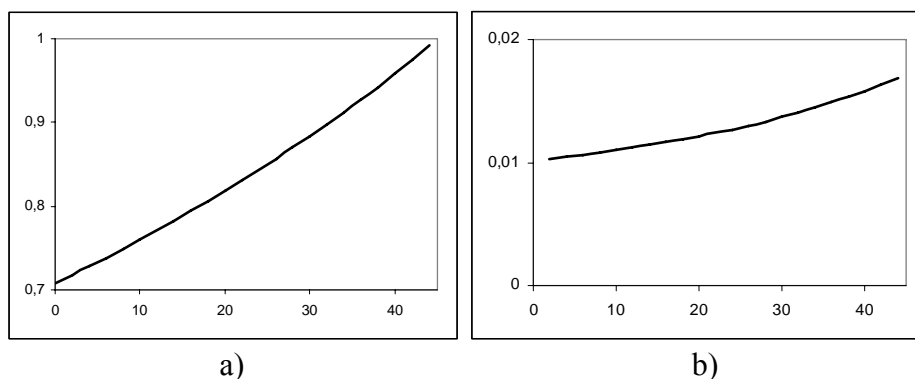
Dosadením do (5) dostávame výsledný tvar

$$\begin{aligned} x(\omega) = y(\omega) &= (r + \omega(q-r)) \frac{\sin(\pi/4 - \lambda)}{1 + \sin(\pi/4 - \lambda) - \cos(\pi/4 - \lambda)} \\ &= (r + \omega(q-r)) \frac{\frac{\cos \lambda - \sin \lambda}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{\cos \lambda - \sin \lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\cos \lambda + \sin \lambda}{\sqrt{2}}} \\ &= (r + \omega(q-r)) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \lambda - \sin \lambda}{1 - \sqrt{2} \sin \lambda} \\ &= (r + \omega(q-r)) K(\lambda) \end{aligned} \quad (6)$$

kde

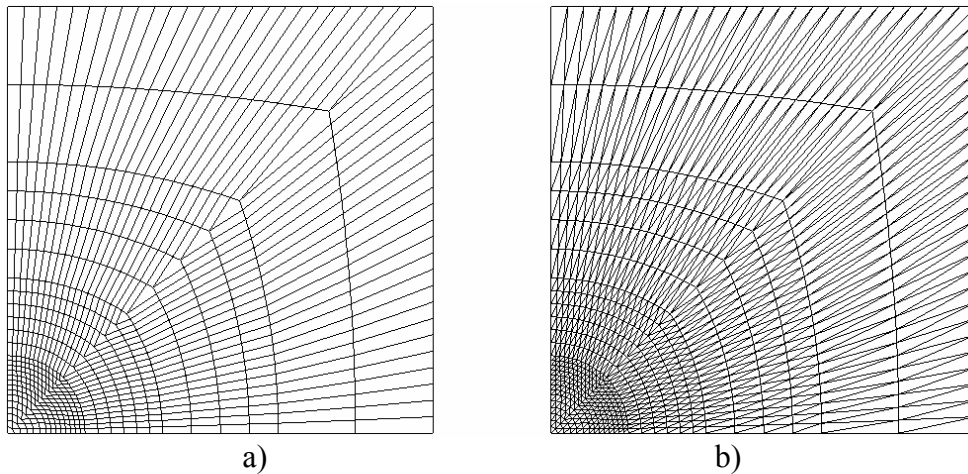
$$K(\lambda) = \frac{\cos \lambda - \sin \lambda}{\sqrt{2} - 2 \sin \lambda}, \quad 0 \leq \omega < 1, \quad \lambda = \frac{\pi}{4} \omega. \quad (7)$$

Znamená to, že pri rovnomernom náraste súradnice na horizontálnej hrane štvorca sa súradnica na diagonále mení úmerne s funkciou  $K(\lambda)$  (7). Obr. 4 ilustruje túto závislosť.



Obr. 4. a) Priebeh funkcie  $K(\lambda)$ . b) Priebeh derivácie  $K'(\lambda)$ .

Vzhľadom na konvexitu a monotónnosť funkcie  $K(\lambda)$  vyplýva, že pre rovnomerný nárast súradnice na horizontálnej osi odpovedajúce si body na diagonále sa budú vzájomne vzdďaľovať. Takto generovanú sieť ilustruje Obr. 5.



Obr. 5. Generovanie reálnej siete s uhlovou interpoláciou kružníc. Sieť sa generuje v oblasti  $y < x$ . Pre oblasť  $y > x$  je využitá symetria. a) Štvoruholníková sieť, b) triangulácia.

### 3. Podďakovanie

Tento článok vznikol s podporou projektu RVO:68145535.

### Literatúra

- [1] Farin, G.E.: *NURBS: from projective geometry to practical use*. A.K.Peters, 1999
- [2] George, P.L.: *Automatic Mesh Generation*. J. Willey 1991.
- [3] Knupp, P., Steinberg, S.: *Fundamentals of Grid Generation*, CRC Press Inc. 1994.
- [4] Kolcun, A.: *Preprocessing pre aplikáciu MKP v úlohách geomechaniky*. ÚGN AVČR, Ostrava 1999.
- [5] Kolcun, A.: Konvolučné vyhladzovanie štrukturovaných triangulácií, in: GCG 2007, sborník konference, Littera 2007, s.105-110.
- [6] Kolingerová, I.: *Rovinné triangulace*. ZČU Plzeň, 1999.
- [7] Piegl, L., Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer 1997.

# USE OF CREEPING TREND METHOD WITH HARMONIC WEIGHTS IN FORECASTING OF RADIATION HAZARD IN MINING AREAS – CASE STUDY

Zygmunt Korban

Wydział Górnictwa i Geologii, Politechnika Śląska

ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice, Polska, E-mail: [zygmunt.korban@polsl.pl](mailto:zygmunt.korban@polsl.pl)

Piotr Achtelek

Bytomski Zakład Usług Górniczych Sp. z o. o.,

ul Młodego Górnika 2b, 41-808 Zabrze, Polska, E-mail: [bzug@pub.pl](mailto:bzug@pub.pl)

**Abstract:** In forecasting of randomly proceeding phenomena or phenomena characterised by a great irregularity, models that quickly adapt to the occurring changes and thus minimise possible forecasting errors (the group of such methods includes, but is not limited to, the adaptation models) are used frequently. This article presents the possibilities of practical application of one of the adaptation methods, i.e. the creeping trend method with harmonic weights, in forecasting of radium isotope concentration level in surface water in areas where mine waters containing Ra-226 and Ra-228 are discharged.

## 1. Radiation hazard in mining areas – its essence and range

The risk of ionising radiation is one of the natural hazards that occur in the mining environment and, as such, is subject to periodic control according to the provisions in Annex 5 of the Regulation of the Minister of Economy of 28 June 2002 on occupational health and safety, operations and specialist fire protection in open cast mining companies extracting minerals through drill holes, as amended. This control should include the measurement of the potential alpha energy concentration of short-lived radon decay products in air ( $c_{\alpha}$ ), the measurement of the exposure to the external gamma radiation ( $\dot{K}$ ), the measurement of the total concentration of radium isotopes Ra-226 and Ra-228 in mine waters ( $c_{Raw}$ ) and the measurement of the total specific



activity of radium isotopes Ra-226 and Ra-228 in mine deposits ( $c_{Ra0}$ )<sup>1</sup>. From the monitoring of the work environment it can be determined that as much as 84% of the measurement results of the potential alpha energy concentration of short-lived radon decay products in air ranged from 0.41 to 2.5  $\mu J/m^3$ , max  $c_\alpha$  concentration was repeatedly exceeding 6.2  $\mu J/m^3$ , while in more than 50% of coalmines in the Upper Silesian Coal Basin the occurrence of the so-called radium-carrying mine waters, i.e. waters in which radium isotope concentration exceeded 1kBq/m<sup>3</sup>, was found. At the same time, the measurement results indicate that the risk of ionising radiation more and more often covers the areas around coalmines too. While in underground excavations the main source of the risk of ionising radiation is short-lived radon decay products, on the surface predominating is the risk resulting from the existence of radium isotopes in waters (areas of underflows and water reservoirs where mine waters with increased radium content<sup>2</sup> are discharged) [2], [4]. The problem is important to the extent that the total daily inflow of radium isotopes to the mining excavations in the area of the Upper Silesian Basin exceeds 1400 MBq (including radium isotope Ra-226 – approx. 725 MBq, and radium isotope Ra-228 – 700 MBq), out of which as much as 60% comes up to the surface then, resulting in environmental contamination. In addition, the concentration of radium isotopes in surface water is significantly affected not only by the amounts of mine water drops (which are oftentimes diverse) and values of  $c_{Raw}$  themselves, but also by the prevailing climatic conditions on the surface.

## 2. Adaptation models in forecasting and possibilities of their application

Due to the fact that most phenomena are either of random nature or characterised by a great irregularity, models that quickly adapt to the occurring changes and thus minimise possible forecasting errors are used frequently. This group includes the adaptation models, which describe the realisation of a variable in time and do not go into the cause and effect mechanism of the phenomenon itself and do not accept the permanence of the analytical form of the function. If the variable values show a certain trend and random fluctuations in these models, the variable is presented as a two-

---

<sup>1</sup> - only in 2007, more than 2900 measurements of the potential energy concentration of short-lived radon decay products, 123 measurements of individual gamma radiation doses, 390 analyses of mine water radioactivity and 141 measurements of mine deposit samples were carried out [3].

<sup>2</sup> - to a lesser extent, the problem concerns solid mine waste.

argument function:  $y_t = f_t(p_t, \xi_t)$ , where:  $p_t$  – trend,  $\xi_t$  – random component,  $t$  – time.

The accuracy of the forecast made based on the adaptation models depends on the number of pieces of information from the past used to obtain the current trend assessments, while the greater significance is held by the latest information (those concerning the periods more distant in time has less significance).

One of the basic adaptation methods of forecasting is the creeping trend method with harmonic weights [1]. The essence of determination of the creeping trend comes down to smoothing the time series consisting of  $n$  terms (a sufficiently long series is assumed the one with  $n > 10$ ). For the model construction algorithm, see fig. 1.

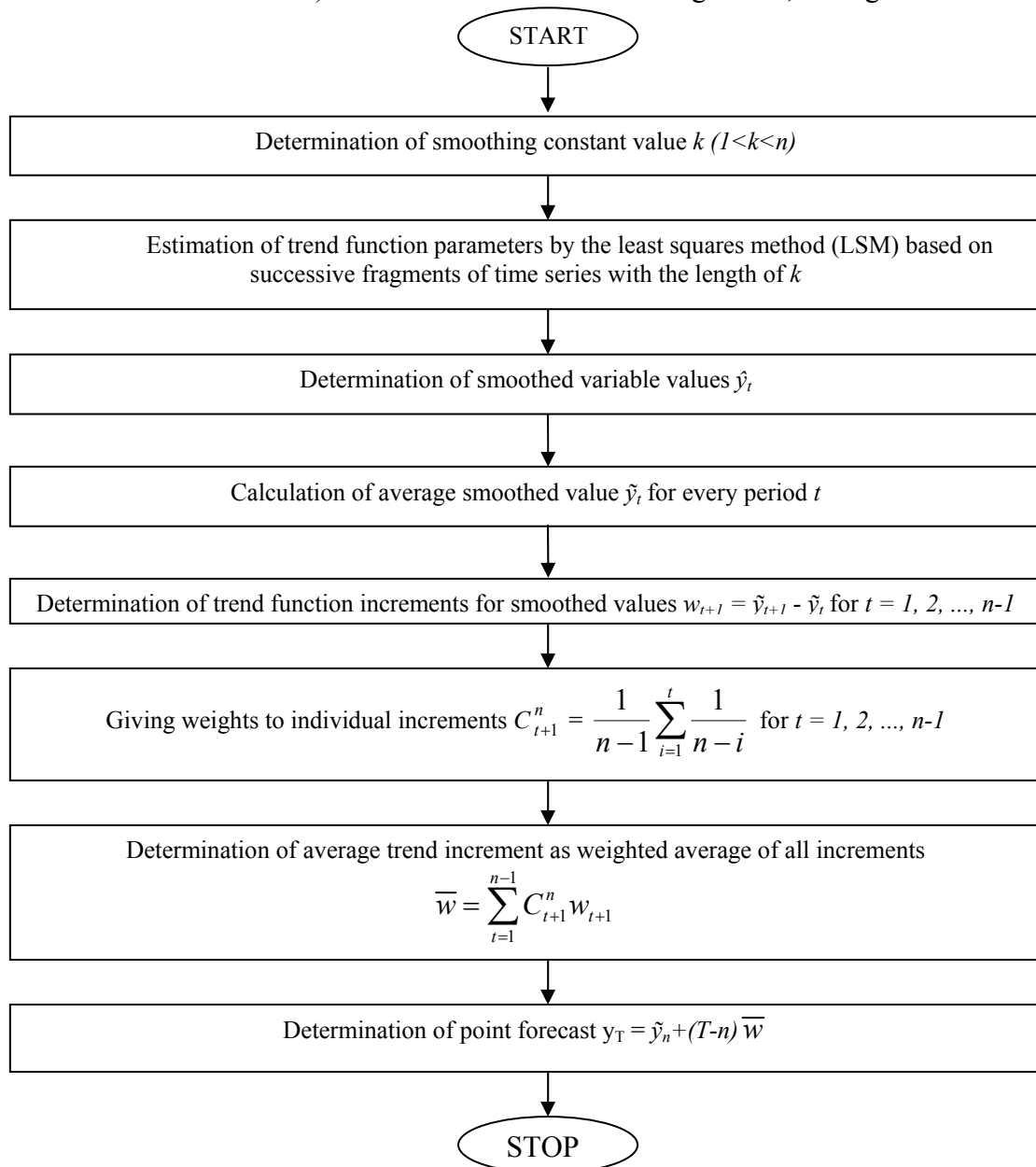


Fig. 1. Creeping trend method with harmonic weights – algorithm of proceeding

By assuming the smoothing constant value equal to  $k=4$  for the output data (fig. 2), we obtain 21 subsequences for which the segmented line trend equations are determined (tab. 1).

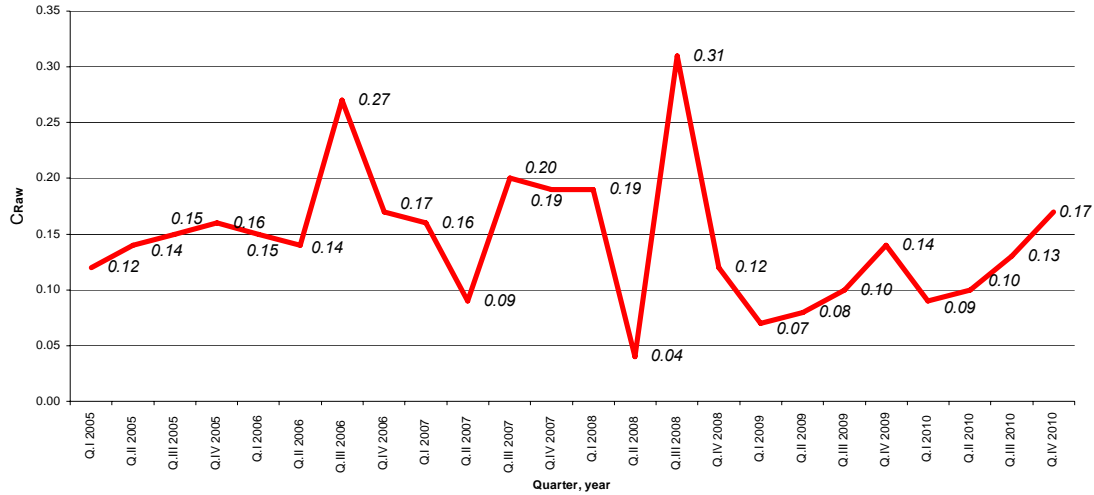


Fig. 2. Content of radium isotopes (Ra-226 and Ra-228) in the "X" River in the years 2005 - 2010

Segmentation of time series into subsequences with the length of  $k=4$

Tab.1.

Time interval from $t_i^*$ to $t_{i+4}$	Value of variable $y_i$				Segmented line trend equations
t=1, 2, 3, 4	0.12	0.14	0.15	0.16	$y_1(t) = 0.013t + 0.11$
t=2, 3, 4, 5	0.14	0.15	0.16	0.15	$y_2(t) = 0.004t + 0.14$
t=3, 4, 5, 6	0.15	0.16	0.15	0.14	$y_3(t) = -0.004t + 0.16$
t=4, 5, 6, 7	0.16	0.15	0.14	0.27	$y_4(t) = 0.032t + 0.1$
t=5, 6, 7, 8	0.15	0.14	0.27	0.17	$y_5(t) = 0.019t + 0.135$
t=6, 7, 8, 9	0.14	0.27	0.17	0.16	$y_6(t) = -0.004t + 0.195$
t=7, 8, 9, 10	0.27	0.17	0.16	0.09	$y_7(t) = -0.055t + 0.31$
t=8, 9, 10, 11	0.17	0.16	0.09	0.20	$y_8(t) = 0.002t + 0.15$
t=9, 10, 11, 12	0.16	0.09	0.20	0.19	$y_9(t) = 0.02t + 0.11$
t=10, 11, 12, 13	0.09	0.20	0.19	0.19	$y_{10}(t) = 0.029t + 0.095$
t=11, 12, 13, 14	0.20	0.19	0.19	0.04	$y_{11}(t) = -0.048t + 0.275$
t=12, 13, 14, 15	0.19	0.19	0.04	0.31	$y_{12}(t) = 0.021t + 0.13$
t=13, 14, 15, 16	0.19	0.04	0.31	0.12	$y_{13}(t) = 0.006t + 0.15$
t=14, 15, 16, 17	0.04	0.31	0.12	0.07	$y_{14}(t) = -0.01t + 0.16$
t=15, 16, 17, 18	0.31	0.12	0.07	0.08	$y_{15}(t) = -0.074t + 0.33$
t=16, 17, 18, 19	0.12	0.07	0.08	0.10	$y_{16}(t) = -0.005t + 0.105$
t=17, 18, 19, 20	0.07	0.08	0.10	0.14	$y_{17}(t) = 0.023t + 0.04$
t=18, 19, 20, 21	0.08	0.10	0.14	0.09	$y_{18}(t) = 0.007t + 0.085$
t=19, 20, 21, 22	0.10	0.14	0.09	0.10	$y_{19}(t) = -0.005t + 0.12$
t=20, 21, 22, 23	0.14	0.09	0.10	0.13	$y_{20}(t) = -0.002t + 0.12$
t=21, 22, 23, 24	0.09	0.10	0.13	0.17	$y_{21}(t) = 0.027t + 0.055$

\*- t=1  $\leftrightarrow$  Q.I 2005 year; t=2  $\leftrightarrow$  Q. II 2005 year; ..... t=24  $\leftrightarrow$  Q.IV 2010 year.

Summary smoothed values of the variable and the average values smoothed is shown in table 2.

Smoothed values of the variable and the average values smoothed

Tab. 2

t	$\hat{y}_{1t}$	$\hat{y}_{2t}$	$\hat{y}_{3t}$	$\hat{y}_{4t}$	$\hat{y}_{5t}$	...	...	$\hat{y}_{17t}$	$\hat{y}_{18t}$	$\hat{y}_{19t}$	$\hat{y}_{20t}$	$\hat{y}_{21t}$	$\tilde{y}_t$
1	0.123												0.123
2	0.136	0.148											0.142
3	0.149	0.152	0.148										0.150
4	0.162	0.156	0.144	0.228									0.173
5		0.160	0.140	0.260	0.230								0.198
...	...												...
...	...												...
20								0.500	0.225	0.020	0.080		0.206
21									0.232	0.015	0.078	0.622	0.237
22										0.010	0.076	0.649	0.245
23											0.074	0.676	0.375
24												0.703	0.703

The trend function increments  $w_{t+1}$  determined for smoothed values and the weights given to the individual increments  $c_{t+1}^n$  (tab. 3) allow the average trend increment of 0.081 to be calculated. Thus, based on the calculated values, it is possible to determine the point forecast for any period T (for example, for T= 25 the forecasted value of concentration of radium isotopes Ra-226 and Ra-228 in the said water course is 0.784 kBq/m<sup>3</sup>).

The summary of trend function increments  $w_{t+1}$  for smoothed values and weights of individual increments

Tab. 3

t	$w_{t+1} = \tilde{y}_{t+1} - \tilde{y}_t$	$c_{t+1}^n$	t	$w_{t+1} = \tilde{y}_{t+1} - \tilde{y}_t$	$c_{t+1}^n$
1	0.019	0.002	13	-0.118	0.035
2	0.008	0.004	14	-0.091	0.039
3	0.023	0.006	15	-0.125	0.044
4	0.025	0.008	16	0.024	0.050
5	0.015	0.010	17	0.041	0.056
6	-0.041	0.013	18	0.263	0.063
7	-0.050	0.015	19	0.024	0.072
8	-0.014	0.018	20	0.031	0.083
9	0.048	0.021	21	0.008	0.097
10	0.010	0.024	22	0.130	0.119
11	0.053	0.027	23	0.328	0.162
12	-0.030	0.031			

### 3. Conclusion

The radiation hazard (from ionising radiation) more and more often occurs not only in underground excavations, but also on the surface – in case of the first ones the main source of the risk is short-lived radon decay products, while for the latter it is radium isotopes in waters. Because of the random nature of the phenomenon (irregular drops (inflows) of mine waters and changing climatic conditions on the surface), it seems justified to use one of the basic adaptation methods, which is the creeping trend method with harmonic weights, for forecasting of  $c_{Raw}$  concentration in the surface water courses. Assuming the smoothing constant of  $k = 4$  for time series with the length of  $n=24$  (data from the years 2005-2010) allowed the seasonal incidence of climatic conditions prevailing on the surface to be taken into consideration.

### Reference

1. Hellwig Z.: Teoria prognozy z zastosowaniami ekonomicznymi. Wydawnictwo A.E., Wrocław 1977.
2. Lebecka J., Chałupnik S., Łukasik B., Wysocka M.: Monitoring and control of radioactive contamination of natural environment caused by mining activity. Proc. of Int. Conference Ecological Aspects of Underground Mining. Katowice, GIG, 1993.
3. Pr. zbiorowa pod red. Skowronka J.: Zagrożenia naturalnymi źródłami promieniowania jonizującego w przemyśle wydobywczym.. Główny Instytut Górnictwa. Katowice, 2007.
4. Zgadaj J., Skubacz K., Chałupnik S.: The influence of radon and its progeny emitted from exhaust shafts of coal mines on the contamination of the outdoor air. Proc. of International Conference Technologically Enhanced Natural Radioactivity-TENR '96. Katowice, GIG, 1996.

# MATEMATIKA NA VŠB V PŘÍBRAMSKÉM OBDOBÍ (1895–1945)

Jan Kotůlek

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava  
17. listopadu, 708 33 Ostrava-Poruba  
E-mail : [jan.kotulek@vsb.cz](mailto:jan.kotulek@vsb.cz)

**Abstrakt:** Výuka matematiky má na VŠB více než stoletou tradici. V tomto příspěvku analyzujeme snahy o zavedení výuky matematiky v Příbrami v kontextu přerodu školy z montánního učiliště na technickou vysokou školu. Velkou pozornost věnujeme pozadí politických událostí ovlivňujících jak chod školy, tak životy jejich zaměstnanců. Dále sledujeme především vývoj struktury stolic (kateder) a jejich personální obsazení, a to včetně příbuzných teoretických oborů, zejména fyziky a deskriptivní geometrie a neopomeneme připomenout významné osobnosti z řad jejich profesorů, zejména Josefa Theurera a Františka Čuříka.

**Abstract:** In this paper we analyze the process of incorporating mathematics into curricula of mining and metallurgy. We study it in the context of transformation from the old practical school into modern technical university. We also describe changes in the structure of chairs (departments), including related chairs for theoretical subjects, namely the chairs of physics and descriptive geometry and we focus on their eminent professors Josef Theurer and František Čuřík. We stress the political background involved in changes in the smooth running of VŠB and life of its employees.

## 1. Úvod

Od založení v roce 1849 zmítaly příbramskou báňskou školou<sup>1</sup> neustálé existenční problémy způsobené především soupeřením se sesterskou školou ve štýrském Leobenu. Bylo nutné projevit obrovskou trpělivost a vyjednávací talent, než se podařilo vybudovat plnohodnotnou technickou vysokou školu.

Jakmile se škola, etablovala, vypluly na povrch do té doby latentní národnostní spory. Profesorský sbor v čele s profesorem matematiky a fyziky Josefem Theurerem musel čelit snahám o přeložení školy do Ústí nad Labem nebo o připojení k pražské německé technice (*K. k. Deutsche Technische Hochschule in Prag*).

Po vzniku samostatné ČSR však pocítili profesori VŠB malost příbramské periferie a sami se usilovně (leč neúspěšně) snažili vyměnit příbramské provizorium za definitivní přeložení

---

<sup>1</sup> Ta byla založena jako Báňské učiliště, v roce 1865 povýšena na Báňskou akademii a teprve v roce 1904 získala jméno Vysoká škola báňská.

školy do Prahy. Využili k tomu každé vhodné příležitosti; za působení profesora matematiky a deskriptivní geometrie Františka Čuříka v rektorské funkci to bylo zejména jmenování prezidenta T. G. Masaryka čestným doktorem VŠB v roce 1924 a oslavy desetiletého výročí vzniku ČSR v roce 1928.

Ve víru složitých válečných okolností musela škola v roce 1939 přerušit svou činnost. Její profesori čerpali nucenou dovolenou a studenti byli většinou totálně nasazeni v průmyslových podnicích třetí říše. Po skončení války bylo příbramské období VŠB ukončeno příkazem „shora“ a škola byla i přes nesouhlas profesorského sboru přestěhována do Ostravy.

## 2. Matematika na VŠB za Rakouska-Uherska: nepřízeň vídeňské vlády

Prímá předchůdkyně VŠB byla v Příbrami založena již 23. 1. 1849 jako Báňské učiliště (*Montanische Lehranstalt*). Zároveň byla založena „sesterská“ škola ve štýrském Leobenu, ovšem narozdíl od ní bylo studium v Příbrami až do roku 1895 jen dvouleté (jeden rok kurs hornický a druhý rok kurs hutnický), orientované převážně prakticky. Jeho základem byla cvičení v laboratořích, kreslírňe a práce přímo v závodech. Tedy matematika se zde zatím nevyučovala, ovšem zájemci o báňské studium museli před přijetím absolvovat všeobecně-teoretické studium na některé univerzitě nebo technice v Habsburské monarchii: univerzitě ve Vídni, Praze, či Lvově nebo technice v Praze, Brně, či Štýrském Hradci.<sup>2</sup>

Na počátku 60. let byla výuka na báňských učilištích reorganizována. Byl vydán společný výukový plán, ve kterém se kladl důraz na teoretické a vědecké základy studia a který počítal se zřízením dvouletého přípravného kursu. Fakticky však bylo rozšířeno jen leobenské učiliště, v Příbrami musel být přípravný kurs zajištěn stávajícími silami. Kvůli naprostému nedostatku prostor však muselo být zavedení přípravného kursu v Příbrami odloženo. Podmínky pro rozšíření studia byly připraveny až v roce 1865, kdy byla příbramská škola skutečně povýšena na c. k. báňskou akademii (*k. k. Bergakademie*), ovšem pouze formálně: zřízení přípravného kurzu bylo totiž odloženo a o rok později dokonce zrušeno.<sup>3</sup> Z archivních dokumentů vyplývá, že tvrzení P. Šišmy „*přípravný dvouletý kurz na báňské akademii v Příbrami byl zřízen v roce 1861/62 a v prvním ročníku zde byla vyučována vyšší matematika*“,<sup>4</sup> a podobné tvrzení M. Bečvářové „*v Příbrami běžel obdobný dvouletý přípravný kurz jen v letech 1861/62 až 1865/66*“,<sup>5</sup> založená na citaci ze vzpomínkové monografie J. Hrabáka [6], jsou až příliš optimistické.

Následně prošla příbramská akademie krizí: výrazně klesl počet posluchačů a uvažovalo se o jejím zrušení, respektive přeložení do Vídně. Už bylo dokonce rozhodnuto o centralizaci báňské výuky a zřízení Ústřední vysoké školy báňské a hutní ve Vídni, zároveň bylo rozhodnuto vybudovat pro tuto školu novostavbu. Hospodářská krize v roce 1873 však zabránila realizaci těchto plánů.<sup>6</sup> Ovšem následovaly další pokusy o sloučení akademií včetně jejich přesunutí do Vídně: v roce 1901 byl návrh zdůvodňován poklesem významu příbramského revíru v důsledku snížení cen stříbra. Profesorský sbor argumentoval poukazem

---

<sup>2</sup> Nedalo se očekávat, že bude škola ihned kompletní technikou, byly totiž reorganizovány a rozšířeny výukové plány existujících polytechnik. Například v Praze byly zřízeny čtyři nové profesury: pro vyšší matematiku, deskriptivní geometrii, analytickou chemii a paleontologii (viz Velflík V.: *Dějiny technického učení v Praze*, I. díl (Praha 1906), s. 336, cit. via Majer [8], s. 85), a také byla založena nová technika v Brně viz Šišma [13], s. 11–14 a 52–55.

<sup>3</sup> Podrobněji viz Majer [8], s. 91–94.

<sup>4</sup> Šišma [13], s. 54.

<sup>5</sup> Bečvářová [1], s. 81.

<sup>6</sup> Srov. Majer [8], s. 102–105.

na 75% podíl českých zemí na veškeré báňské produkci monarchie a jako kompromisní řešení poprvé navrhl, aby byla škola přeložena z Příbrami do Prahy.<sup>7</sup>

Přes velmi rychlý hospodářský rozvoj českých zemí od druhé poloviny 70. let se situace na příbramské akademii zlepšovala jen pomalu. Profesorský sbor si musel své požadavky tvrdě vybojovat, opíral se přitom o četné intervence významných osobností, lokálních obchodních komor nebo hornických spolků. Jen stále ostřejší tón těchto proklamací pomáhal požadavky prosadit. K reformě báňského školství tak došlo až v 90. letech 19. století, a to v důsledku série důlních neštěstí. To vyprovokovalo vídeňskou vládu k přijetí tzv. zákona o závodních (*Betriebsleitergesetz*) v prosinci 1893. Zákon totiž zahrnoval požadavek na montánní vzdělání a praxi vedoucích úředníků ve státních, ale i v soukromých dolech, což zvýšilo zájem o báňské vzdělání. Vzhledem k přeplněnosti leobenského přípravného kursu bylo potřeba doplnit příbramskou báňskou akademii, aby se nápor studentů rozdělil mezi dvě školy.

Rozhodování vídeňské vlády v této situaci urychlila nabídka příbramské městské rady, která dala akademii bezplatně k dispozici budovu arcibiskupského studentského konviktu. Po její urychlené adaptaci byl v zimním běhu roku 1894 stávajícími silami (prof. V. Káš, prof. A. Hofmann a asistent L. Kirschner) provizorně realizován první ročník přípravného běhu. Následně byl dvouletý přípravný kurs prozatímně povolen a v zápětí byl akademii přiznán statut vysoké školy (od školního roku 1895/1896).<sup>8</sup>

### **Reorganizace školy v letech 1895–1904**

K doplnění příbramské akademie došlo na základě ministerského výnosu a také vydáním nového vysokoškolského statutu. Dosavadní učební plán se rozšířil o dva roky přípravného kursu, který kromě matematiky, fyziky, deskriptivní a praktické geometrie zahrnoval také technickou mechaniku, technické a situační kreslení, strojírenství, mineralogii, geologii, paleontologii a chemii. Dále byly zavedeny státní zkoušky a místo dosavadního ředitele vedl nově školu rektor volený profesorským sborem.

V osnovách byla vyšší matematika zastoupena 4 hodinami přednášek za týden v zimním i letním běhu (semestru) prvního ročníku. Přednášky byly doplněny cvičením v rozsahu dvou hodin týdně v zimním běhu a jedné hodiny týdně v letním běhu.<sup>9</sup> Fyzika byla zastoupena také 4 hodinami přednášek v zimním i letním běhu, ovšem bez cvičení,<sup>10</sup> deskriptivní geometrii byly věnovány 3 hodiny přednášek a 3 hodiny konstruktivních cvičení (opět v letním i zimním běhu).<sup>11</sup>

V souvislosti se zavedením přípravného kurzu byli jmenováni tři noví prozatímní docenti. Pro matematiku a fyziku jím byl tehdy 33-letý Josef Theurer, dříve asistent profesora Čenka Strouhala ve fyzikálním ústavu na pražské Karlo-Ferdinandově univerzitě, jedna

<sup>7</sup> Majer [8], s. 117.

<sup>8</sup> Majer [8], s. 112, Schenk [11], s. 4., Hrabák [6], s. 130–151. Přesné data se u jednotlivých autorů liší, situace proto není zcela jasná.

<sup>9</sup> Na programu byly „základy počtu diferenciálního a integrálního se zvláštním zřetelem k technicky důležitým problémům“, „rozvinování funkcí jedné a více proměnných v mocninové řady“, „extrémní a limitní hodnoty funkcí“, „užití analýzy k vyšetřování křivek rovinných a prostorových i křivých ploch.“ Dále „integrace nejdůležitějších diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu“, „analytická geometrie v prostoru“ nebo „základy sférické trigonometrie“, viz Theurer [15], s. 18.

<sup>10</sup> Na programu byla nauka o teple, nauka o záření, elektrofyzika, elektrodynamika a elektromagnetismus. Podrobněji viz Theurer [15], s. 18–19.

<sup>11</sup> Studenti se učili pracovat s různými ortogonálními projekcemi, zejména v kótovaném promítání a různých typech axonometrií. Studovaly se pravidelné mnohoúhelníky a mnohostěny, nauka o křivkách, kuželové, válcové, rotační a obalové plochy, průniky těles, střechy, vržené stíny a rýsování technických předmětů. Podrobněji viz Theurer [15], s. 20.



z nejméně výraznějších osobností VŠB v celé historii školy.<sup>12</sup> Prozatímním docentem pro deskriptivní a praktickou geometrii byl jmenován Josef Adamczik a třetím docentem byl August Harpf, který vyučoval chemii a průběhství.

Teprve po čtyřech letech provizoria, u příležitosti 50. výročí založení školy v roce 1899, byl přípravný kurs definitivně potvrzen.<sup>13</sup> Až tehdy byli Josef Theurer a Josef Adamczik jmenováni mimořádnými profesory (k 24. 11. 1899). Od 5. listopadu 1902 pak byli řádnými profesory.

Josef Theurer si rychle získal respekt profesorského sboru: pustil se do budování moderního fyzikálního ústavu (po vzoru svého učitele), dokázal využít zkušenosti ze zahraniční studijní cesty do Curychu k zavedení přednášek z elektrotechniky, a tím položil základy elektrotechnického ústavu. Podílel se také na chystané reformě učebních plánů, pro školní rok 1903/4 byl zvolen rektorem akademie. Dále přednášel pojistnou matematiku, pro vyšší ročníky zavedl přednášky z vektorové analýzy.

V červenci 1904 byl schválen nový statut školy,<sup>14</sup> který přinesl přejmenování akademie na Vysokou školu báňskou (*Montanische Hochschule*) a rozsáhlé změny ve výuce: posluchači již absolvovali jen jednu z větví, buď horní nebo hutní odbor (dvouletý) a museli složit dvě státní zkoušky: první po dvou letech z teoretických předmětů, druhou na konci studia ze svého oboru. Dále získala škola právo udělovat akademický titul doktora montánních věd (Dr. mont.).

Nový statut znamenal také zavedení struktury stolic (kateder), kterých bylo celkem 11. Matematika byla spojena s fyzikou, profesuru získal Josef Theurer, asistentem mu byl dr. Julius Suchý.<sup>15</sup> Další teoretickou stolicí byla Stolica deskriptivní geometrie a geodesie, kam byli jmenováni mimořádný prof. Josef Adamczik a asistent ing. Viktor Melnitzky, který suploval výuku ve školním roce 1906/7.<sup>16</sup> Poté byla stolice rozdělena a pro deskriptivní geometrii a stavitelství byl jmenován mimořádný profesor ing. Zdenko Josef Kral.<sup>17</sup>

### **Ve víru národnostních vášní (1904–1918)**

Když byl VŠB v roce 1904 přiznán statut plnohodnotné vysoké školy, byl jejím prvním rektorem s právem užívat titul Magnificence profesor matematiky a fyziky Josef Theurer (rektorem byl již od roku 1903 a rektor byl zpravidla ve funkci dva roky).<sup>18</sup> Znovu pak působil ve funkci rektora ještě v letech 1907–11, 1917–21, 1926–27, vždy ve zlomových okamžicích. Rektorská funkce byla sice více administrativní než v dnešní době (rektor měl totiž více méně jen předsedat zasedáním profesorského sboru a realizovat jeho usnesení), ale Theurer byl obrovskou autoritou, zejména protože dokázal řešit neshody a spory, což se ukázalo být velmi důležitou vlastností.

Statutem z roku 1904 se VŠB definitivně zařadila do systému vysokých škol a přestalo hrozit její zrušení. Situace se ovšem neuklidnila. Na povrch totiž vypluly do té doby latentní národnostní spory, a to nejen mezi zaměstnanci školy, studenty a občany Příbrami, ale i uvnitř

<sup>12</sup> Jeho osobnosti zatím nebyla v literatuře věnována dostatečná pozornost. Nejlepším zdrojem informací je velmi čtivě napsaný medailon z pera Josefa Fryše (Fryš [3], s. 56–73). Vzhledem k místy až oslavnému tónu a chybějícímu vědeckému aparátu jde však spíše o pokus připomenout Theurerovu osobnost, opravdu zevrubný a především kritický pohled zatím chybí.

<sup>13</sup> Došlo k tomu císařským rozhodnutím z 28. září 1899, viz Theurer [15], s. 6.

<sup>14</sup> Otiskl jej Theurer [15], s. 25–30.

<sup>15</sup> Theurer [15], s. 308.

<sup>16</sup> Josef Adamczik totiž na počátku školního roku 1906/7 odešel na německou techniku do Prahy, viz Theurer [15], s. 60.

<sup>17</sup> Ten se stal roku 1911 řádným profesorem a působil v Příbrami až do roku 1919, kdy také odešel na německou techniku do Prahy, viz Theurer [15], s. 309–310.

<sup>18</sup> Za dary montánních spolků v Praze a Plzni pořídil zlatý rektorský řetěz s přívěsnou medailí, na které byly vyobrazeny hornické symboly a podobizna císaře Františka Josefa I., viz Schejbal [10], s. 19.

profesorského sboru. Tyto spory se nejostřeji projevíly ve čtyřech pokusech o přestěhování školy, tzv. „překládacích akcích“ z let 1909–1917,<sup>19</sup> kdy musel Josef Theurer v čele českých profesorů VŠB odrazit snahy o přeložení školy do Ústí nad Labem nebo o připojení k německé technice v Praze. K pochopení situace je potřeba upozornit, že na VŠB byla převaha českých studentů i profesorů,<sup>20</sup> ovšem jako úřední, vyučovací a dorozumívací řeč byla používána němčina. Mimo školu, v Příbrami a v báňských závodech příbramského revíru, byla také český mluvícího obyvatelstva většina.

První pokus o přestěhování VŠB začal 30. ledna 1909 novinovou kampaní v denním tisku. Příbram byla kvůli neexistenci německého školství a kultury, ale zejména kvůli tomu, že „obyvatelstvo jest nepřátelského smýšlení proti všemu německému“ označena za město pro studenty VŠB nevhodné, němečtí studenti měli být napadáni a všemožně bojkotováni a jedinou pomocí mělo být přeložení školy do některého z německých měst v severních Čechách.<sup>21</sup>

Druhý pokus (v listopadu 1912) vznikl kvůli jmenování nových profesorů, z nichž byli dva Češi a dva Němci. Jako záminka posloužila drobná pouliční rvačka českých a německých studentů po tzv. skoku přes kůži. V tisku se mluvilo o „krvavých excesech“ na půdě školy, ale celá kauza byla rychle smetena ze stolu.

Na počátku roku 1914 publikoval profesor deskriptivní geometrie a stavitelství Zdenko Josef Kral návrh na rozdělení školy na německou a českou část a přeložení německé části (včetně knihovny a veškerých sbírek) do Ústí n. L. nebo Mostu.<sup>22</sup> Když to nevyšlo, navrhl na schůzi profesorského sboru v březnu 1914 přiřazení obou částí VŠB k české, resp. německé technice v Praze. Věc se dostala až na ministerstvo veřejných prací, které však trvalo na zachování samostatnosti vysokých škol báňských. Začátek války pak učinil všechny tyto pokusy bezpředmětnými.

Podle Theurera přinesla však nejprudší spory až čtvrtá „překládací akce“ z roku 1917. Na návrh brněnské německé techniky měly být báňské akademie zrušeny a připojeny k technikám nebo dokonce jen k jediné technice, a to vídeňské.<sup>23</sup> V zápětí propukl další velký spor, a sice o volbu nového rektora. Němečtí profesori požadovali, aby se v rektorské funkci střídal profesor český a německý, ovšem spojili tento oprávněný požadavek s několika dalšími pro české profesory nepřijatelnými požadavky, a tak spor trval celý podzim 1917.<sup>24</sup>

Pod vlivem neustále se opakujících snah o přestěhování VŠB nedocházelo v Příbrami k rozšiřování prostorových kapacit a prováděly se jen nejnutnější opravy stávajících budov. To jen zvyšovalo pocit provizornosti dosavadního řešení a snižovalo chuť profesorů (zejména pro odborné předměty) opravdově budovat svůj obor ve stávajících poměrech.

---

<sup>19</sup> O těchto sporech jsme detailně informováni díky pamětnímu spisu *Památník Vysoké školy báňské v Příbrami za leta od 1899 do 1924* z pera očitého svědka a aktéra těchto událostí Josefa Theurera, viz Theurer [15], s. 75–86, 97–100, 108–120 a 126–132. Památník je důležitým pramenem pro poznání situace na VŠB, je ale v těchto partiích zcela pochopitelně tendenční.

<sup>20</sup> Poměrné zastoupení německých studentů však postupně rostlo, ze zhruba pětiny počtu českých studentů na počátku 20. století až na zhruba dvě třetiny počtu českých studentů těsně před první světovou válkou. Přesné počty srov. např. Theurer [15], s. 357–359. V profesorském sboru měli Češi jen velmi těsnou většinu a před válkou se poměr dokonce nakrátko vyrovnal (Theurer [15], s. 113).

<sup>21</sup> Viz Theurer [15], s. 75–86. Ústrky, na které si němečtí studenti stěžovali, byly někdy až úsměvné. Například se na bojkotu měli podílet i státní úředníci, kteří „deputativně hrozili kavárníkům abstinencí budou-li odebírat německé časopisy,“ *Die deutschen Montanhochschüler in Przibram*, *Prager Tageblatt*, 10. 2. 1909, cit. via Theurer [15], s. 76.

<sup>22</sup> Z. J. Kral, *Die Przibrämer Hochschulfrage*, *Deutsche Hochschulstimmen aus der Ostmark* 6 (1914) (3–4), 5. února 1914, cit. via Theurer [15], s. 108.

<sup>23</sup> Theurer [15], s. 126 a Šebesta [12], s. 284.

<sup>24</sup> Theurer [15], s. 132–166.

### 3. VŠB za první republiky: snahy o přestěhování do Prahy

Již den po vyhlášení samostatnosti, 29. 10. 1918, zasedal profesorský sbor. Profesori VŠB se pokusili využít změny politické situace k výměně příbramské periferie a provizorního umístění školy v pronajatých budovách za definitivní přeložení školy (se zachováním plné samostatnosti) do Prahy. Vydali proto *Pamětní spis, obsahující požadavky českých profesorů v příčině budoucího upravení této školy*.<sup>25</sup> To se však setkalo s nesouhlasem příbramské městské rady, ale především s nesouhlasem ministerstva školství a národní osvěty,<sup>26</sup> proto se požadavek na přestěhování stále opakuje při každé vhodné příležitosti až do roku 1938.

Rektorem byl až do roku 1921 Josef Theurer, který „r. 1918 a 1919 vypracoval takřka sám (se 2 kolegy pouze) celou reorganizaci vysoké školy báňské s vynaložením všech sil svých a nezbaje nebezpečí přepracování; výsledkem bylo zřízení nových stolic, rozšíření a specialisování přednášek, a last not least to, že zavedena veskrze vyučovací řeč česká.“<sup>27</sup>

Jako úřední řeč byla čeština zavedena velmi rychle, ovšem vyučovacím jazykem, stejně jako jednacím jazykem zasedání profesorského sboru byla prozatím ponechána němčina.<sup>28</sup> Český vyučovací jazyk pak byl zaveden výnosem ministerstva školství a národní osvěty z 11. srpna 1919. Až do školního roku 1922/23 však existovaly paralelní německé přednášky a navíc byl na německé technice v Praze zřízen dvouletý přípravný běh.<sup>29</sup>

Zmíněná reorganizace se projevila ve výuce od školního roku 1919/1920. Hornický a hutnický kurs se oddělily již od prvního ročníku, a to s přepracovanými osnovami. Při reorganizaci stolic (přitom přibylo 6 profesur) se fyzika osamostatnila (profesorem byl nadále Josef Theurer, adjunktem dr. Václav Šebesta a pomocnou silou Jan Makarius) a matematika byla sloučena s deskriptivní geometrií. Stolicí obdržel nově jmenovaný mimořádný profesor František Čuřík (1876–1944),<sup>30</sup> jeho asistenty byli Jaroslav Boháč a Pavel Potužák. Stolice geodesie byla připojena k důlnímu měřičství.<sup>31</sup>

Asistenti se ale v krátkých intervalech (zhruba po dvou až čtyřech letech) měnili, asistentské místo totiž nepřinášelo ani existenční jistotu ani velkou naději na služební postup.<sup>32</sup>

Roku 1924 vstoupil v platnost nový výukový program, ve kterém se projevil kvalitativní skok ve vývoji báňských věd. J. Majer upozornil na to, že: „v té době doznaly prvního uplatnění matematické metody v hornictví, analytická geometrie prostoru i sférická

<sup>25</sup> Krom samotného přesunutí školy požadovali zejména vhodnou budovu v Praze, dotace na knihovnu, sbírky a laboratoře, doplnění stolic a úpravu studijního plánu. Spis otiskl Theurer [15], s. 184–192.

<sup>26</sup> Pod které byla škola přičleněna až 28. 11. 1918. Profesorský sbor VŠB proti tomu podal ostrý protest, škola byla totiž tradičně (již od založení) spravována ministerstvem, do jehož působnosti spadalo hornictví a hutnictví. Za Rakouska-Uherska to bylo vídeňské ministerstvo orby a od 15. 11. 1918 pražské ministerstvo veřejných prací, viz Theurer [15], s. 183 nebo Čuřík [2], s. 477. Schejbal [10], s. 21 není zcela přesný.

<sup>27</sup> Šebesta [12], s. 284.

<sup>28</sup> Rektor Theurer si byl vědom velkých komplikací, které by přineslo okamžité a úplné zavedení češtiny, ovšem zdůraznil také vůli „šetřiti národních citů svých německých kolegů“, Theurer [15], s. 176nn.

<sup>29</sup> Schejbal [10], s. 21, Čuřík [2], s. 477

<sup>30</sup> Čuřík byl dříve profesorem c. k. státní průmyslové školy v Praze a asistentem na c. k. České vysoké škole technické v Praze. V letech 1908–9 (po smrti profesora A. Pánka) suploval jeho výuku matematiky a na asistentském místě zůstal až do konce první světové války, viz Bečvářová [1], s. 45. Od srpna 1919 byl ředitelem Střednej priemyselnej školy spojovej techniky v Banskej Bystrici. Dne 13. ledna 1920 byl jmenován mimořádným profesorem matematiky a deskriptivní geometrie na VŠB. Dekretem prezidenta republiky z 18. července 1921 pak byl jmenován profesorem řádným, viz Archiv VŠB, F. Čuřík, osobní složka.

<sup>31</sup> Theurer [15], s. 308–310.

<sup>32</sup> Proto se asistenti snažili získat mnohem prestižnější a lépe placená místa středoškolských profesorů. Tak to udělal například také pozdější profesor VŠB Václav Štěpánský, viz níže pozn. 40.

*trigonometrie, v technických fyzikálních oborech zejména statika a technická aerodynamika,...*<sup>33</sup> Učební osnova z matematiky doznala na první pohled jen drobných změn, ovšem zdvojnásobil se počet hodin cvičení,<sup>34</sup> tedy i hloubka probírané látky. Navíc byla do třetího ročníku zařazena přednáška z počtu vyrovnávacího, neboli metody nejmenších čtverců. Profesori VŠB také postupně vydávali pro své přednášky učebnice v češtině, učebnice pro vyšší matematiku napsal prof. ing. dr. František Čuřík.<sup>35</sup>

Profesorský sbor stále (a oprávněně) považoval umístění školy za provizorium: ve většině budov byla VŠB jen v nájmu, mnohé z nich nevyhovovaly a situace se zlepšovala jen velmi pomalu.<sup>36</sup> V roce 1924 byl jmenován president T.G. Masaryk čestným doktorem VŠB. Přestože byl v té době rektorem prof. Čuřík, roli slavnostního řečníka při promoci převzal prof. Theurer. Ve své řeči opět zopakoval požadavek na přestěhování do Prahy, a to jako samostatné školy mimo ČVUT. Přitom argumentoval nejen stísněností prostor a celkově nevyhovujícím stavem budov, ale i úpadkem příbramského dolování. Nakonec připomenul, že již byly dokonce zahájeny přípravy k projektu stavbu nové budovy VŠB v Praze-Dejvicích.

Stěhování bylo s poukazem na ostrý nesouhlas příbramské městské rady stále odsouváno. Jednou z dalších příležitostí k prosazení přestěhování – vzhledem k blížící se hospodářské krizi poslední opravdu reálnou příležitostí – byly oslavy 10. výročí vzniku ČSR a o několik měsíců později oslavy 80. výročí založení VŠB. V té době byl opět rektorem prof. Čuřík, který mimo jiné propagoval přeložení VŠB v odborném tisku.<sup>37</sup>

Příbramská městská rada vždy argumentovala špatnou hospodářskou situací ve městě, dokládala jak vzorně se o školu stará, upozorňovala na nákladnost projektu stěhování a výstavby nové budovy a konečně nabízela také investice k dobudování stávajících budov VŠB. Finanční náročnost nakonec rozhodla o odložení celé akce na neurčito, a to i přes týdenní stávkou posluchačů VŠB. Poslední náznak pokusu o přeložení do Prahy proběhl v roce 1933, kdy působila na Příbramsku tzv. *úsporná komise*, která se mj. zabývala možností připojení VŠB k ČVUT. To však nebylo únosné ani pro příbramské radní, ani pro profesory VŠB. Navíc by se stěhováním nešetřilo, ale naopak by to znamenalo velké výdaje.<sup>38</sup>

Za hospodářské krize prudce poklesl počet posluchačů VŠB, a to zejména v prvních ročnících. Zhoršila se sociální situace studentů, kteří si krom školného museli platit zkušební taxy, vložné do laboratorních cvičení, povinné exkurze a další. Naštěstí fungovalo mnoho stipendijních fondů, ze kterých mohli výborní, ale méně majetní studenti čerpat.<sup>39</sup> Úsporná opatření se tvrdě dotkla také asistentkých míst a platů asistentů.<sup>40</sup> Navíc se zhoršily možnosti uplatnění absolventů VŠB. Profesorský sbor těžce nesl, že německé správy horních a hutních společností dávaly přednost inženýrům německé národnosti, kteří vystudovali ve Freibergu,

<sup>33</sup> Majer [8], s. 124. Analytická geometrie a sférická trigonometrie však byly v osnovách již od roku 1895, viz např. Theurer [15], s. 18.

<sup>34</sup> Theurer [15], s. 18 a 267.

<sup>35</sup> Čuřík připravil druhé vydání svých starších učebnic *Základy vyšší matematiky*, díl I. (Česká matice technická, Praha: 1923<sub>2</sub>) 149 s., díl II. *Počet integrální* (Česká matice technická, Praha: 1918, 1930<sub>2</sub>) 176 s. a učebnici *Počet vyrovnávací: Methoda nejmenších čtverců v nauce a užití* (Česká matice technická, Praha, 1936) 248 s.

<sup>36</sup> Tak tomu bylo například u dvakrát za sebou přestěhovaných hutnických laboratoří: „*Náprava bude zjednána projektovanou provizorní budovou hutnických laboratoří, jež má býti postavena u hřbitova; avšak přes jednání 1½ roku trvající nebylo dodnes hnuto motykou,*“ Čuřík [2], s. 478.

<sup>37</sup> Např. Hornickém věstníku a hornických a hutnických listech, viz namátkou Čuřík [2].

<sup>38</sup> Celý průběh sporů podrobně sledoval Hofmann [5]. Srov. také dobové komentáře v Theurer [15] a Čuřík [2].

<sup>39</sup> Jednalo se především o Masarykův stipendijní fond, Theurerův a Havránkův fond, Hrabákův exkurzní fond, Studentské nadání profesorského sboru VŠB, fond Správního sboru báňských a hutních inženýrů nebo fondy Svazu čs. horních a hutních inženýrů, viz Schejbal [10], s. 27.

<sup>40</sup> V té době vyměnil asistentké místo na VŠB za místo prozatímního profesora na reálném gymnáziu v Jaroměři také pozdější profesor matematiky na VŠB Václav Štěpánský (1905–1980), viz Schejbal [10], s. 141–142 nebo Archiv VŠB, Václav Štěpánský, osobní výkaz.

Leobenu nebo Šoproni. Profesori VŠB se proto snažili bránit nostrifikaci jejich diplomů, ale také udržovat a pěstovat užší vztahy s Francií a kontakty v rámci Malé dohody.<sup>41</sup>

Vývoj VŠB za první republiky tedy rozhodně nebyl idylický. Náladu v profesorském sboru můžeme odušit z omluvenky profesora obecného strojíctví Václava Cibuše, který svou nepřítomnost na schůzi sboru 5. února 1935 omlouvá takto: „*Jsem již delší dobu nemocen a musím se varovati co možná nejvíce každého rozčilení, o jaké ve schůzích našich bývá téměř vždy postaráno.*“<sup>42</sup>

## 4. Specifika vývoje VŠB v letech 1938–1945

Mnichovským diktátem z 29. září 1938 byla Československu sebrána významná část průmyslově bohatých pohraničních území. Profesori VŠB museli proto obhajovat právo školy na existenci v okleštěné republice bez velké části dolů a průmyslových závodů, na druhou stranu se ale také pokusili využít změny poměrů k prosazení přestěhování do Prahy.<sup>43</sup> Věřili totiž, že získají budovy po německých školách (počítali totiž s jejich přesunem do tzv. zabraného území, nejspíše Liberce). K ničemu takovému ovšem nakonec nedošlo a výuka ve školním roce 1938/39 proběhla v Příbrami.

Začátkem listopadu 1939 si škola připomínala 90 let své existence, oslavy výročí však vzhledem k začátku války a pražským demonstracím nemohly proběhnout. Školní rok 1939/1940 sice na počátku října relativně normálně začal, ovšem výuka byla záhy přerušena. Dne 28. 10. 1939, při výročí vzniku republiky, totiž došlo k demonstracím proti okupaci. Ty byly potlačeny jen za cenu několika mrtvých. Při pohřbu Jana Opletala 15. 11. 1939 došlo k dalším demonstracím a provokacím. O dva dny později, 17. 11. 1939 toho okupační správa využila, obsadila české vysoké školy a prozatímne je na tři roky uzavřela.<sup>44</sup> Do konce roku 1939 mohli však zaměstnanci VŠB docházet do školy. Mnozí z nich projeví osobní statečnost při záchraně knihovního fondu, některých přístrojů a části zásob platiny.

Při obsazování kolejí vysokých škol byli podle předem připraveného plánu zatýkáni vytipovaní vůdci studentů, zejména představitelé studentských spolků a funkcionáři politických stran. Celkem bylo zatčeno více než tisíc studentů. V Příbrami však byla situace specifická. Zaprvé tam nebyly koleje, které by mohly jednotky SS obsadit, zadruhé byla VŠB jedinou školou ležící „na periferii“, a toho okupanti bohužel dokonale využili. Vzhledem k tomu, že se do Příbrami včas nedostaly informace o zatýkání, mohli 17. listopadu ráno prostě předvolat vedení školy a 15 studentských funkcionářů spolků Ostravan, Prokop, Carbonie, Elipsa a Spolku posluchačů hutního inženýrství na okresní hejtmanství. Vedení školy tam bylo informováno o uzavření VŠB, studenti byli zatčeni a odvezeni do pankrácké věznice v Praze. Později byli převezeni do Drážďan a nakonec uvězněni v koncentračním táboře Sachsenhausen. Na základě opakovaných přímluv prezidenta Háchy byli studenti postupně propouštěni, první z nich již před Vánoci 1939, poslední až v roce 1943.

<sup>41</sup> O politickém rozhledu profesorů svědčí diskuse o programu plánovaných exkurzí v roce 1938, kdy prof. Čuřík varuje před exkurzí do německých dolů, viz ZA Opava, fond VŠB, Zápisy ze schůzí prof. sboru, rok 1938, inv. č. 19, ale také volba čestných doktorů VŠB. V únoru 1938 obdrželi doktorát presidenti ČSR E. Beneš a Francie A. Lebrun, který byl vzděláním montanista. Ti měli podpořit kontakty na Francii a např. usnadnit absolventům uplatnění v zahraničí, viz Schejbal [10], s. 34.

<sup>42</sup> ZA Opava, fond VŠB, Zápisy ze schůzí prof. sboru, rok 1934–35, inv. č. 16.

<sup>43</sup> Viz provolání profesorů VŠB z 19. 10. 1938 otištěné např. v Schejbal [10], s. 36.

<sup>44</sup> K průběhu 17. listopadu 1939 existuje bohatá literatura (J. Leikert, T. Pasák, J. Gebhart, a další), viz např. Leikert J.: *Černý pátek sedmnáctého listopadu* (UK, Praha, 2001). Šorfová [14], s. 74–79, líčí specifika situace studentů VŠB bez kritického odstupu od politických proklamací, navíc s drobnými chybami. Srov. také Velfl J.: 17. listopad 1939 na Vysoké škole báňské v Příbrami, in: *Sborník symposia Hornická Příbram ve vědě a technice* (Příbram 1989) s. 23–34.

Po uzavření českých vysokých škol byli profesori starší 65 let penzionováni, mladší profesori byli odesláni na dovolenou s čekatelným, docenti a asistenti byli umístěni na středních školách nebo ve výrobní praxi. Studenti se snažili najít si zaměstnání, aby se vyhnuli totálnímu nasazení v Říši.

Od počátku roku 1944 sloužila škola válečnému výzkumu, její budovy a vybavení bylo dáno k dispozici výzkumnému ústavu podniku Waffunion-Skoda-Brünn GmbH,<sup>45</sup> který byl založen již v říjnu 1942, ale jeho zprovoznění se protahovalo. Ústav se zabýval vývojem raketových zbraní a zaměstnával také mnoho Čechů, mezi nimi i bývalé zřizovatele a profesory VŠB. Jediný profesor matematiky ing. dr. F. Čuřík zvolil raději 7. 6. 1944 sebevraždu, než aby se zapojil do spolupráce s fašisty.<sup>46</sup>

## 5. Závěr: přesun do Ostravy

Profesorský sbor VŠB v Příbrami, který se sešel již dne 24. 5. 1945, poprvé po šesti letech, ihned začal s nezbytnými přípravnými pracemi k zahájení vysokoškolských přednášek ve všech školních ročnících v co nejkratší době. Zápis studentů proběhl ve dnech 4.–6. 6. 1945, zápis nových studentů do prvního studijního ročníku nebyl však tehdy prozatím proveden.<sup>47</sup>

Dne 11. 6. měl začít zkrácený letní semestr. Prvořadým úkolem bylo doplnit profesorský sbor, zejména v odborných hornických specializacích. Tím byl pověřen prof. dr. J. Jičínský. V konkursu na místo uprázdněné smrtí prof. Čuříka uspěl Milan Mikan (1892–1968), který byl k 1. 10. 1945 jmenován profesorem matematiky a deskriptivní geometrie a přednostou ústavu.<sup>48</sup> Jeho asistentem se stal dr. Václav Štěpánský.<sup>49</sup>

Podle usnesení čs. vlády a na základě dekretu prezidenta republiky z 8. 9. 1945 byla VŠB přeložena z Příbrami do Moravské Ostravy.<sup>50</sup> Profesorský sbor proti tomu protestoval (a zopakoval požadavek na přestěhování do Prahy), ale rozhodnutí ministra Z. Nejedlého zvrátit nemohl. Profesori byli nakonec donuceni podepsat, že s přesunem souhlasí, ale na nátlak kolegů hlasují proti.<sup>51</sup>

Zápis studentů do prvního ročníku byl proveden již v Ostravě, a to 18.–20. 10. 1945. Výuka zimního semestru studijního roku 1945/1946 byla v Ostravě zahájena v listopadu 1945. Celkově studovalo 170 posluchačů hutnického a 251 posluchačů hornického oboru, jednalo se o nejvyšší počet studentů v dosavadní historii školy.

---

<sup>45</sup> To byla holdingová společnost Škodových závodů v Plzni, brněnské zbrojovky, Optikotechny a později také Explosie sdružená v rámci koncernu Reichswerke Hermann Göring, viz Pajer [9], s. 155.

<sup>46</sup> Pajer [9], s. 158. Na mnoha místech bývá chybně uvedeno, že ústav vyvíjel rakety V2. Naopak šéf příbramského výzkumu Rolf Engel byl oponentem vojenského velitele Peenemünde Waltera Dornbergera, který raketu V2 dokončil.

<sup>47</sup> Schenk [11], s. 9.

<sup>48</sup> V roce 1928 byl na ČVUT promován doktorem technických věd, v roce 1933 se tam habilitoval a o rok později mu byla habilitace přenesena i na Karlovu univerzitu. Po uzavření vysokých škol působil na Vyšší průmyslové škole v Praze 16, viz konkursní řízení na místo profesora matematiky, Archiv VŠB, Zápisy ze schůzí prof. sboru, rok 1945–46, inv. č. 21 nebo Havlíček [4].

<sup>49</sup> Viz Schejbal [10], s. 141, 153–155, nebo nekrolog Lániček J.: Za profesorem Václavem Štěpánským, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 26 (1981), s. 52–53. Je zajímavé, že se Štěpánský až do března 1950 své pozice středoškolského profesora nevzdal (archiv VŠB, V. Štěpánský, osobní výkaz, s. 6). Díky bohatému materiálu v archivu VŠB budeme jeho osobnosti věnovat pozornost v dalším připravovaném článku. Obraz, který můžeme získat z literatury je totiž potřeba doplnit a zpřesnit.

<sup>50</sup> Dekret prezidenta republiky č. 69/1945 ze dne 8. září 1945 o přeložení vysoké školy báňské z Příbramě do Moravské Ostravy. Sbirka zákonů a nařízení ČSR, částka 31 ze dne 20. 9. 1945, č. 69, s. 117, k dispozici online, viz <http://aplikace.mvcr.cz/sbirka-zakonu/ViewFile.aspx?type=c&id=31>

<sup>51</sup> Archiv VŠB, Zápisy ze schůzí prof. sboru, rok 1945–46, inv. č. 21.

Hodnocení přesunu VŠB do Ostravy dlouho podléhalo politické objednávce, například v inventáři k fondu VŠB z roku 1962 se píše: „*Je velkou zásluhou KSČ a jejich vedoucích činitelů, že objevili v Ostravě skvělé perspektivy pro další rozvoj VŠB a správně odhadli, že v Ostravě lze nejlépe zajistit přiblížení školy dolům a hutním provozům a zabezpečit, aby budoucí báňští inženýři co nejvíce vycházeli z rodin horníků a hutníků.*“<sup>52</sup> Ostrava bylo jistě větší město než Příbram, mělo moderní doly a hutě, studenti tam mohli žít „v sepečetí s rodinami dělníků“, šlo však o rozhodnutí politické, nikoliv systematické. Také bylo totálně nepřipravené a prodloužilo provizorium, ve kterém se VŠB nacházela, o dalších třicet let. Nakonec se ještě zvýšila vzdálenost VŠB od centra a dodnes je vnímána jako škola na periferii, což vadilo profesorům VŠB již v roce 1918.

Na druhou stranu VŠB většinu těchto problémů překonala a velmi se zasloužila o rozvoj regionu. V tomto ohledu se situace stále zlepšuje, a proto můžeme na změnu sídla VŠB v roce 1945 nazírat jako na velmi dobrou investici do rozvoje moravskoslezského regionu.

## Prameny a literatura

- [1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita 1848–1918*. (Matfyzpress, Praha, 2008) 360 s.
- [2] Čuřík F.: Vysoká škola báňská v prvním desetiletí republiky, *Hornický věstník a hornické a hutnické listy* **10** (1928) (41) 477–479.
- [3] Fryš J.: Josef Theurer, in: *Dvanáct osudů dvou staletí* (Příbram, 2006), s. 56–73.
- [4] Havlíček K.: Šedesát pět let profesora Milana Mikana, *Časopis pro pěstování matematiky* **82** (1957) 497–499.
- [5] Hofmann G.: Snahy o přeložení VŠB do Prahy ve 20. a 30. letech 20. století, in: *Symposium pracovníků báňského průmyslu Hornická Příbram ve vědě a technice. Sekce Tradice těžby příbramského rudního revíru* (Praha, 1978) s. 179–189.
- [6] Hrabák J.: *Gedenkbuch zur Feier des fünfzigjährigen Bestandes der k. k. Bergakademie Příbram 1849 bis 1899* (Verlag der k. k. Bergakademie, Příbram, 1899) 265 s.
- [7] Lukaščík J.: K dějinám vysokého báňského školství v našich zemích – Vysoká škola báňská v Ostravě, In: R. Jirkovský a kol.: *110 let Vysoké školy báňské v Ostravě* (b.m.v, b.r.v., cca 1959). 70 s.
- [8] Majer J.: *Z dějin Vysoké školy báňské v Příbrami* (Příbram, 1984) 252 s.
- [9] Pajer M.: K vývoji a výrobě raketových zbraní v Příbrami v letech druhé světové války, *Podbrdsko* **13** (2006), s. 155–164.
- [10] Schejbal C. a kol.: *Historie a současnost báňského školství v českých zemích*. (Blesk, Ostrava 1996).
- [11] Schenk J.: *125. výročí založení Vysoké školy báňské v Příbrami 1849–1974*. (Příbram 1974) 16 s.
- [12] Šebesta V.: Prof. Dr. Josef Theurer, *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* **52** (1923), s. 283–286.
- [13] Šišma P.: *Matematika na německé technice v Brně* (Prometheus, Praha, 2002) 322 s.

---

<sup>52</sup> Brzobohatý J. a Klos M.: *Vysoká škola báňská v Ostravě 1849–1945*, Prozatímní inventární seznam (ZA v Opavě, Opava 1962). s. 4.

- [14] Šorfová P.: Příbram a každodenní život jejích obyvatel v letech okupačních 1939–1945, Diplomová práce (Historický ústav PedF JČU v Českých Budějovicích, 2011), 197 s.
- [15] Theurer J.: *Památník Vysoké školy báňské v Příbrami za leta od 1899 do 1924, k 75letému jubileu trvání Vys. školy báňské* (VŠB, Prometheus a MŠaNO, Příbram, 1924). 427 s.
- [16] ZA Opava a archiv VŠB, fond Vysoká škola báňská v Ostravě.



# SHOULD BE OUR E-LEARNING MATERIALS MORE INTERACTIVE?

Monika Kováčová  
Institute of Mathematics and Physics,  
Faculty of Mechanical Engineering Slovak University of Technology in Bratislava  
monika.kovacova@stuba.sk

## Introduction

Information and communication technologies act as a catalyst for innovation in learning, providing access to contextualized high-quality content. The authors of e-learning material can use multiple media to present ideas and concepts, combining traditional educational content (text, images, graphs, and diagrams) with interactive computer-based resources (sound, video, animation, image series). We will inform in this paper about new – simple - tools for providing our e-learning materials more interactive. We will compare these new tools **Wolfram computable document format - CDF** with previous interactive techniques – **webMathematica jsp pages**. Both techniques allow adapting e-learning course materials to be more interactive, but the question is on how way and on which restrictions.

No one have doubts about importance to make our e-learning materials more interactive, to bring them closer to our students and to utilize the benefits of interactivity for better explanation course materials. The discussion will follow about the possible ways. We, all teachers and all tutors, are looking for efficient, amazing tool, simple usable and distributable over large student's community. We vote for tools, which are available on different formats, different devices include tables and mobile phones. In case our interactive e-learning materials should be displayed via different web browser, it gives us 50% of future success – no special installation, no special request, no payments. Web browsers are available on all devices; all students hold this space as their second home – so why do not use this space also for distribution math e-learning interactive materials?

In this paper we will speak about two possible ways on how to create interactive materials which allow display interactive math (including math fonts) on different devices via web.

## Interactive Learning Content

Content for interactive learning refers to the material covered in a lesson that utilizes interactive learning strategies to increase student engagement. Students who engage with

their subject matter are utilizing multiple learning strategies, including audio and visual learning and kinesthetic learning, or hands-on learning. Almost any lesson could be made interactive by designing activities that both teach the material and engage student curiosity.

Interactive learning can be defined in numerous ways, but the most commonly agreed on definition groups interactive learning into three distinct types. These learning types are grouped based on the types of interaction in which they engage students. The first, learner-content, is a type of teaching where the student interacts solely with what information she reads. The second is called learner-instructor, and this is where the primary interaction is with the instructor. The final style is called learner-learner, and this is where the student primarily interacts with his peers to learn new material

In a mathematics course, it can be more difficult to engage students in interactive learning as the traditional method of teaching finds students individually working problems from a textbook. Math can be made interactive by utilizing math manipulative, working in groups and assigning student's math strategies to learn and then teach their peers. Games and role playing with real-life examples of problems can also be utilized to make the content interactive and further student engagement.

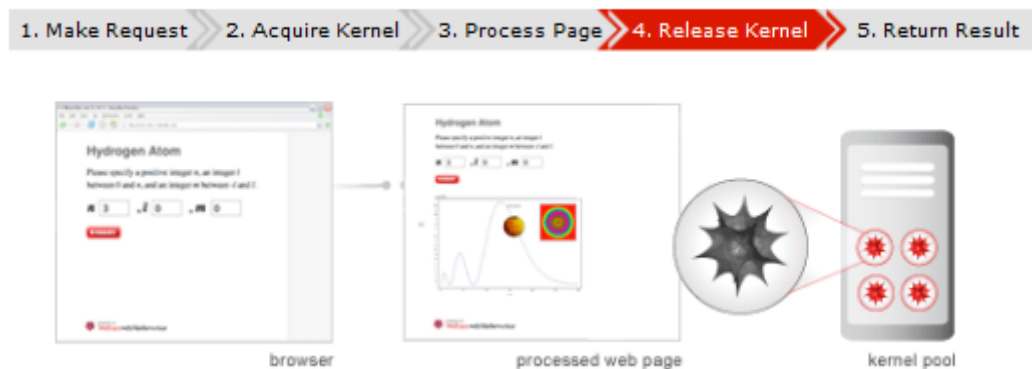
### **webMATHEMATICA tools**

*WebMATHEMATICA* is a new web technology, is developing for few last years, that allows the generation of dynamic web content with *Mathematica*. It integrates *Mathematica* with a web server. *webMATHEMATICA* harnesses the full range of *Mathematica* technology to build sophisticated web applications, especially in creating dynamical web art objects, or the graphical objects for teaching. *WebMATHEMATICA* provide immediate access to the technical computing software with very firm abilities especially in *Mathematica* graphics from any web browser. It allows incorporate also dynamical possibilities to creating graphics objects, so the graphics are live, interactive and responsive to user needs.

*WebMATHEMATICA* is the clear choice **for adding interactive calculations to the web**. This unique technology enables the user to create web sites that **allow users to compute and visualize results directly from a web browser**. This approach can be used in teaching fundamentals of numerical math, applied math but also on geometry and computer graphics. Based on the world's leading technical computing software and Java servlets, a proven server technology, *webMATHEMATICA* is fully compatible with *Mathematica* and state-of-the-art dynamic web systems. These techniques allow to users, e.g. students, artists, to create their works and to better explore how mathematical algorithms work. They do not need to know the algorithms. They do not need to install nor special programs, or special working space, only web browser is need. It is very advantageous for students, due to they need no special tools and techniques.

**WebMATHEMATICA** allows a site to deliver HTML pages that are enhanced by the addition of *Mathematica* commands. When a request is made for one of these pages, the *Mathematica* commands are evaluated and the computed result is inserted into the page and delivered to the client browser. This is done with JavaServer Pages (JSP), a standard Java technology, making use of custom tags. After the initial setup, all that you need to write *webMATHEMATICA* application is a basic knowledge of HTML and *Mathematica*. *webMATHEMATICA* is based on two standard Java technologies: Java Servlet and JSP. Servlets are special Java programs that run in a Java-enabled web server.

### How webMathematica Processes a Request



**webMathematica** allows a site to deliver HTML pages that are enhanced by the addition of *Mathematica* commands. When a request is made for one of these pages, the *Mathematica* commands are evaluated and the computed result is inserted into the page. This is done with a standard Java technology, JSP, making use of custom tags.

### Computable Document Format (CDF)

The PDF has long reigned as the universal document, one that can be read by almost any machine anywhere and be formatted to hold various kinds of information: text, charts, graphics, images, etc. But the problem with PDFs (or spreadsheets for that matter) is that they're pretty static--with the exception of a few (admittedly handy) features, they are fixed in what they can do and convey. Wolfram Research is trying to change that with the **Computable Document Format (CDF)**, a new kind of interactive document that brings computation to the document itself.

An easy way to think of the CDF is like a PDF with embedded apps. It's a document that essentially computes within itself, adding a layer of interactivity to things like graphics and charts that let the user not only see data but explore it as well. **Computable Document Format (CDF)** files supply a rich deployment method leveraging the power and flexibility of the *Mathematica* language with the wide distribution provided by a public format. The

**new standard aims to bring the kind of computation Wolfram is known for to portable documents that can be used within a browser, on a desktop and on hand-held devices.**

The rub is that Wolfram needs adoption and there's already a dominant document format in Adobe's PDF. One big challenge would be figuring out the interplay between CDF and PDF. The Computational Document Format (CDF) allows authors to embed interactive charts, diagrams and graphics into their documents, allowing readers to adjust variables to see how the graph changing after parameter modification, to display different math animation for better explanation of math principles. Using Wolfram's Computable Document Format (CDF), users can create visual depictions of their data sets, which then can be manipulated by others. "It is a new way to communicate the world's quantitative ideas much more richly than we have in the past," said Conrad Wolfram, the company's managing director, in a webcast press conference. And we can tell, it is really true, but this format need some time and some more development work.

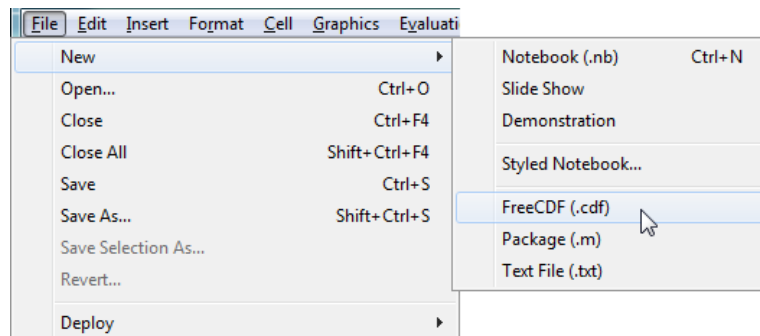
The goal is to turn "lifeless documents" into ones that bring data to life, show the data behind assumptions and illustrate concepts. CDF gives viewers not only the raw data sets, but also the algorithms that form the relationships among the different data sets, which then can be harnessed to show how these data sets interact. CDF could be used to embed interactive data sets in digital textbooks, scientific papers, e-learning materials and other electronic formats. By using computational power, the teacher could make these presentations more dynamic, giving student a way to manipulate the elements by using a set of controls that would accompany the depictions. The key to the CDF format is that anyone - not only mathematicians or programmers - will be able to create interactive documents, according to Wolfram.

## **How does it work?**

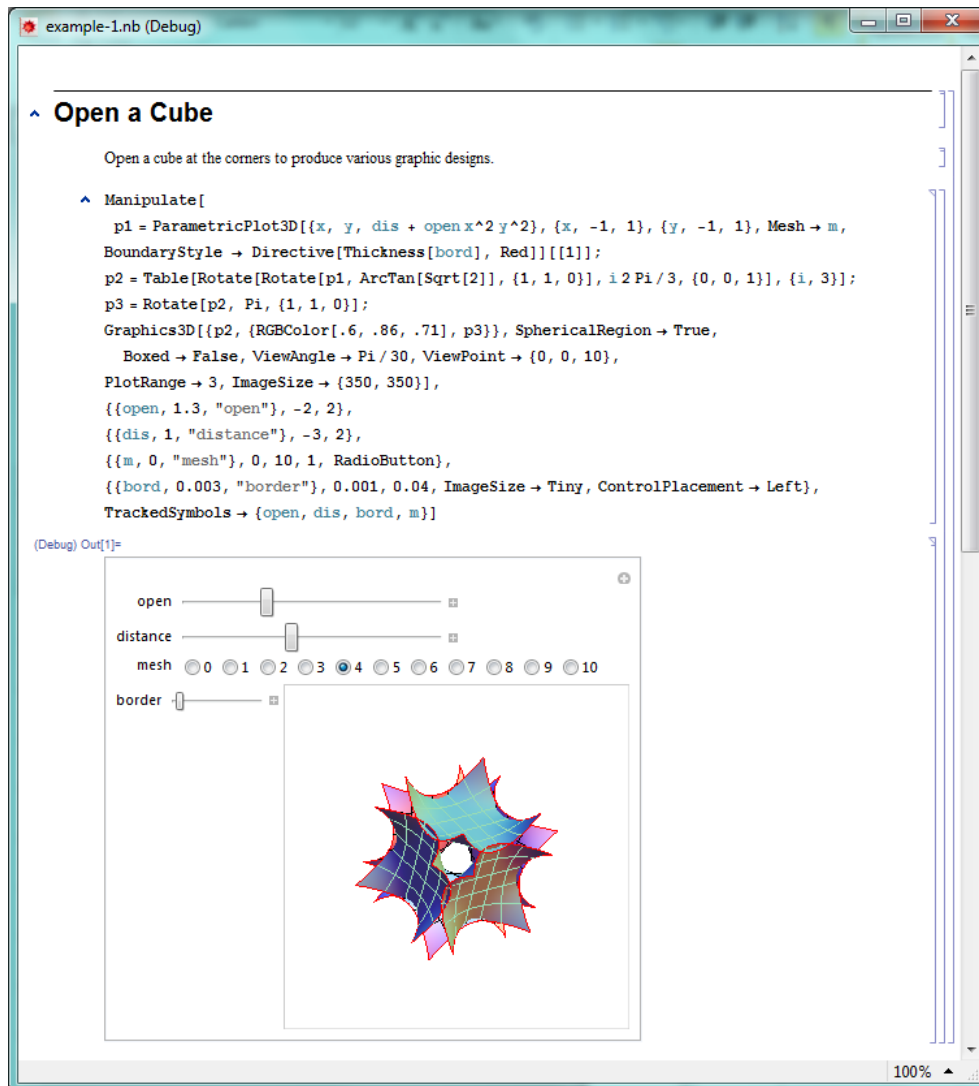
As a built-in feature of Mathematica 8, it's easy to save .cdf files straight from your working notebooks, custom-formatted papers and articles, or dedicated application development workflows. Anything you compute in *Mathematica* can be made into a user-interactive object offering maximum clarity in the presentation of your concepts, and there are no special considerations when creating documents just for viewing in Wolfram CDF Player; all notebook features can be displayed and printed. Computable Document Format files can be created from existing notebooks or from scratch. They can contain absolutely anything you can put into a *Mathematica* notebook.

The main difference between a *Mathematica* notebook and a .cdf file is the allowance of interaction when viewing your document in CDF Player. Notebook files (files with the extension .nb) are viewable as static documents in CDF Player, but any Manipulate objects present in a .cdf file are fully interactive in CDF Player.

For example, we can create simply Mathematica notebook / cdf document which includes simple definition for open cube. The easiest way to create a new .cdf file is to select File ► New ► FreeCDF (.cdf) from the menu:



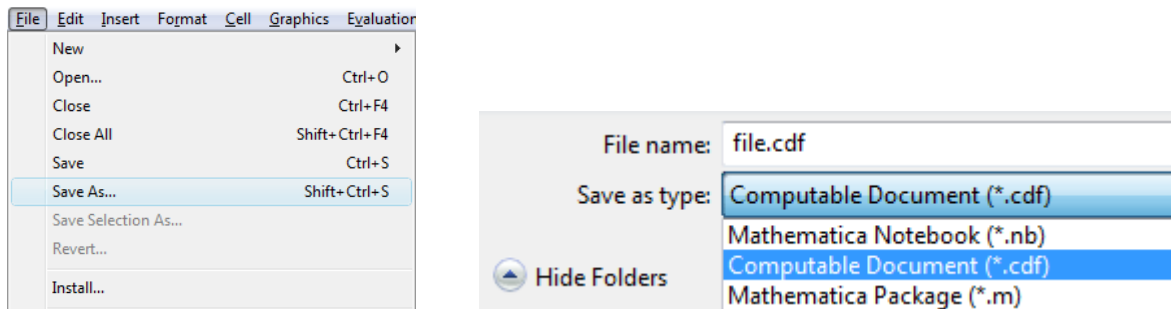
The newly opened notebook should look like this. We can write simple code in the *Mathematica* notebook working space:



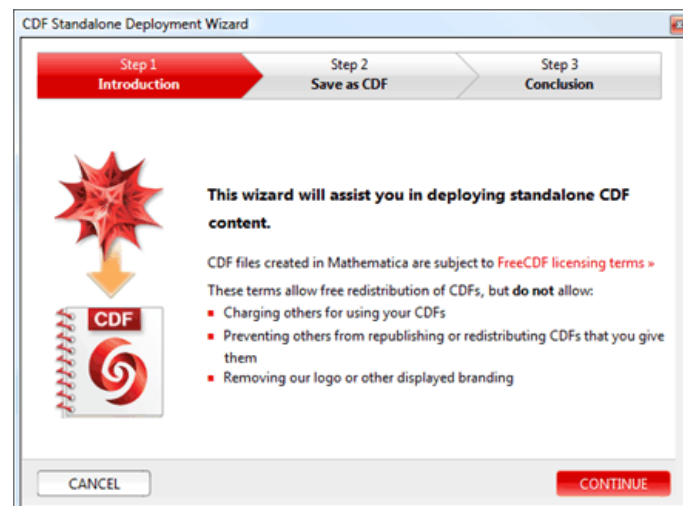
If you add the following output to a .cdf file, users viewing your document using CDF Player will be able to move the sliders interactively. Interactive and static content can be mixed freely in a .cdf file. For instance, you could provide a header to your interface.

An open notebook can also be made into a .cdf file in one of three ways.

The first method uses the Save As menu, while the second method uses the Deploy menu item.



Second method uses deploy menu item. Using the File ► Deploy menu item, you can either save a .cdf file as a standalone document or easily embed either the entire document or a specific selection into existing HTML code. Upon clicking the menu item, the following window will appear:



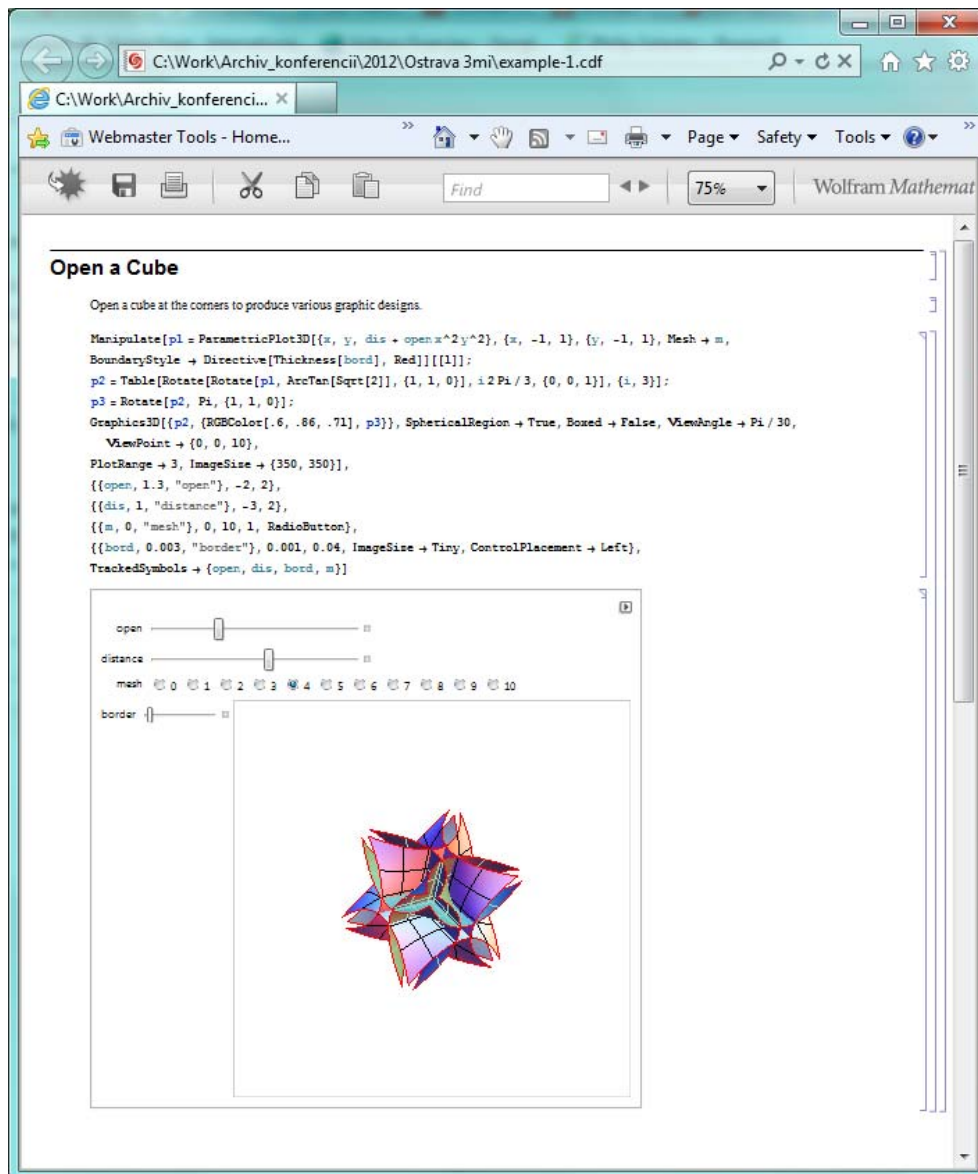
Follow the instructions in the wizard to save a standalone .cdf file. Note that if you want to save a selection from a notebook instead of the entire window, you must select the portion to be deployed before opening the wizard.

The third option for creating a .cdf file is by using Export. Both Import and Export fully support the "CDF" file format.

Almost all of the functions available in *Mathematica* can be used to build applications for CDF Player, but there are a few programming restrictions to keep in mind.

- All interactive content must be generated with the Manipulate command and may only use mouse-driven elements, such as Slider, Locator, Checkbox, PopupMenu...
- Dialog windows are not supported.
- MathLink operations, including J/Link and .NET/Link, are not supported.
- Data import and export are not supported from within CDF Player with the exception of Wolfram-curated data sources (ChemicalData, CountryData, WordData, etc.).

That's it! Your notebook is now an interactive .cdf file, ready for viewing in CDF Player.



## Conclusion

Computable Document Format (CDF) is an electronic document format designed to allow easy authoring of dynamically generated interactive content. It was created by Wolfram Research. Computable document format supports GUI elements such as sliders, menus and buttons. Content is updated using embedded computation in response to GUI interaction. Contents can include formatted text, tables, images, sounds and animations. CDF supports Mathematica typesetting and technical notation. Paginated layout, structured drill down layout and slide-show mode are supported. Styles can be controlled using a cascading style sheet.

CDF files can be read using a proprietary CDF Player with a restrictive license, which can be downloaded free of charge from Wolfram Research. In contrast to static formats such as PDF and pre-generated interactive content provided by formats such as Adobe Flash the CDF Player contains an entire runtime library of Mathematica allowing document content to be generated in response to user interaction using any algorithms or visualizations which can be described in Mathematica. This makes it particularly suited to scientific, engineering and other technical content and digital textbooks.

CDF reader support is available for Microsoft Windows, Macintosh and Linux but not for ebooks. The reader supports a plugin mode for Internet Explorer, Mozilla Firefox, Google Chrome, Opera and Safari, which allows CDF content to be embedded inline in HTML pages.

It seems that this format should be a good tool for creating interactive e-learning materials. We plan to explore other possibilities of this tool and then prepare several interactive materials especially in numerical math area.

Wolfram is currently providing a player that will allow users to view and experience sample CDF documents.

## References

- [1] KOVÁČOVÁ M.: Dynamical MATHEMATICA, STU Press, Bratislava, 2008, ISBN: 978-80-89313-11-2, pp. 346.
- [2] KOVÁČOVÁ M.: webMathematica – Dynamical Mathematica Web Pages and their Bene-fits for Teachers, In: XXVII International Colloquium on the Management of Educational Process, Brno, 2009, 9 pages, on CD-ROM, ISBN: 978-80-7231-650-2
- [3] WICKHAM-JONES T.: webMathematica 3, A User Guide, Wolfram Research Inc.
- [4] Definition of Interactive Learning Content , eHow.com  
[http://www.ehow.com/about\\_6727386\\_definition-interactive-learning-content.html#ixzz2CCIsNOg4](http://www.ehow.com/about_6727386_definition-interactive-learning-content.html#ixzz2CCIsNOg4)
- [5] <http://www.wolfram.com/products/webmathematica/>
- [6] <http://www.wolfram.com/cdf/>
- [7] <http://www.wolfram.com/cdf-player/>



# RÓWNOWAGA STACKELBERGA W GRACH SEKWENCYJNYCH DLA STABILIZOWANEGO KRYTERIUM FOLLOWERA O NIEZNANEJ WARTOŚCI

Stanisław Kowalik

Wyższa Szkoła Biznesu

ul. Ciepłaka 1c, 41-300 Dąbrowa Górnicza, Polska

e-mail: [skowalik@wsb.edu.pl](mailto:skowalik@wsb.edu.pl)

**Abstrakt:** Praca dotyczy niekooperacyjnych sekwencyjnych gier dwuosobowych o sumie niezerowej. Gracz, który jako pierwszy wykonuje ruch nazywany jest leaderem, a gracz drugi nazywany jest followerem. Na podstawie macierzy gry określa się tzw. punkt równowagi Stackelberga, tj. parę optymalnych strategii. Rozważymy przypadek, gdy leaderowi zależy na maksymalizacji wypłaty. Przyjmujemy założenie, że leader nie wie do jakiej wartości wypłaty dąży follower.

**Abstract:** Article concerns non-cooperative sequential two-person games about nonzero-sum. The player who as first make move is called "leader", and second player is called "follower". Matrix of game defines the point of equilibrium Stackelberg, i.e. of couple optimum strategies. We will check case, when "leader" want for maximization of payment. We accept thinking, that "leader" does not know what value of payment want "follower".

## 1. Wstęp

Rozważać będziemy dwuosobową konkurencyjną grę sekwencyjną o sumie niezerowej. Gracz A, który jako pierwszy wykonuje ruch nazywany jest leaderem, a gracz drugi B nazywany jest followerem. Przyjmujemy, że gracz A dysponuje strategiami  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , a gracz B dysponuje strategiami  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Gracz A operuje macierzą wypłat  $\{a_{ij}\}$ , a gracz B macierzą wypłat  $\{b_{ij}\}$  ( $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ ). Rozważymy przypadek, gdy graczowi A zależy na maksymalizacji wypłaty. Przyjmujemy założenie, że gracz A nie wie do jakiej wartości wypłaty dąży gracz B. Zakładamy, że graczowi B zależy na osiągnięciu jednej z wartości  $b_{ij}$ . Tę nieznaną wartość oznaczymy symbolem  $b$ . W rozważaniach będziemy wzorować się na wzorach matematycznych dotyczących wyznaczania pary strategii będących w równowadze w sensie Stackelberga [1, 3, 5].

W przypadku, gdy gracze A i B maksymalizują swoje wypłaty, gracz A określa dla każdej swojej strategii  $\alpha_i$  najlepszą z punktu widzenia gracza B odpowiedź  $\beta_j$  dającą największą wartość wypłaty. Takich strategii  $\beta_j$  może być więcej. Dla ustalonej strategii  $\alpha_i$  oznaczamy przez  $R(i)$  zbiór numerów k strategii gracza B takich, że dla każdego j ( $j=1, \dots, n$ ) jest spełnione  $b_{ik} \geq b_{ij}$  [1, 3]

$$R(i) = \{k : \forall_j b_{ik} \geq b_{ij}\} . \quad (1)$$

Strategie Stackelberga o numerze  $i_0$  dla lidera A wyznaczamy z równania

$$\min_{j \in R(i_0)} a_{i_0 j} = \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} = S(A) . \quad (2)$$

W przypadku, gdy gracze A i B minimalizują swoje wypłaty, gracz A określa dla każdej swojej strategii  $\alpha_i$  najlepszą z punktu widzenia gracza B odpowiedź  $\beta_j$  dającą najmniejszą wartość wypłaty. Takich strategii  $\beta_j$  może być więcej. Dla ustalonej strategii  $\alpha_i$  oznaczamy przez  $R(i)$  zbiór numerów k strategii gracza B takich, że dla każdego j ( $j=1, \dots, n$ ) jest spełnione  $b_{ik} \leq b_{ij}$

$$R(i) = \{k : \forall_j b_{ik} \leq b_{ij}\} . \quad (3)$$

Strategie Stackelberga o numerze  $i_0$  dla lidera A wyznaczamy z równania [5]

$$\max_{j \in R(i_0)} a_{i_0 j} = \min_i \max_{j \in R(i)} a_{ij} = S(A) . \quad (4)$$

gdzie  $S(A)$  oznacza tzw. koszt Stackelberga.

Wskaźnik  $j_0 \in R(i_0)$  określa odpowiedź  $\beta_{j_0}$  followera B na strategię  $\alpha_{i_0}$  lidera A. Para strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  jest rozwiązaniem równowagi Stackelberga. Para wypłat  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0})$  jest wynikiem tej gry tj. wynikiem równowagi w sensie Stackelberga.

Rozważania będziemy ilustrowali na przykładowych macierzach wypłat:

$$A : \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \alpha_1 & \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 & \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ \alpha_3 & \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \\ \alpha_4 & \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad B : \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \alpha_1 & \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 & \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\ \alpha_3 & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix} \\ \alpha_4 & \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

## 2. Gracz A maksymalizuje swoją wypłatę a gracz B stabilizuje

Zakładamy, że gracz B dąży do uzyskania wypłaty równej lub najbliższej wartości b. Wartość b nie jest znana graczowi A. Gracz A określa dla każdej swojej strategii  $\alpha_i$  najlepszą z punktu widzenia gracza B odpowiedź  $\beta_j$  dającą najbliższą liczbę b wartość wypłaty. Takich strategii  $\beta_j$  może być więcej. Dla ustalonej strategii  $\alpha_i$  oznaczamy przez  $R(i)$  zbiór numerów k strategii gracza B takich, że dla każdego j ( $j=1, \dots, n$ ) jest spełnione  $|b - b_{ik}| \leq |b - b_{ij}|$  [1]

$$R(i) = \{k : \forall_j |b - b_{ik}| \leq |b - b_{ij}|\} . \quad (5)$$

Strategie Stackelberga o numerze  $i_0$  dla lidera A wyznaczamy z równania (2).

Z macierzy gry gracza B wynika, że  $b$  może przyjmować następujące wartości: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dla tych liczb kolejno określamy zbiory  $R(i)$  ( $i=1, \dots, 4$ ) na podstawie wzoru (5) oraz pary strategii będących w równowadze Stackelberga na podstawie wzoru (2).

Najpierw przyjmujemy, że  $b=3$ .

$$\begin{aligned} R(1) &= \{k : \forall_j |3 - b_{1k}| \leq |3 - b_{1j}|\} = \{4\}, & R(2) &= \{k : \forall_j |3 - b_{2k}| \leq |3 - b_{2j}|\} = \{5\}, \\ R(3) &= \{k : \forall_j |3 - b_{3k}| \leq |3 - b_{3j}|\} = \{2\}, & R(4) &= \{k : \forall_j |3 - b_{4k}| \leq |3 - b_{4j}|\} = \{3\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Numer  $i_0$  strategii optymalnej gracza A wyznaczamy na podstawie równania (2)

$$\begin{aligned} \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} &= \max(\min_{j \in R(1)} a_{1j}, \min_{j \in R(2)} a_{2j}, \min_{j \in R(3)} a_{3j}, \min_{j \in R(4)} a_{4j}) = \\ &= \max\{a_{14}, a_{25}, a_{32}, a_{43}\} = \max(7, 6, 6, 7) = 7 \Rightarrow i_0 = 1, 4. \end{aligned}$$

Następnie określamy  $j_0$ .

$$j_0 \in R(i_0) = R(1) = \{4\} \Rightarrow j_0 = 4,$$

$$j_0 \in R(i_0) = R(4) = \{3\} \Rightarrow j_0 = 3.$$

Mamy więc, że rozwiązaniem równowagi Stackelberga w tej grze są pary strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_1, \beta_4)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{14}, b_{14}) = (7, 5)$  i  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_4, \beta_3)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{43}, b_{43}) = (7, 4)$ .

Przyjmujemy teraz, że  $b=4$ .

$$\begin{aligned} R(1) &= \{k : \forall_j |4 - b_{1k}| \leq |4 - b_{1j}|\} = \{4\}, & R(2) &= \{k : \forall_j |4 - b_{2k}| \leq |4 - b_{2j}|\} = \{5\}, \\ R(3) &= \{k : \forall_j |4 - b_{3k}| \leq |4 - b_{3j}|\} = \{2\}, & R(4) &= \{k : \forall_j |4 - b_{4k}| \leq |4 - b_{4j}|\} = \{3\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ponieważ otrzymaliśmy identyczne zbiory  $R(i)$  jak poprzednio, więc rozwiązaniem równowagi Stackelberga będą te same pary strategii jak poprzednio  $(\alpha_1, \beta_4)$  z wynikiem  $(7, 5)$  oraz  $(\alpha_4, \beta_3)$  z wynikiem  $(7, 4)$ .

Przyjmujemy teraz, że  $b=5$ .

$$\begin{aligned} R(1) &= \{k : \forall_j |5 - b_{1k}| \leq |5 - b_{1j}|\} = \{4\}, & R(2) &= \{k : \forall_j |5 - b_{2k}| \leq |5 - b_{2j}|\} = \{1, 3\}, \\ R(3) &= \{k : \forall_j |5 - b_{3k}| \leq |5 - b_{3j}|\} = \{4\}, & R(4) &= \{k : \forall_j |5 - b_{4k}| \leq |5 - b_{4j}|\} = \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Numer  $i_0$  strategii optymalnej gracza A wyznaczamy na podstawie równania (2)

$$\begin{aligned} \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} &= \max(\min_{j \in R(1)} a_{1j}, \min_{j \in R(2)} a_{2j}, \min_{j \in R(3)} a_{3j}, \min_{j \in R(4)} a_{4j}) = \\ &= \max\{a_{14}, \min(a_{21}, a_{23}), a_{34}, \min(a_{41}, a_{42})\} = \\ &= \max\{7, \min(8, 3), 6, \min(5, 6)\} = \max(7, 3, 6, 5) = 7 \Rightarrow i_0 = 1. \end{aligned}$$

Następnie określamy  $j_0$ .

$$j_0 \in R(i_0) = R(1) = \{4\} \Rightarrow j_0 = 4,$$

Mamy więc, że rozwiązaniem równowagi Stackelberga w tej grze jest para strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_1, \beta_4)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{14}, b_{14}) = (7, 5)$ .

Przyjmujemy teraz, że  $b=6$ .

$$\begin{aligned} R(1) &= \{k : \forall_j |6 - b_{1k}| \leq |6 - b_{1j}|\} = \{1, 5\}, & R(2) &= \{k : \forall_j |6 - b_{2k}| \leq |6 - b_{2j}|\} = \{2, 4\}, \\ R(3) &= \{k : \forall_j |6 - b_{3k}| \leq |6 - b_{3j}|\} = \{4\}, & R(4) &= \{k : \forall_j |6 - b_{4k}| \leq |6 - b_{4j}|\} = \{1, 2, 4\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Numer  $i_0$  strategii optymalnej gracza A wyznaczamy na podstawie równania (2)

$$\begin{aligned} \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} &= \max(\min_{j \in R(1)} a_{1j}, \min_{j \in R(2)} a_{2j}, \min_{j \in R(3)} a_{3j}, \min_{j \in R(4)} a_{4j}) = \\ &= \max\{\min(a_{11}, a_{15}), \min(a_{22}, a_{24}), a_{34}, \min(a_{41}, a_{42}, a_{44})\} = \\ &= \max\{\min(8, 3), \min(4, 2), 6, \min(5, 6, 7)\} = \max(3, 2, 6, 5) = 6 \Rightarrow i_0 = 3. \end{aligned}$$

Następnie określamy  $j_0$ .

$$j_0 \in R(i_0) = R(3) = \{4\} \Rightarrow j_0 = 4,$$

Mamy więc, że rozwiązaniem równowagi Stackelberga w tej grze jest para strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_3, \beta_4)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{34}, b_{34}) = (6, 6)$ .

Przyjmujemy teraz, że  $b=7$ .

$$R(1) = \{k : \forall_j |7 - b_{1k}| \leq |7 - b_{1j}|\} = \{3\}, \quad R(2) = \{k : \forall_j |7 - b_{2k}| \leq |7 - b_{2j}|\} = \{2, 4\},$$

$$R(3) = \{k : \forall_j |7 - b_{3k}| \leq |7 - b_{3j}|\} = \{1, 3, 5\}, \quad R(4) = \{k : \forall_j |7 - b_{4k}| \leq |7 - b_{4j}|\} = \{4\}. \quad (10)$$

Numer  $i_0$  strategii optymalnej gracza A wyznaczamy na podstawie równania (2)

$$\begin{aligned} \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} &= \max(\min_{j \in R(1)} a_{1j}, \min_{j \in R(2)} a_{2j}, \min_{j \in R(3)} a_{3j}, \min_{j \in R(4)} a_{4j}) = \\ &= \max\{a_{13}, \min(a_{22}, a_{24}), \min(a_{31}, a_{33}, a_{35}), a_{44}\} = \\ &= \max\{4, \min(4, 2), \min(7, 3, 9), 7\} = \max(4, 2, 3, 7) = 7 \Rightarrow i_0 = 4. \end{aligned}$$

Następnie określamy  $j_0$ .

$$j_0 \in R(i_0) = R(4) = \{4\} \Rightarrow j_0 = 4,$$

Mamy więc, że rozwiązaniem równowagi Stackelberga w tej grze jest para strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_4, \beta_4)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{44}, b_{44}) = (7, 7)$ .

Przyjmujemy teraz, że  $b=8$ .

$$R(1) = \{k : \forall_j |8 - b_{1k}| \leq |8 - b_{1j}|\} = \{2\}, \quad R(2) = \{k : \forall_j |8 - b_{2k}| \leq |8 - b_{2j}|\} = \{2, 4\},$$

$$R(3) = \{k : \forall_j |8 - b_{3k}| \leq |8 - b_{3j}|\} = \{1, 3, 5\}, \quad R(4) = \{k : \forall_j |8 - b_{4k}| \leq |8 - b_{4j}|\} = \{4, 5\}. \quad (11)$$

Numer  $i_0$  strategii optymalnej gracza A wyznaczamy na podstawie równania (2)

$$\begin{aligned} \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} &= \max(\min_{j \in R(1)} a_{1j}, \min_{j \in R(2)} a_{2j}, \min_{j \in R(3)} a_{3j}, \min_{j \in R(4)} a_{4j}) = \\ &= \max\{a_{12}, \min(a_{22}, a_{24}), \min(a_{31}, a_{33}, a_{35}), \min(a_{44}, a_{45})\} = \\ &= \max\{5, \min(4, 2), \min(7, 3, 9), \min(7, 3)\} = \max(5, 2, 3, 3) = 5 \Rightarrow i_0 = 1. \end{aligned}$$

Następnie określamy  $j_0$ .

$$j_0 \in R(i_0) = R(1) = \{2\} \Rightarrow j_0 = 2,$$

Mamy więc, że rozwiązaniem równowagi Stackelberga w tej grze jest para strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_1, \beta_2)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{12}, b_{12}) = (5, 8)$ .

Przyjmujemy teraz, że  $b=9$ .

$$R(1) = \{k : \forall_j |9 - b_{1k}| \leq |9 - b_{1j}|\} = \{2\}, \quad R(2) = \{k : \forall_j |9 - b_{2k}| \leq |9 - b_{2j}|\} = \{2, 4\},$$

$$R(3) = \{k : \forall_j |9 - b_{3k}| \leq |9 - b_{3j}|\} = \{1, 3, 5\}, \quad R(4) = \{k : \forall_j |9 - b_{4k}| \leq |9 - b_{4j}|\} = \{5\}. \quad (12)$$

Numer  $i_0$  strategii optymalnej gracza A wyznaczamy na podstawie równania (2)

$$\begin{aligned} \max_i \min_{j \in R(i)} a_{ij} &= \max(\min_{j \in R(1)} a_{1j}, \min_{j \in R(2)} a_{2j}, \min_{j \in R(3)} a_{3j}, \min_{j \in R(4)} a_{4j}) = \\ &= \max\{a_{12}, \min(a_{22}, a_{24}), \min(a_{31}, a_{33}, a_{35}), a_{45}\} = \\ &= \max\{5, \min(4, 2), \min(7, 3, 9), 3\} = \max(5, 2, 3, 3) = 5 \Rightarrow i_0 = 1. \end{aligned}$$

Następnie określamy  $j_0$ .

$$j_0 \in R(i_0) = R(1) = \{2\} \Rightarrow j_0 = 2,$$

Mamy więc, że rozwiązaniem równowagi Stackelberga w tej grze jest para strategii  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = (\alpha_1, \beta_2)$  z wynikiem  $(a_{i_0 j_0}, b_{i_0 j_0}) = (a_{12}, b_{12}) = (5, 8)$ .

Okazało się, że równowaga Stackelberga może wystąpić tylko dla strategii  $\alpha_1, \alpha_3$  i  $\alpha_4$  z tym, że dla strategii  $\alpha_1$  punkt równowagi wystąpił 5-krotnie, dla strategii  $\alpha_3$

1-krotnie, a dla strategii  $\alpha_4$  3-krotnie. Wynika z tego, że strategia  $\alpha_1$  powinna być preferowana przez gracza A. Dodatkowo sporządzimy tabelę wypłat dla gracza A dla różnych wartości b. Pogrubioną czcionką zaznaczono wypłaty uzyskane z równowagi Stackelberga.

Tabela 1. Wypłaty gracza A dla różnych wartości b

b =	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha_1$	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	3	4	<b>5</b>	<b>5</b>
$\alpha_3$	6	6	6	<b>6</b>	3	3	3
$\alpha_4$	<b>7</b>	<b>7</b>	5	5	<b>7</b>	3	3

Wykorzystując tę tabelę możemy ocenić strategie  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  stosując np. zasadę równych prawdopodobieństw używaną w grach przeciw naturze. Obliczamy wartości strategii  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  jako średnie arytmetyczne wygranych

$$\text{wartość } \alpha_1 = (7+7+7+3+4+5+5)/7 = 38/7 = 5.4286,$$

$$\text{wartość } \alpha_3 = (6+6+6+6+3+3+3)/7 = 33/7 = 4.7143,$$

$$\text{wartość } \alpha_4 = (7+7+5+5+7+7+7)/7 = 37/7 = 5.2857,$$

$$\max(\text{wartość } \alpha_i) = 5.4286 \Rightarrow \alpha_1.$$

Tak więc gracz A będący leaderem i chcący maksymalizować swoją wygraną powinien użyć strategii  $\alpha_1$  przeciw followerowi B, o ile nie zna kryterium stabilizacyjnego wypłaty gracza B.

### 3. Podsumowanie

W związku z tym, że nie znana jest stabilizowana wartość wypłaty followera, znajduje się punkty równowagi w sensie Stackelberga, dla różnych możliwych wartości tej wypłaty. Te punkty równowagi mogą wystąpić tylko dla niektórych strategii lidera. Aby wybrać najlepszą z nich leader musi je ocenić stosując metody gry z naturą.

### Literatura

1. Laskowski S.: Sekwencyjna dwuosobowa gra konkurencyjna o sumie niezerowej. Telekomunikacja i techniki informacyjne 3-4/2006.
2. Laskowski S.: O roli informacji na temat macierzy wypłat w konkurencyjnej grze na rynku telekomunikacyjnym. Telekomunikacja i techniki informacyjne 3-4/2004.
3. Plonka E.: Wykłady z teorii gier. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
4. Straffin P. D.: Teoria gier. Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa 2001.
5. Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1988.

# O NUMERICKÉM ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Břetislav Krček, Michaela Tužilová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava  
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail : [bretislav.krcek@vsb.cz](mailto:bretislav.krcek@vsb.cz) , [michaela.tuzilova@vsb.cz](mailto:michaela.tuzilova@vsb.cz)

**Abstrakt:** Článek je zaměřen na výuku numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic na vysokých školách technického směru. V článku jsou uvedeny nejen některé významné problémy této výuky, ale i náměty jak je řešit.

**Abstract:** *About numerical solution of ordinary differential equations.* In the article we concentrate to the teaching the ordinary differential equations numerical solution at technical universities. We present not only some typical problems of this topic teaching but we also try to suggest some ways how to solve these.

## Poznámky k výuce diferenciálních rovnic v základních kurzech matematiky

S numerickým řešením obyčejných diferenciálních rovnic se vysokoškolští studenti technických oborů obvykle setkávají v některém předmětu zaměřeném na numerickou matematiku až po ukončení všech základních kurzů matematiky, ze kterých by si měli odnést základní znalosti o diferenciálních rovnicích a o matematickém aparátu nutném pro jejich numerické řešení. Praxe je však většinou zcela jiná. Mnozí studenti totiž v základních kurzech matematiky řadí diferenciální rovnice k opomíjeným partiím. Důvodů pro to je sice více, ale k nejvýznamnějším určitě patří bodový systém hodnocení (který se běžně používá). Diferenciální rovnice totiž obvykle tvoří asi jen 1/3 náplně kurzu, v němž jsou zařazeny. Při přípravě na zkoušku mohou tedy studenti diferenciální rovnice buď zcela vypustit, nebo se zaměřit jen na získání bodů za některé mechanické znalosti při řešení příkladů. Uvedenou bodovou úvahu u mnoha studentů podpoří i následující skutečnosti:

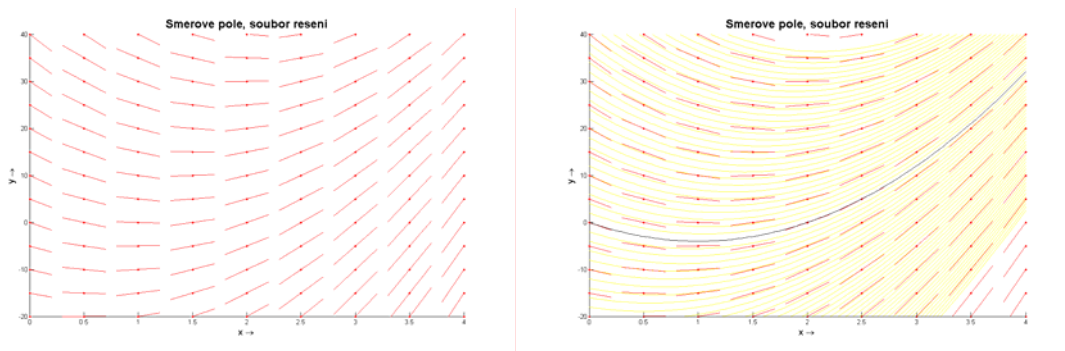
- na rozdíl např. od derivací a integrálů jsou z pohledu studentů diferenciální rovnice zcela novou partií (s derivacemi a integrály se většinou poprvé setkávají už na střední škole),
- k hlubšímu pochopení diferenciálních rovnic je třeba jistá znalost analytické geometrie, značná část studentů si však postačující znalosti ze střední školy nepřináší (a v základních kurzech je nezíská),
- pro mnoho studentů je pak u diferenciálních rovnic stěžejním problémem syntéza znalostí z předchozích partií matematiky.

## Výuka numerického řešení diferenciálních rovnic

Při výuce numerického řešení diferenciálních rovnic v kurzu numerické matematiky se pak nedostatečné znalosti diferenciálních rovnic ze základních kurzů (někdy zcela zásadní) znovu a ve větší míře spojí především s nepostačující znalostí analytické geometrie a s běžnými problémy numerické matematiky. Kromě běžného názoru studentů „přibližné řešení = nepřesné řešení“, se mnoho studentů dívá se značnou nedůvěrou na nahrazení přesného řešení diferenciální rovnice lomenou čarou. Je to asi dáno tím, že na obvyklém úvodním názorném obrázku pro demonstraci nejjednodušší Eulerovy metody lomená čára přibližného řešení „evidentně utíká“ od přesného řešení. Na úvodním obrázku pro názorné vyjádření principu metody je totiž třeba volit poměrně velký krok, je proto vhodné ihned ukázat, jak se výsledek změní pro kratší krok (viz např. později popsanou posloupnost výsledků na obr. 3.).

S řešením uvedených problémů je třeba důsledně začít již v základních kurzech matematiky, které jsou nejprve orientovány na rovnici 1. řádu  $y' = f(x, y)$  a její speciální případy. Obvykle se začíná rovnicí separovanou, pak následují rovnice separovatelná, homogenní, atd., přičemž se buď zcela pomine speciální případ rovnice typu  $y' = f(x)$ , nebo je mu věnována jen nepatrná zmínka. Přitom právě rovnice tohoto typu by neměla být pro studenty ničím novým, bezprostředně totiž navazuje na integrální počet funkce jedné proměnné, a lze na ní lehce přiblížit i řešení Cauchyovy úlohy.

Na rozdíl od některých jiných partií matematické analýzy, ve kterých se při přednášce některé obrázky postupně vytvářejí, je při výuce diferenciálních rovnic vhodnější ukázat studentům jak v základních kurzech matematiky, tak i v navazující numerické matematice (např. pomocí projekce z počítače) hotové směrové pole zvolené diferenciální rovnice, dále pak do pole vložit nějakou množinu partikulárních řešení, a na závěr ukázat i řešení určité Cauchyovy úlohy (viz obr. 1.).

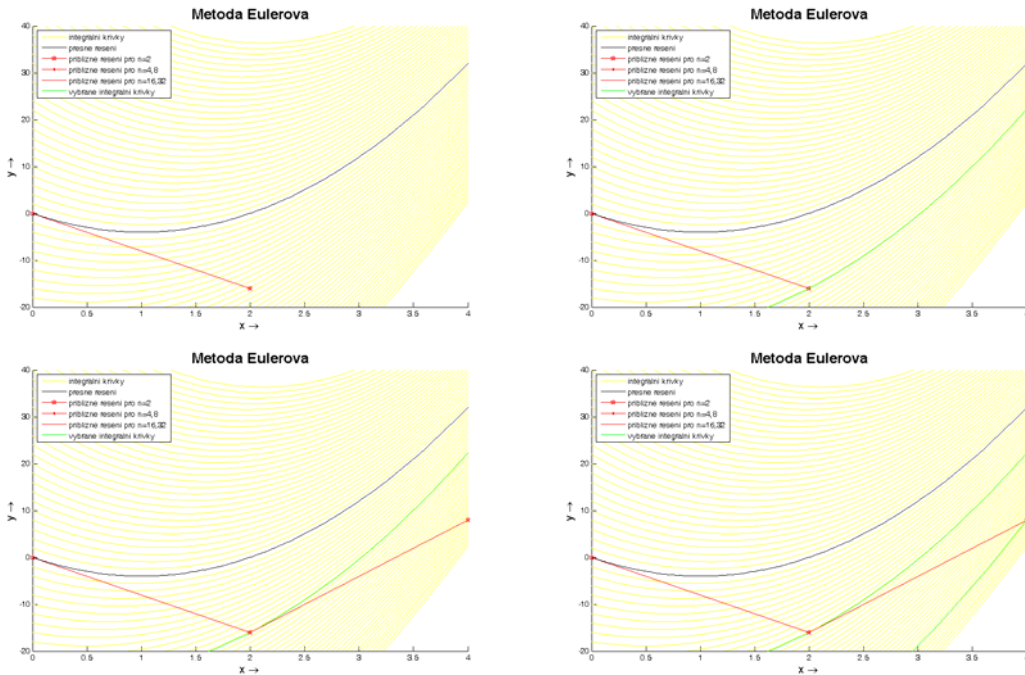


Obr. 1. Směrové pole doplněné o některá partikulární řešení a o řešení Cauchyovy úlohy

Při vlastní výuce numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic je pak možno studentům přiblížit probírané metody pomocí sekvence obrázků (snímků) zachycujících postup řešení.

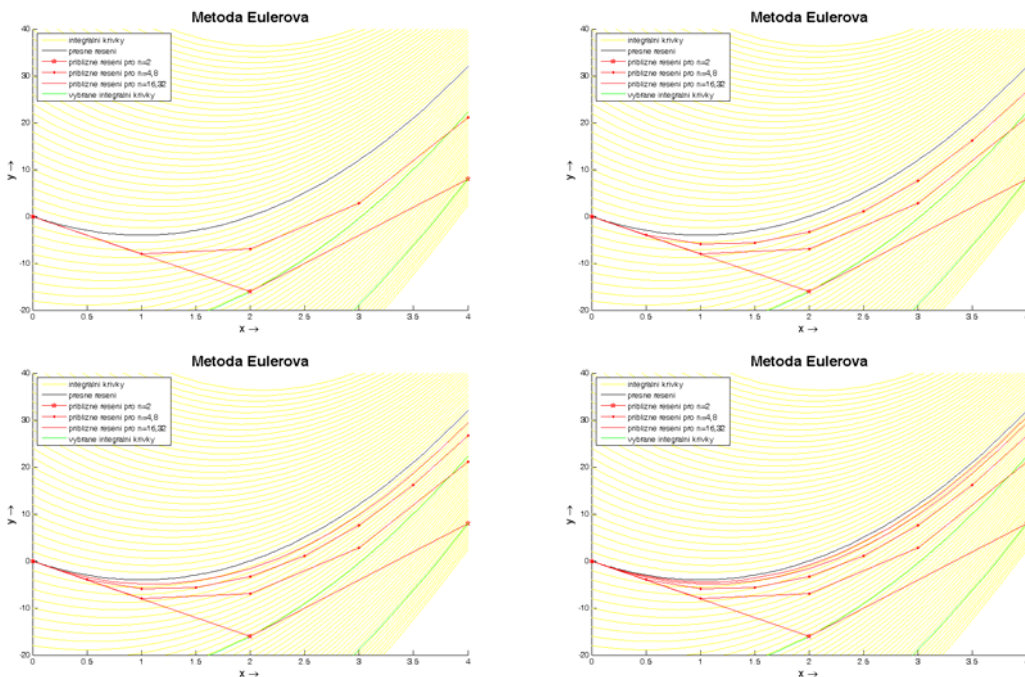
Na obr. 2. je příklad vizualizace řešení Cauchyovy úlohy zvolené diferenciální rovnice prvního řádu Eulerovou metodou. Interval, na kterém je řešení hledáno, je tu rozdělen jen na dva kroky. Postup výpočtu zachycují čtyři snímky jejichž společným pozadím je množina partikulárních řešení zvolené rovnice se zvýrazněným hledaným (přesným) řešením. Na prvním snímku je jen část tečny, která odpovídá prvnímu kroku. Na druhém snímku je zvýrazněno partikulární řešení, které prochází dosaženým bodem,

na třetím přibývá část příslušné tečny, která odpovídá druhému kroku, a na čtvrtém je opět zvýrazněno přesné řešení jdoucí výsledným bodem.



Obr.2. Postupná vizualizace Eulerovy metody

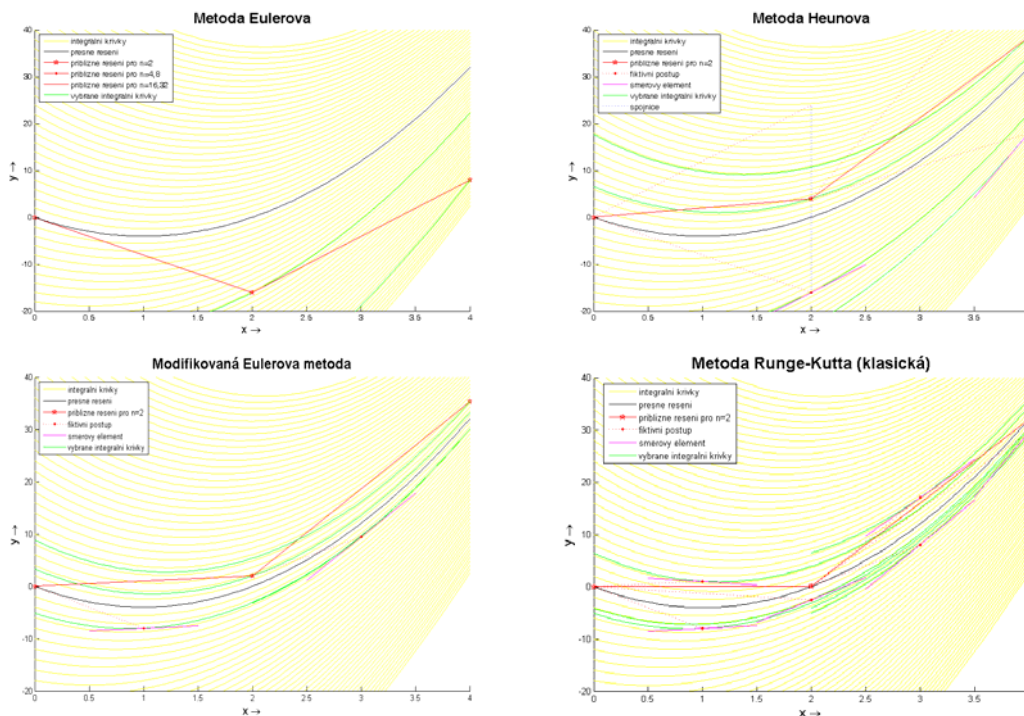
Při rozdělení zvoleného intervalu jen na dva kroky se ovšem přibližné řešení značně odlišuje od řešení přesného. Je proto vhodné hned i ukázat, jak se bude měnit přibližné řešení, pokud se bude na zvoleném intervalu počet kroků opakovaně zdvojnásobovat (viz obr. 3.).



Obr.3. Výpočty pro opakované půlení kroku ( $n$  – počet kroků)



Obdobné vizualizace dalších obvykle probíraných jednokrokových metod představují mnohem větší množství snímků. Na obr. 4. jsou proto u dalších třech metod uvedeny jen výsledné snímky (pro srovnání je znovu uveden i výsledný snímek Eulerovy metody pro stejné zadání).



Obr.4. Přehled výsledků vybraných metod

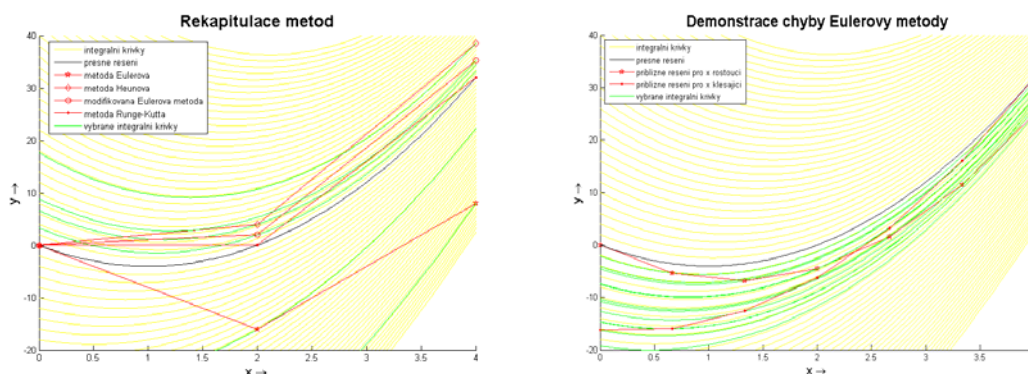
K názorné vizualizaci jednotlivých metod byl zadaný interval opět rozdělen jen na dva kroky. U prvních snímků dalších uváděných metod je podstatné zdůraznit, že výpočet začíná obdobně jako u Eulerovy metody „pohybem“ po tečnách k hledanému řešení, ale že dosažený bod při kroku, resp. půlkroku, však tentokrát není bodem hledaného přibližného řešení, ale jen bodem, v němž se zjišťuje směr směrového pole. Zjištěný směr se pak na dalším snímku opět použije pro „pohyb“ z výchozího bodu, přičemž u modifikované Eulerovy metody již slouží přímo k dosažení dalšího bodu řešení. Tento bod tedy leží na přímce, která prochází výchozím bodem a obecně není tečnou ale sečnou k přesnému řešení.

U Heunovy metody podobně jako i u klasické metody Runge-Kutta 4. řádu (dále jen metody RK4) směry zjištěné v určitých bodech směrového pole slouží jen k výpočtu směru v němž se nachází další bod řešení. U výsledného snímku metody RK4 je vhodné zdůraznit, že získané body přibližného řešení i při poměrně velkém kroku leží, vzhledem k předchozím metodám, téměř přesně na křivce přesného řešení.

Pro výuku je dále velmi přínosné porovnat přímo i výsledky jednotlivých metod získané při řešení stejné úlohy. Pro zde prezentovanou úlohu je porovnání uvedených metod na první části obr. 5., který názorně vyjadřuje skutečnost, že přesnosti dosažené jednotlivými metodami se v daném případě řádově liší.

Při výkladu o zajišťování požadované přesnosti uváděných numerických řešení metodou polovičního kroku je možno opět využít snímky z obr. 3. nebo obdobné, získané pro další metody. K objasnění problematiky chyby numerického řešení je

možno dále využít obdoby druhého snímku z obr. 5, na němž jsou řešení dvou Cauchyových úloh stejnou metodou pro stejnou rovnici, které mají výchozí bod na stejném partikulárním řešení a liší se jen „směrem výpočtu“.



Obr.5. Porovnání uvedených metod a demonstrace chyby Eulerovy metody pro  $n=6$

Podobně jako v základním kurzu matematiky je možno i v numerické matematice k objasňování metod pro rovnici  $y' = f(x, y)$  využít její speciální tvar  $y' = f(x)$ , pak pro dva body (s indexy  $n$  a  $n+1$ ) určitého řešení platí  $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ , což znamená, že numerické řešení diferenciální rovnice přechází v numerický výpočet integrálu. Výpočet přírůstku funkční hodnoty metodou RK4 pak přechází ve výpočet integrálu metodou Simpsonovou, u Heunovy metody se pak jedná o přechod k metodě lichoběžníkové, u modifikované Eulerovy metody k metodě obdélníkové se středními funkčními hodnotami a u metody Eulerovy k obdélníkové metodě s funkčními hodnotami levými pro  $x_n < x_{n+1}$  nebo pravými pro  $x_n > x_{n+1}$ .

## Závěr

Problémům při výuce numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic na vysokých školách technického směru je třeba předcházet již v základních kurzech matematiky. Konkrétně jsou v článku uvedeny dva návrhy - plné využití speciálního typu rovnice  $y' = f(x)$  a důsledná počítačová vizualizace některých základních pojmů. Pro vlastní výuku numerického řešení je navrhována vizualizace algoritmů jednotlivých metod řešení formou sekvence vhodných snímků, ze kterých je patrný postup a význam jednotlivých kroků řešení.

## Literatura

- [1] Příkrýl P: *Numerické metody matematické analýzy*. MŠVT sešit XXIV. Praha, SNTL 1988.

# JAK ODNOWIĆ FRONT EKSPLOATACYJNY?

Anna Manowska

**Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Wydział Górnictwa  
i Geologii, Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 42 – 100 Gliwice, Polska  
E-mail: amanowska@polsl.pl**

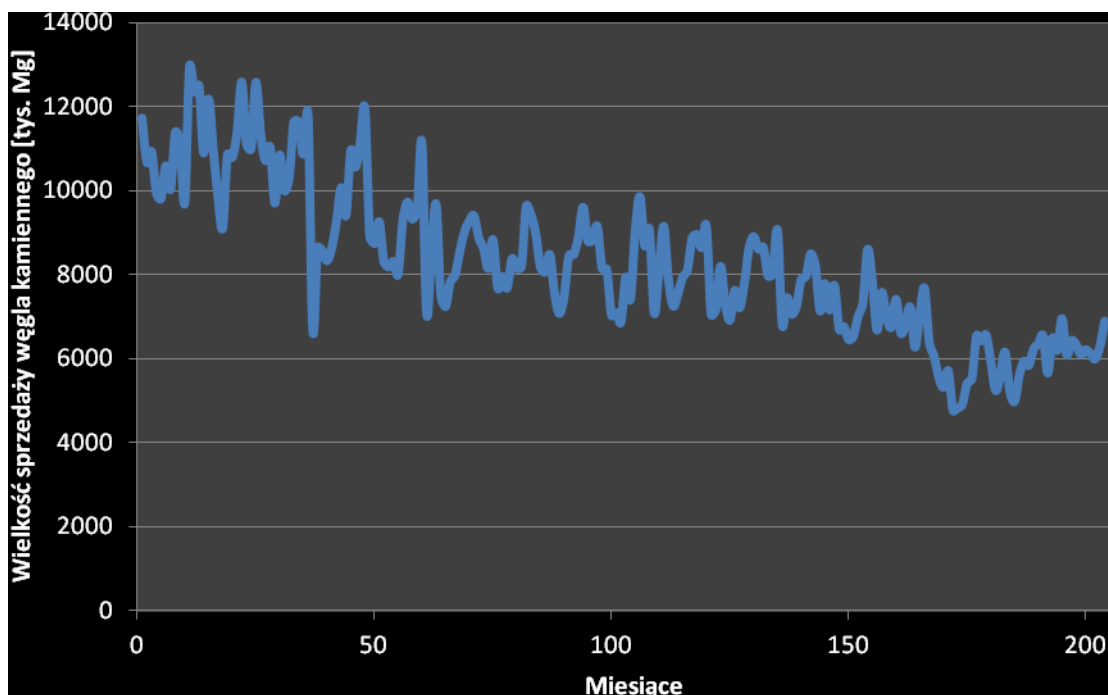
***Abstract:** Currently, an important issue is to ensure the energy security of the country, and here is an important role of coal. The analysis of the 16 years of coal sales, but also of mining ( which is not shown in detail in this paper), shows that the sector has undergone a series of effective reforms enabling Polish mining industry to compete in the free market. Analyzing time series of coal mining it can be seen that the trend is of linear decreasing type. However, the sales of coal increase. Thus, there is a reason to fear that Polish producers will not be able to meet the market demand for this resource, thus reducing the energy security of our country*

## **Wprowadzenie**

Transformacja rynku węgla kamiennego rozpoczęta w latach 90 – tych spowodowała znaczne ograniczenie energochłonności procesów produkcyjnych przy zachowaniu w okresie rocznym dużych wahań zapotrzebowania na węgiel kamienny (węgiel w znacznej części jest towarem sezonowym). Niezbędne zatem staje się rozważenie kwestii jaka powinna być zdolność frontu eksploatacyjnego, która zaspokoi coraz niższe, ale dalej zmienne zapotrzebowanie na węgiel kamienny. Odpowiedź na to pytanie ma również istotne znaczenie w analizie i ocenie bezpieczeństwa energetycznego kraju.

## **Analiza szeregu czasowego wielkości sprzedaży węgla kamiennego na rynku krajowym**

Do analizy wykorzystano dane miesięcznej sprzedaży węgla kamiennego na rynku polskim od roku 1995 do roku 2011. Z analizy statystycznej wynika, że średnia wartość sprzedaży w tych latach kształtowała się na poziomie 8288 Mg ze zmiennością wynoszącą 22%. Zatem uzasadnione staje się wykonanie prognozy ostrzegawczej, gdyż współczynnik zmienności dowodzi o występowaniu losowości [1]. Dla prawidłowego funkcjonowania zakładu górniczego ważna jest zatem informacja o tendencji kształtowania się sprzedaży w najbliższych latach.



Rys. 1 Sprzedaż węgla kamiennego na rynku polskim

W procesie planowania ważne miejsce zajmują metody prognozowania, które informują „planistę” jaka prawdopodobnie będzie chłonność rynku węglowego przy zachowaniu dotychczasowych strategii rozwoju gospodarczego [2]. Do tworzenia strategii rozwoju gospodarki krajowej niezbędne staje się wykorzystanie matematycznych metod prognozowania. To uzasadnia podjęcie prac badawczych związanych z wypracowaniem metod i technik prognostycznych, sprzężonych z opracowaniem modelu wielkości sprzedaży węgla kamiennego, dzięki któremu można prognozować w miarę wiarygodne wielkości.

Decyzja o kwalifikacji prognozy jest zawsze podejmowana na podstawie danego szeregu czasowego zmiennej i zależy od liczby oraz od częstotliwości obserwacji. Ponadto decyzje są podejmowane zawsze na podstawie najlepszego z otrzymanych modeli danej zmiennej [1].

Pierwszym etapem budowy modelu było określenie, czy szereg sprzedaży jest przewidywalny i czy ma monotoniczną tendencję rozwojową. W tym celu wykorzystano analizę współczynnika korelacji rang Spearmana, który określony jest zależnością [3]:

$$R_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (t_i - r_i)^2}{n(n^2 - 1)} = 0,86$$

gdzie:

$R_s$  - współczynnik korelacji rang Spearmana

$t$  - indeks czasu

$r_t$  - ranga dla wartości sprzedaży węgla kamiennego

$n$  - wielkość próby statystycznej

W odróżnieniu od współczynnika korelacji Pearsona, który mierzy tylko liniową zależność między zmiennymi, korelacja rangowa pokazuje dowolną monotoniczną zależność (także nieliniową). Model korelacji rangowej zawiera szerszą klasę zależności niż model klasycznego współczynnika korelacji, nie obejmuje jednak wszystkich możliwych zależności. Na przykład zależność okresowa – sezonowość - nie jest wykrywana ani przez korelację Pearsona, ani Spearmana.

Jako metoda rangowa, korelacja Spearmana jest w niewielkim tylko stopniu wrażliwa na obserwacje odstające, a zależy wyłącznie od uporządkowania zaobserwowanych wartości. Może zatem być stosowany do dowolnych zmiennych, których wartości można uporządkować rosnąco. Klasyczny współczynnik korelacji nie ma sensownej interpretacji dla zmiennych na skali porządkowej, gdyż uzależniony jest od różnic między wartościami zmiennych, które dla cech porządkowych nie są określone.

Wartość krytyczną, weryfikującą słuszność hipotezy o monotoniczności weryfikowano na poziomie  $\alpha=0,05$  oraz 203 stopniach swobody, odczytuje się z rozkładu t-Studenta i wartość ta wynosi 1,97. Ze względu na fakt, że wartość krytyczna jest większa od wartości empirycznej należy odrzucić hipotezę o monotonicznej tendencji rozwojowej.

Zatem kolejnym krokiem było określenie, czy zakłady górnicze znajdują się w niekorzystnej sytuacji gospodarczej w dziedzinie zbytu. Do tego celu określono trend i linie kontrolne, ale tylko dla obserwacji z lat 1995-2010 pozostawiając rok 2011 do kontroli sytuacji.

Równanie trendu ma postać, a analizę istotności współczynników równania umieszczono w tabeli.

$$\hat{y}_t = -27t + 11055$$

Tabela 1  
Statystyki zwrócone przez funkcję REGLINP()

OPIS	WARTOŚCI		OPIS
<b>b</b>	11055,00	-27,00	<b>a</b>
<b>D(b)</b>	139,00	1,25	<b>D(a)</b>
<b>R<sup>2</sup></b>	0,72	960,75	<b>s</b>
<b>F</b>	480,40	190	<b>Liczba stopni swobody</b>

Źródło: opracowanie własne

Z otrzymanych wyników obliczeń wyznaczono statystyki służące do badania istotności parametrów modelu, dla których wartość krytyczną określono na podstawie funkcji Excela ROZKŁAD.T.ODW( $\alpha$ ; 190-1-1). Dla poziomu istotności  $\alpha=0,05$   $t_{\alpha}=1,974$ , tak więc:

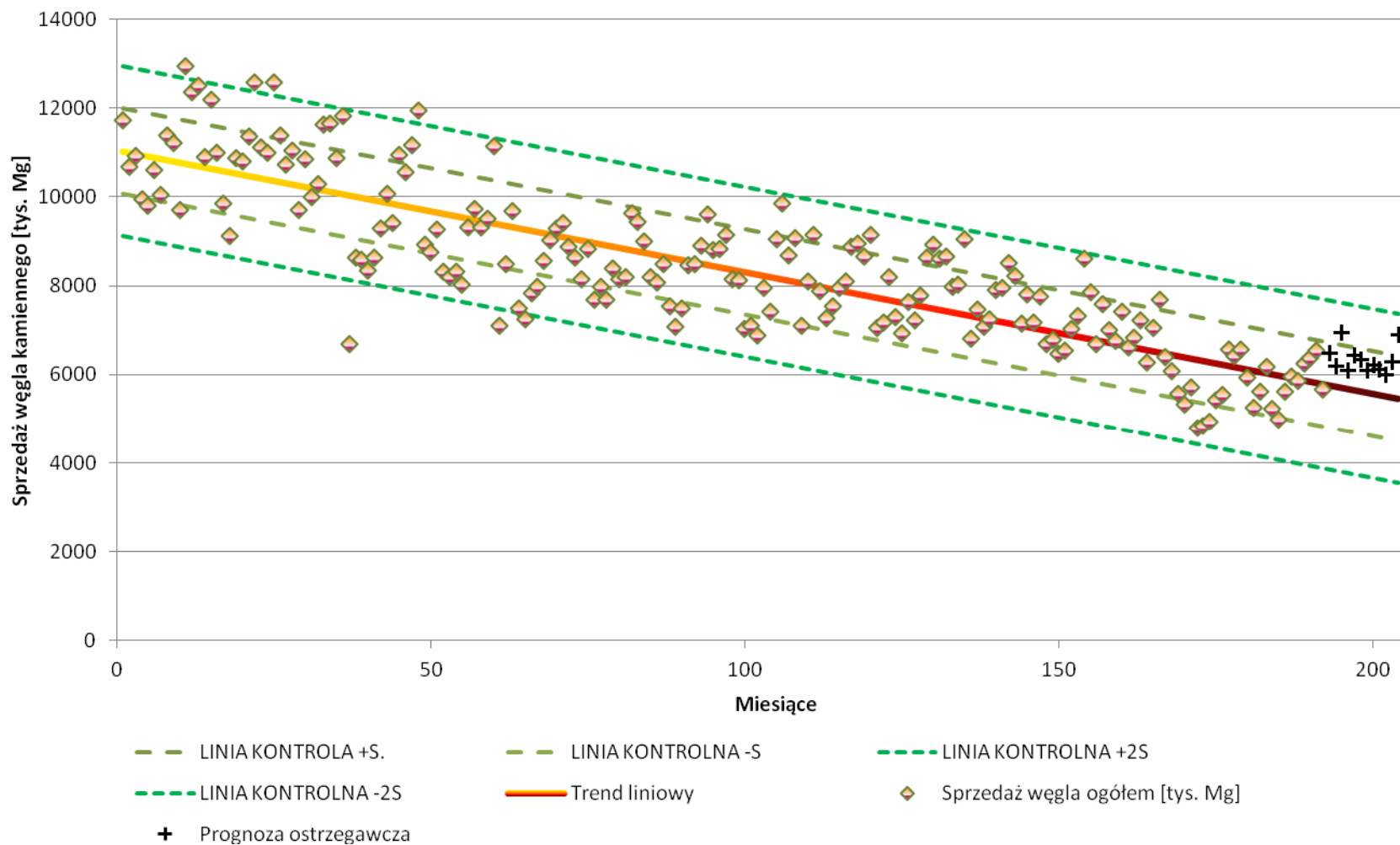
$$t(a) = \frac{|-27|}{1,25} = 21,92 - \text{parametr istotny}$$

$$t(b) = \frac{|11053|}{189} = 79,41 - \text{parametr istotny}$$

Przeprowadzono również ocenę istotności współczynnika determinacji  $R^2$  korzystając ze statystycznej funkcji Excela ROZKŁAD.F.ODW(), gdzie wartość krytyczną  $F_{\alpha}$  odczytano dla  $m_1=1$  i  $m_2=190-1-1=188$ . Wartość ta dla poziomu istotności  $\alpha=0,05$  wynosi  $F_{\alpha}=3,8909$ . Ponieważ wyznaczona przez funkcję REGLINP statystyka  $F=480,40$  i jest ona większa od wartości krytycznej  $F_{\alpha}$ , więc hipotezę  $H_0$  należy odrzucić, co oznacza, że dopasowanie modelu do danych empirycznych jest dobre. Zatem interpretacja graficzna sytuacji przedstawiona jest na rysunku nr 2.

#### **Prognoza ostrzegawcza**

Zatem trend ma charakter malejący i statystycznie istotny o czym dowodzi statystyka Fischera - Snedecora, a zmienna z punktu widzenia producenta jest stymulantą. Można stwierdzić, że w ciągu tych minionych 15 lat występowała niepomyślna sytuacja gospodarcza w dziedzinie zbytu węgla (jest to stwierdzenie odnoszące się do przeszłości). Zatem należy sprawdzić, czy niekorzystna sytuacja utrzyma się w przyszłości. Na wykresie kontrolnym umieszczono wszystkie dane z 16 – tu lat i pojawienie się nowych punktów na wykresie z roku 2011 utworzyło ciąg 12 obserwacji znajdujących się powyżej linii centralnej. Powoduje to odrzucenie hipotezy o stałości tendencji rozwojowej na rzecz hipotezy o zmianie tej tendencji, i to o zmianie w kierunku wzrostu sprzedaży.



Rys. 2 Wykres tendencji rozwojowej sprzedaży węgla kamiennego wraz z liniami kontrolnymi.

## **Wnioski końcowe**

Aktualnie ważnym tematem jest zapewnienie bezpieczeństwa energetycznego kraju, a tu ważne miejsce zajmuje węgiel. Analiza 16-tu lat szeregu sprzedaży, ale i również wydobycia co w niniejszym opracowaniu nie jest szczegółowo pokazane, obrazuje, że sektor ten przeszedł sporo efektywnych reform doprowadzając polskie górnictwo do zdolności do konkurowania na wolnym rynku. Analizując szereg czasowy wydobycia węgla kamiennego można zauważyć, że tendencja rozwojowa ma charakter liniowy malejący. Natomiast sprzedaż węgla kamiennego wzrasta. Zatem istnieje uzasadniona obawa, że polscy producenci nie będą w stanie zaspokoić zapotrzebowania rynku na ten surowiec, obniżając tym samym bezpieczeństwo energetyczne naszego kraju. Zatem znając prognozowane wielkości jak i sprzedaży, jak i wydobycia można dostosować szereg istotnych parametrów funkcjonowania zakładu górniczego, jak dobowe wydobycie z jednej ściany, które wpływa również na sprawność techniczną, technologiczną i organizacyjną, natężenie robót korytarzowych, które ocenia odtwarzane na skutek wybierania frontu eksploatacyjnego, liczbę równocześnie czynnych ścian, które jest miarą koncentracji wydobycia, wydajność ogólną, która jest oceną pracy i skuteczności systemu motywacji oraz polityki kadrowej, koszt jednostkowy, który obrazuje efektywność zarządzania rzeczowymi i osobowymi czynnikami produkcji, oraz średnią płacę, która jest ekwiwalentem za wykonaną pracę [4].

## **Literatura:**

- [1] Cieślak M: Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania. Wydawnictwo PWN, Warszawa 2011
- [2] Przybyła H., Wodarski K., Baron K.: Optymalne wykorzystanie zdolności produkcyjnych i możliwości inwestycyjnych w sektorach paliw stałych i energetyki w Polsce do roku 2015, Wiadomości Górnicze 4/2000
- [3] Żurowska J.: Prognozowanie przewozów. Modele, metody, przykłady, Wydawnictwo Politechnika Krakowska, Kraków 2005
- [4] Przybyła H.: Przedsiębiorstwo górnicze – przedsiębiorstwem przyszłości?



# WYZNACZENIE WARTOŚCI PARAMETRÓW TEORII GEOMETRYCZNO- CAŁKOWEJ W OPARCIU O OBNIŻENIA ZAREJESTROWANE NA PUNKTACH ROZPROSZONYCH

Aleksandra MIERZEJOWSKA, Jolanta KOWALSKA-KWIATEK

Wydział Górnictwa i Geologii, Politechnika Śląska  
ul. Akademicka 2, 44-100 Gliwice

E-mail: [Aleksandra.Mierzejowska@polsl.pl](mailto:Aleksandra.Mierzejowska@polsl.pl), [Jolanta.Kowalska-Kwiaterek@polsl.pl](mailto:Jolanta.Kowalska-Kwiaterek@polsl.pl)

**Streszczenie:** Decydujące znaczenie przy wykonywaniu prognoz deformacji terenu górniczego ma prawidłowy dobór wartości parametrów teorii. W metodach bazujących na założeniach teorii geometryczno-całkowych podstawowymi parametrami są: parametr zasięgu wpływów  $tg\beta$ , parametr opisujący sposób kierowania stropem  $a$  oraz parametr określający szerokość obrzeża eksploatacyjnego  $A_{obr}$ . W niniejszym artykule określono wartości tych parametrów w oparciu o wyniki pomiarów zarejestrowanych na punktach rozproszonych.

**Abstract:** The appropriate selection of theory parameters at preparation prognosis of mining ground deformation is of key importance. The basic parameters in methods based on the geometric-integral assumptions are: an influence range parameter  $tg\beta$ , parameter describing mean of roof control  $a$  and a rim parameter  $A_{obr}$ . This article describes values of above mentioned parameters on the basis of measurement results registered on dispersal points.

## 1. Wstęp

Prognozowanie wskaźników opisujących deformacje terenu górniczego wymaga określenia wartości parametrów, charakteryzujących specyficzne dla każdego rejonu warunki geologiczno-górnictwa. W przypadku metod prognozowania, bazujących na teoriach geometryczno – całkowych, wyróżnić można trzy podstawowe parametry: parametr określający rozproszenie wpływów w górotworze, parametr określający sposób wypełnienia zrobów oraz parametr określający szerokość obrzeża eksploatacyjnego.

W ujęciu klasycznym wartości tych parametrów wyznacza się w oparciu o wyniki obserwacji opisujących profile pełnych ustalonych niecek obniżeniowych. Współcześnie, głównie ze względu na znaczącą głębokość prowadzenia eksploatacji oraz

coraz bardziej skomplikowane warunki geologiczno-górnice, nie obserwuje się pełnych niecek obniżeniowych, dlatego do wyznaczania parametrów teorii wpływów stosuje się programy komputerowe, które wyznaczają ich wartości w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów, dopasowując model teoretyczny do wyników obserwacji. Programy te teoretycznie umożliwiają wyznaczenie parametrów w oparciu o pomiary ujmujące wpływy eksploatacji o dowolnym kształcie. Ponadto punkty pomiarowe mogą być usytuowane bardzo dowolnie względem pola eksploatacyjnego, w szczególności mogą być punktami rozproszonymi, niezgrupowanymi wzdłuż linii obserwacyjnych.

W niniejszym artykule określono wartości parametrów:  $tg\beta$ ,  $A_{obr}$ ,  $a$  na podstawie pomiarów zarejestrowanych na punktach rozproszonych.

## 2. Opis obniżeń terenu górnicego

### 2.1 Przyjęty model obliczeniowy

W niniejszej pracy do opisu deformacji terenu górnicego wykorzystano metodę zaproponowaną przez J. Białka [1]. W metodzie tej obniżenie  $w_k$  opisane jest wzorem:

$$w_k = (1 - a_w)w(r_1) + a_w w(r_2) - A_1 \left(2 + \frac{A_3}{2}\right) \frac{w(r_1)[r_1 \gamma(r_1)]^2}{A_3 [0,5w(r_1) + 0,5w(r_2)]^2 + [r_1 \gamma(r_1)]^2} \quad (1)$$

gdzie:

$A_1 = A_{obr}$  – parametr ujmujący asymetrię profilu niecki obniżeniowej;

$w(r_1)$ ,  $w(r_2)$  – obniżenia obliczone ze wzoru S. Knothego [2] dla promieni rozproszenia wpływów  $r_1$  i  $r_2$ ;

$A_3 = 6,667$  – bezwymiarowy parametr ujmujący wpływ wcześniejszej eksploatacji na wielkość obniżenia;

$\gamma(r_1)$  – odkształcenie oktaedryczne wyznaczone [1] dla  $A_2 = 0,25$  (parametr określający udział drugich pochodnych obniżenia w wielkości odkształcenia oktaedrycznego) ze wzoru:

$$\gamma^2 = \left[ A_2 \cdot r \cdot \left( \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial w_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_k}{\partial y} \right)^2 \quad (2)$$

$$a_w = 0,4 - 1,25 A_1;$$

$$r_1 - \text{krótszy promień zasięgu wpływów}; \quad r_1 = \frac{h}{tg\beta} F(A_1);$$

$$r_2 - \text{dłuższy promień zasięgu wpływów}; \quad r_2 = 2r_1.$$

Wartości funkcji  $F(A_1)$  przedstawiono w tabelicy 1.

Tabela 1

Wartość funkcji  $F(A_1)$  [1]

$A_1$	0	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300
$F(A_1)$	0,800	0,844	0,916	1,003	1,099	1,200	1,303

Obniżenie końcowe w metodzie J. Białka stanowi sumę trzech składników tj.: obniżeń liniowych, obliczonych dla dwóch różnych promieni rozproszenia wpływów,

oraz nieliniowej poprawki  $\Delta w$ . Wprowadzenie dwóch różnych promieni rozproszenia wpływów umożliwia rozróżnienie tzw. wpływów bliskich opisywanych przez  $r_1$  oraz wpływów dalekich opisywanych przez  $r_2$ . Pomimo tego, że wielkości  $r_1$  i  $r_2$  zależą od parametru  $A_1$ , maksymalne nachylenie występujące w rejonie eksploatacji jest takie samo jak przy jego obliczaniu wzorem S. Knothego.

## 2.2 Charakterystyka parametrów przyjętego modelu obliczeniowego

Dla opisanie niecki obniżeniowej przy pomocy wzoru (1), oprócz znanej geometrii eksploatacji trzeba znać (przyjąć lub wyznaczyć z pomiarów) wartości 3 parametrów:

- $a$  – współczynnika osiadania;
- $tg\beta$  – parametru występującego we wzorze S. Knothego;
- $A_{obr} \cong d/H$  – parametru obrzeża.

W ujęciu klasycznym wartości tych parametrów wyznacza się niezależnie od pozostałych, w oparciu o wyniki obserwacji opisujących profile pełnych niecek obniżeniowych. Znając maksymalne obniżenie  $w_{max}$  pełnej lub nadpełnej niecki obniżeniowej oraz średnią grubość  $g$  wybieranego pokładu lub warstwy, wartość współczynnika eksploatacyjnego  $a$  wyznaczamy ze wzoru:

$$a = \frac{w_{max}}{g} \quad (3)$$

Znając wartość maksymalnego nachylenia  $T_{max}$ , głębokość eksploatacji  $H$  oraz wartość maksymalnego obniżenia pełnej niecki obniżeniowej  $w_{max}$ , wartość parametru  $tg\beta$  obliczymy z zależności:

$$tg\beta = \frac{H \cdot T_{max}}{w_{max}} \quad (4)$$

Kolejnym parametrem jest parametr  $A_{obr}$  powodujący przesunięcie profilu obliczeniowego w stronę zrobów. Wartość parametru  $A_{obr}$  obliczamy za J. Zychem [4] ze wzoru:

$$A_{obr} = A_1 = \frac{-\Delta w(x=0)}{w_{max}} = \frac{0,5 \cdot w_{max} - w(x=0)}{w_{max}} \quad (5)$$

Powyższe wzory definiują parametry  $a$ ,  $tg\beta$ ,  $A_{obr}$  w oparciu o kształt pełnej niecki obniżeniowej.

W praktyce, głównie wskutek znacznej głębokości współcześnie prowadzonych eksploatacji górniczych, bardzo rzadko dysponujemy pomiarami linii obserwacyjnych obrazującymi pełne niecki obniżeniowe, gdzie możliwe byłoby korzystanie ze wzorów (3), (4), (5).

Sposobem pozwalającym na wykorzystanie szerszego spektrum pomiarów geodezyjnych, np. pomiarów obrazujących niepełne niecki obniżeniowe, obniżenia spowodowane eksploatacją pól o złożonych kształtach, pomiarów prowadzonych na punktach rozproszonych, jest użycie odpowiednich programów komputerowych do wyznaczania parametrów teorii wpływów. Można tu przytoczyć programy autorstwa B. Drzęźli, J. Białka, E. Jędrzejca, W. Piwowarskiego.

W niniejszej pracy wartości parametrów teorii wpływów wyznaczano za pomocą programu TGB autorstwa J. Białka [1].

### 3. Wyznaczenie wartości parametrów $tg\beta$ , $A_{obr}$ , $a$ na podstawie wyników pomiarów

Wartości parametrów teorii prognozowania wyznaczono przy zastosowaniu programu komputerowego TGB autorstwa J. Białka [1], który oblicza parametry  $a$ ,  $tg\beta$  oraz  $A_{obr}$  w oparciu o dopasowanie obniżeń obliczonych przy użyciu wzoru (1) do obniżeń stwierdzonych pomiarami geodezyjnymi. Stosowanie tego programu wymaga wprowadzenia danych określających położenie punktów obserwacyjnych i wartości pomierzonych obniżeń w tych punktach oraz opisu geometrii pól eksploatacji górniczej będących przyczyną obserwowanych obniżeń. Dla uwzględnienia efektów aktywacji starych zrobów konieczne jest również wprowadzenie opisu eksploatacji dokonanej.

Kryterium wyznaczenia parametrów jest minimum wariancji resztowej  $B$  określonej wzorem:

$$B(a, tg\beta, A_{obr} \dots) = \sum_{i=1}^n [a \cdot w_i (tg\beta, A_{obr} \dots) - w_{pi}]^2 \quad (6)$$

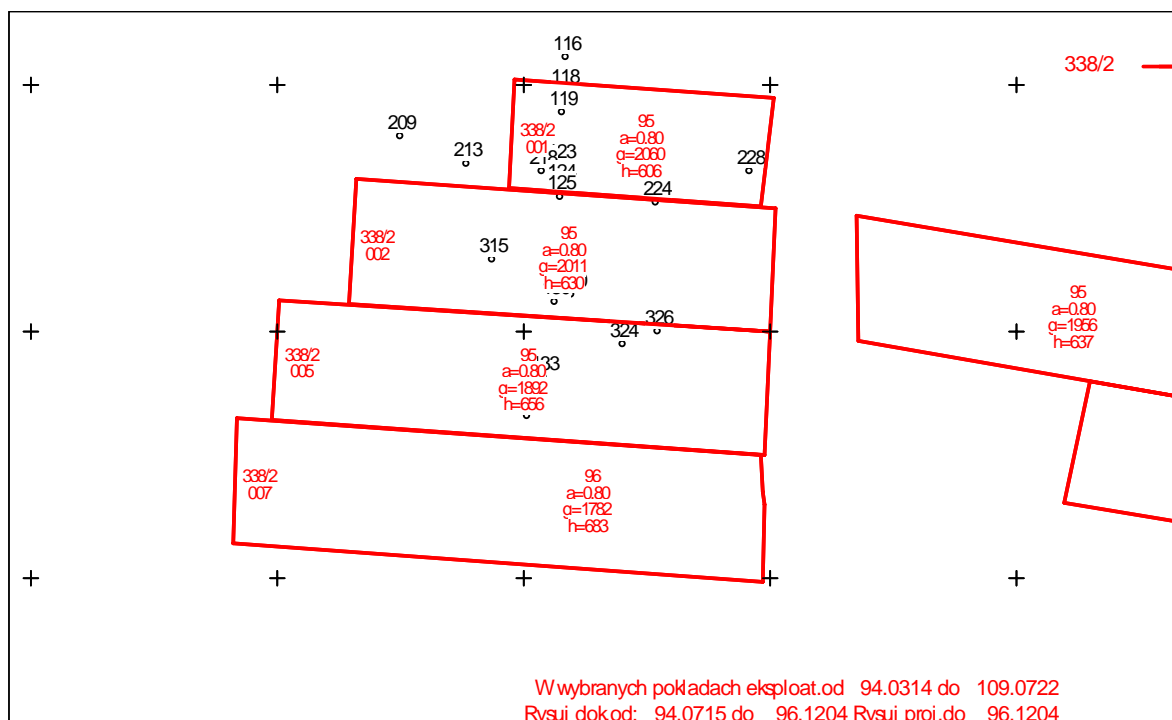
gdzie:

$n$  – liczba punktów pomiarowych;

$a \cdot w_i$  – teoretyczna wielkość obniżenia  $i$ -tego punktu pomiarowego obliczana wzorem (1);

$w_{pi}$  – pomierzone obniżenie  $i$ -tego punktu.

W artykule przeanalizowano wyniki pomiarów prowadzonych na 20 punktach zlokalizowanych nad zrobami ścian: 001, 002, 005, 007 w okresie od 1994.07.15 do 1996.12.04. Eksploatację prowadzono z zawałem skał stropowych na średniej głębokości wynoszącej ok. 640 m. Miąższości parcel były równe ok. 2,0 m w przypadku ścian: 001 i 002, ok. 1,9 m w przypadku ściany 005 oraz ok. 1,8 m w przypadku ściany 007. Na rys. 1. przedstawiono usytuowanie punktów pomiarowych względem krawędzi eksploatacji dokonanej.

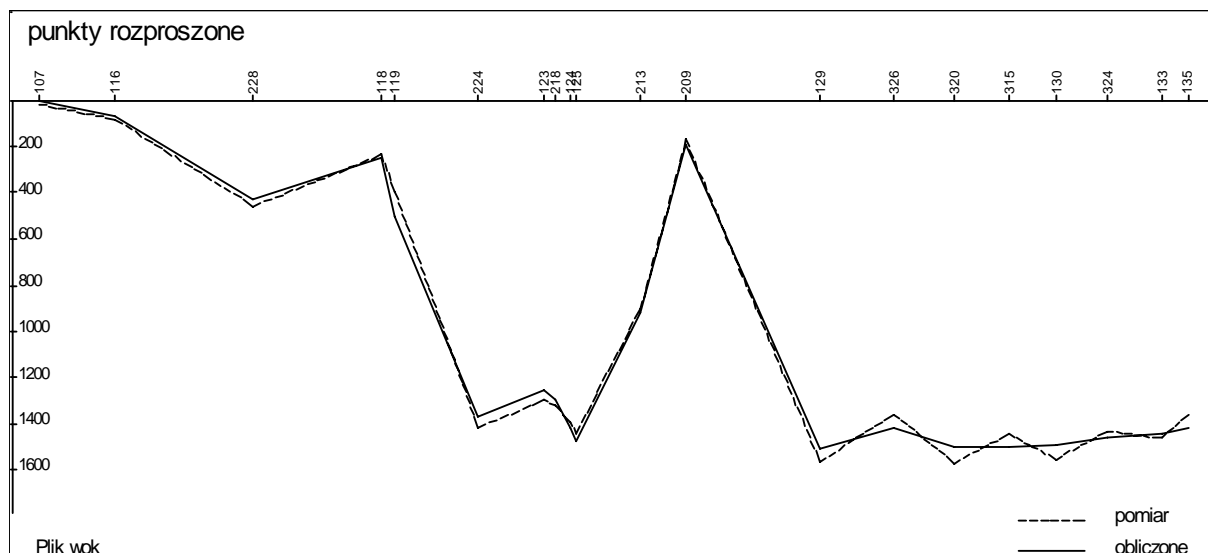


**Rys. 1. Usytuowanie punktów pomiarowych względem krawędzi eksploatacji dokonanej w okresie od 1994.07.15 do 1996.12.04**

W wyniku przeprowadzonego dopasowania uzyskano następujące wartości parametrów:

- współczynnik osiadania  $a=0,780$ ;
- parametr zasięgu wpływów  $tg\beta=2,760$ ;
- parametr obrzeża  $A_{obr}=0,280$ .

Odchylenie standardowe wyniosło  $\sigma_w=45,9$  mm oraz współczynnik korelacji  $r=0,9966$ . Wyniki dopasowania przedstawiono na rys. 2.



**Rys. 2. Wyniki dopasowania rzeczywistych i obliczonych teoretycznie obniżek punktów obserwacyjnych**

Uzyskane wyniki świadczą o tym, że również w oparciu o pomiary prowadzone na punktach rozproszonych możliwe jest wyznaczenie z dużą dokładnością wartości parametrów przyjętego modelu obliczeniowego.

#### 4. Podsumowanie

Prawidłowy dobór parametrów teorii warunkuje uzyskanie zadowalających wyników prognozy deformacji terenu górniczego. Aktualnie pomiary prowadzone na punktach rozproszonych bardzo często są jedynymi dostępnymi pomiarami, umożliwiającymi wyznaczenie wartości parametrów teorii wpływów. W niniejszym artykule rozpatrzono jeden z takich przypadków. Wykorzystano obserwacje geodezyjne prowadzone na dowolnie usytuowanych punktach, zastabilizowanych na terenie jednej z kopalń GZW. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano następujące wartości parametrów teorii:  $tg\beta = 2,760$ ,  $a = 0,780$ ,  $A_{obr} = 0,280$ . Wysoka zgodność dopasowania obniżek obliczonych wzorem (1) J. Białka do obniżek stwierdzonych pomiarami ( $\sigma_w=45,9$  mm,  $r=0,9966$ ) pozwalają wnioskować, że również tego typu dane pomiarowe można wykorzystać do wyznaczania parametrów teorii wpływów.

#### LITERATURA

1. Białek J.: *Algorytmy i programy komputerowe do prognozowania deformacji terenu górniczego*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2003.

2. Knothe S.: *Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej*. Wydawnictwo Śląsk. Katowice 1984.
3. Mierzejowska A.: *Wpływ liczby i usytuowania punktów pomiarowych względem pola eksploatacyjnego na dokładność wyznaczenia wartości parametrów modelu opisującego obniżenie terenu górniczego*. Praca doktorska niepublikowana. Gliwice 2010.
4. Zych J.: *Metoda prognozowania wpływów eksploatacji górniczej na powierzchnię terenu uwzględniająca asymetryczny przebieg procesu deformacji*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo z.164, Gliwice 1987.

# POVRCHOVÉ NAPĚTÍ JAKO MOTIVAČNÍ PRVEK VE VÝUCE FYZIKY

Vladislav Navrátil, Jiřina Novotná

Katedra fyziky PdF MU, Poříčí 7, 63500 Brno  
Katedra matematiky PdFMU, Poříčí 31, 63500 Brno  
E-mail : [navratil@ped.muni.cz](mailto:navratil@ped.muni.cz) [novotna@ped.muni.cz](mailto:novotna@ped.muni.cz)

**Abstrakt:** V současné době, charakterizované klesajícím zájmem mladé generace o přírodní vědy fyziku a chemii, hraje významnou roli motivace. Ta se týká všech žáků, včetně nadaných. Předložená práce může sloužit jako inspirace pro projektovou práci z oblasti na rozhraní fyziky a chemie a týká se povrchového napětí kapalin (povrchové energie pevných látek).

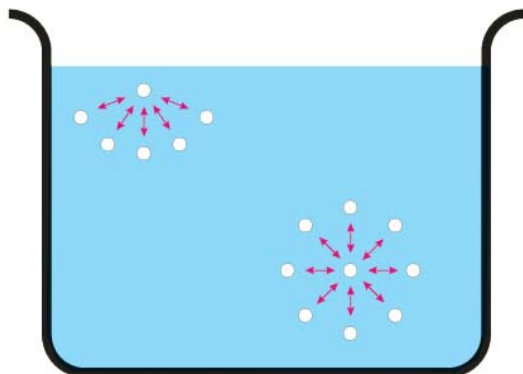
**Abstract:** In present times characterised by decreasing interest of young generation in physics and chemistry, plays an important role motivation. It concerns all pupils, including gifted ones. Our contribution can be an inspiration for project work in physics and chemistry. It deals with surface tension of liquids (surface energy of solids).  
text v angličtině

**Úvod.** Pod pojmem motivace chápeme „usměrnění našeho chování a jednání pro dosažení určitého cíle. Vyjadřuje souhrn všech skutečností – radost, zvědavost, pozitivní pocity a radostné očekávání, které podporují nebo tlumí jedince, aby něco konal, nebo nekonal“ [1]. Motivace hraje v současné době, charakterizované nezájmem mladých lidí o technické vědy a zejména o fyziku a chemii důležitou roli a týká se všech žáků, i těch nadaných (jestliže je nebudeme motivovat, nasměrují své nadání do jiné oblasti). Jednou z významných motivačních metod je projektová výuka, spočívající v samostatném komplexním zpracování určitého zajímavého téma. Příkladem takové velmi zajímavé oblasti může být povrchové napětí kapalin, se kterým se žáci zběžně seznamují na základní a střední škole.

## 1. Povrchové napětí kapalin (povrchová energie pevných látek)

Fyzika s chemií jsou přírodní vědy, které byly v minulosti jedinou vědou, a v současnosti se vyvíjejí v tak těsném kontaktu, že často nelze najít mezi nimi rozdíl (fyzikální chemie, chemická fyzika). Všimněme si jedné konkrétní oblasti, která je pro obě vědy velice důležitá – povrchového napětí kapalin (povrchové energie pevných látek). Tato vědní oblast je vysvětlována jak v učebnicích fyziky, tak i v učebnicích chemie, způsob přístupu a zejména obsah je však různý. Obecně se dá říci, že fyzikální učebnice na rozdíl od učebnic chemie tuto oblast nedocení, „ošidí“, nebo dokonce zcela pominou. Přitom povrchové napětí hraje velmi významnou roli v technické praxi, v domácnosti, v biologii a zemědělství a v meteorologii (flotace, mytí, praní, smáčení, broušení, kapilarita půdy a rostlin, tvorba mlhy, mraků, krup, atd.). Na jevu povrchového napětí je založena koloidní chemie, katalýza a další oblasti chemie a biologie [2-12].

Nezanedbatelný je i didaktický význam povrchového napětí. Teorie je poměrně názorná (Obr.1.) a jednoduchá a dá se dokumentovat jednoduchými a názornými pokusy a příklady z reálného života, které může každý sám demonstrovat (Obr.2 – 4)..



Obr.1. Vznik povrchového napětí kapalin

Obr.2



Obr.3.



Obr.4.

Obr.2 – 4. Jednoduché demonstrace jevu povrchového napětí kapalin

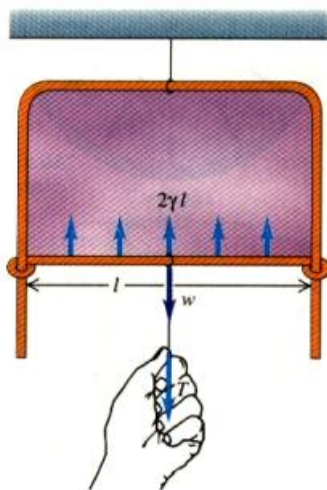
Fyzikální učebnice, jak již bylo řečeno, se často o povrchovém napětí vůbec nezmiňují, nebo mu věnují pouze několik stránek textu. Zpravidla uvádějí definici povrchového napětí jako poměr

$$\sigma = \frac{dF}{dl} = \frac{dW}{dS} \quad (1)$$

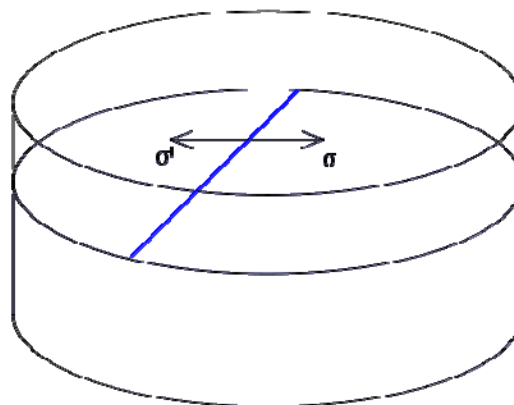
(kde  $dF$  je povrchová síla, působící na délku  $dl$  povrchu kapaliny a  $dW$  je povrchová energie, příslušející plošce  $dS$ , (viz Obr 5 a 6 ), model jeho vzniku, způsoby měření a některé pokusy. V seznamu učebnic je tato učební látka označena jako „tradice“(1,4–7 ,9-11,13).



Na rozdíl od učebnic fyziky učebnice fyzikální chemie věnují povrchovému napětí zaslouženě mnohem více pozornosti (14,15). V žádné z učebnic však není věnována pozornost vlivu prostřední nad rozhraním kapaliny (nebo pevné látky) na velikost povrchového napětí. Podle modelu na Obr.7 je prostředí nad rozhraním tvořeno plynem (např. vzduchem) a parami kapaliny a musí nutně ovlivnit povrchové napětí.



Obr.5.



Obr.6.

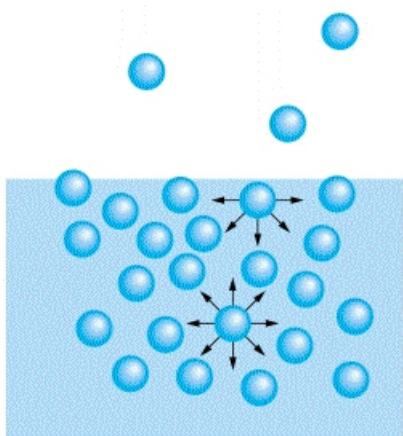
Obr.5, 6. K objasnění definice povrchového napětí.

Pokusme se kvalitativně odhadnout, na kterých parametrech prostředí bude napětí záviset. Zřejmě to bude poměr hustot obou prostředí ( $\rho_2/\rho_1$ ). Růst teploty  $T$  se projeví nejen v poklesu hustoty kapaliny, ale i vzrůstem hustoty par nad ní. Podobně tomu bude i se závislostí na barometrickém tlaku  $b$  vzduchu nad kapalinou a na veličině, kterou můžeme nazvat jako „těkavost“ kapaliny ( $\tau$ ). Lze tedy pro  $\sigma$  psát:

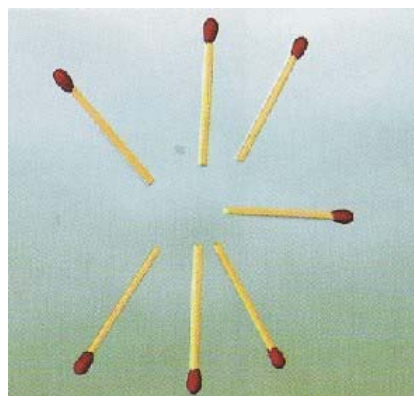
$$\sigma = f \left\{ \approx \frac{\rho_2}{\rho_1}, \approx \frac{1}{T}, \approx \frac{1}{b}, \approx \frac{1}{\tau}, \dots \right\} \quad (2)$$

Vliv tlaku a „těkavosti“ lze dokázat pomocí jednoduchého pokusu, se kterým se jistě už mnozí mimoděk setkali, v učebnicích však popsán není. Větší nádobu (demižon) pečlivě vymyjeme vodou. Poté zpozorujeme, že na jejím vnitřním povrchu zůstaly usazeny kapky vody. Protože jsou v klidu, platí rovnováha sil na ně působících, tj. síly tíhové směrem dolů, a síly povrchového napětí spolu s adhezí mezi kapičkami a sklem směrem nahoru (v místě styku kapičky s povrchem nádoby). Na kvalitě prostředí nad kapičkami závisí pouze síla povrchového napětí, takže kápneme-li do nádoby líh (funguje i se slivovicí), zjistíme, že většina kapiček sklouzne ke dnu nádoby, neboť síla povrchového napětí se zmenší (zvýší se hustota plynu nad kapičkami). Dá se očekávat, že podobně se projeví i vzrůst atmosférického tlaku uvnitř nádoby. Zde je však třeba uvážit její mechanickou pevnost, neboť zvýšení tlaku musí být dostatečné. Podobného jevu využívají i skláři při vrtání děr do skla (pečlivě omyté sklo umístí do vody, čímž sníží jeho povrchové napětí a sklo se při vrtání nerozbije).

Závislost povrchového napětí na čistotě kapaliny se dá jednoduše demonstrovat pokusem na Obr.8. Kápneme – li do prostoru u „paty“ zápalek kapičku saponátu nebo mýdla, zápalky se rozeběhnou (povrchové napětí se tam sníží). Naopak, kápneme-li tam kapičku cukerného roztoku, zápalky se k sobě přiblíží (povrchové napětí vzroste a přitáhne je k sobě).



Obr.7. Vliv prostředí nad kapalinou na její povrchové napětí.



Obr.8. K závislosti povrchového napětí na čistotě kapaliny.

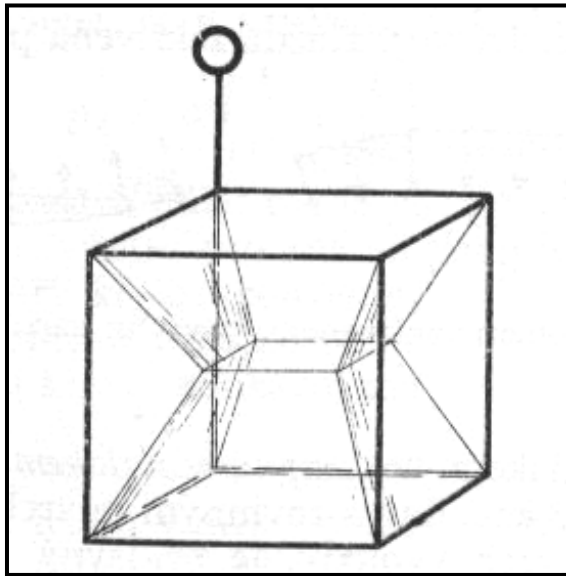
Seznam učebnic fyziky a chemie s vyznačením rozsahu kapitoly, pojednávající o povrchovém napětí.

1. Ilkovič, D.: Fyzika (1958) – 5 stran (tradiční).
2. Feynman, R.P. a kol.: The Feynman Lectures on Physics (1966) (nic)
3. Berkeley Physics Course (1958) (nic)
4. Hlavička A a kol.: Fyzika pro pedagogické fakulty (1971) – 17 stran (rozšířeno o pokusy)
5. Horák, Z., Krupka, F.: Fyzika (1976) – 5 stran (tradiční)
6. Hajko, V., Daniel – Szabó, J.: Základy fyziky (1980) – 8 stran (tradiční)
7. Swartz, C.E.: Phenomenal Physics (1981) – 7 stran (tradiční)
8. Krempaský, J.: Fyzika (1982) (nic)
9. Binko, J. a kol.: Fyzika stavebního inženýra (1983) – 3 strany (tradiční)
10. Giancoli, D.C.: General Physics (1984) – 8 stran (tradiční).
11. Matvějev, A.N.: Molekuljarnaja fizika (1987) – 9 stran (tradiční, mírně rozšířeno).
12. Ohanian, H.C.: Physics (1989) (nic)
13. Gubrecht, H.: Mechanik, Akustik, Wärme (1990) – 20 stran (rozšířeno o aplikace a příbuzné jevy, téměř ideální výklad).
14. Moore, W.J.: Fyzikální chemie (1972) – 39 stran (rozšířeno o vlastnosti roztoků, dynamické vlastnosti povrchů, adsorpci a elektrokapilaritu)
15. Kireev, V.A.: Kurz fizičeskoj chimii (1975) – 26 stran

## 2. Některé náměty pro projektovou výuku

Téma „Povrchové napětí kapali“, či „Povrchová energie pevných látek“ je tak rozsáhlé, že je možno je rozdělit na větší počet dílčích témat, řešitelných jak na středních školách, tak i na univerzitách. Uvedme návrh alespoň některých z nich:

- demonstrační pokusy na téma povrchové napětí kapalin,
- měření povrchového napětí kapalin,
- měření povrchové energie pevných látek,
- teplotní závislost povrchového napětí kapalin,
- závislost povrchového napětí na čistotě a na prostředí nad kapalinou,
- závislost povrchové energie na postupné změně stavu povrchu pevné látky (fotokatalýza),
- povrchové napětí v chemii,
- povrchové napětí v biologii,
- povrchové napětí v technické praxi a zemědělství,
- atmosférické jevy a povrchové napětí.



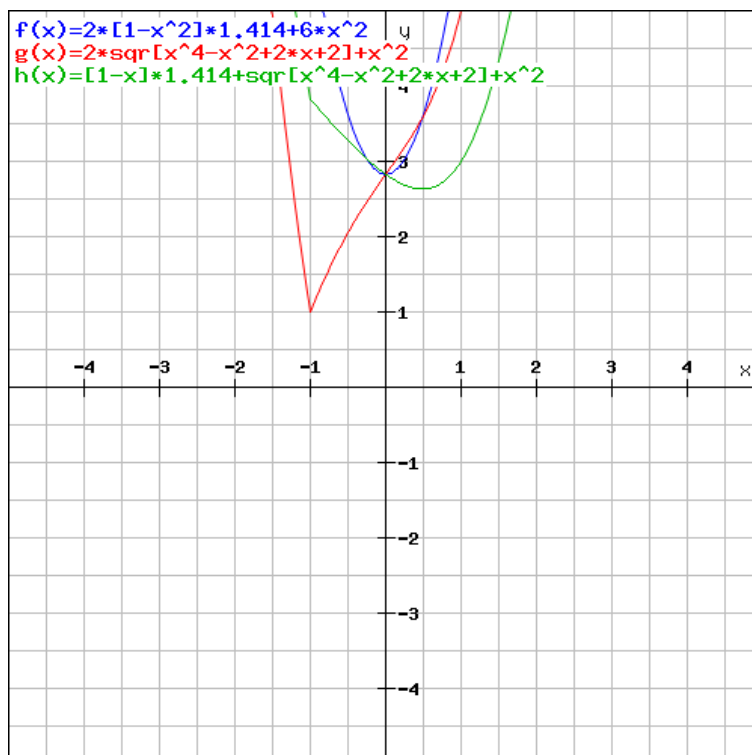
1.  $S = 2\sqrt{2}$
2.  $S = 2(1 - x^2)\sqrt{2} + 6x^2$
3.  $S = 2\sqrt{x^4 - x^2 + 2x + 2} + x^2$
4.  $S = (1 - x)\sqrt{2} + \sqrt{x^4 - x^2 + 2x + 2} + x^2$

Obr.9a)

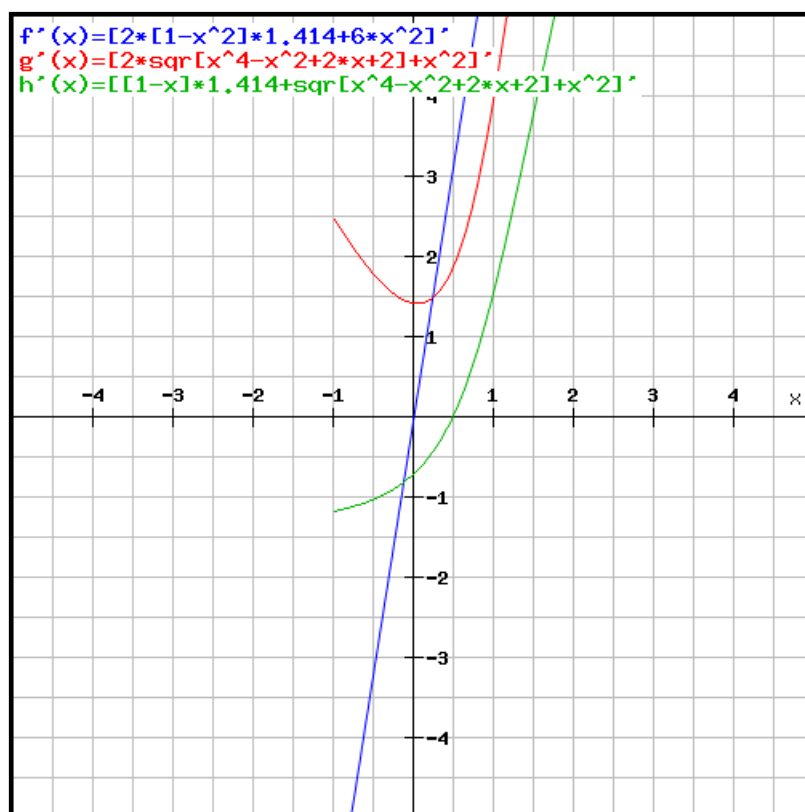
Obr.9b)

Minimální plocha, vytvořená na drátěné kostře ve tvaru krychle. Hrana krychle  $a = 1$ .

Velmi zajímavé jsou i pokusy, související s velikostí minimální plochy geometrických obrazců. Podle definice povrchového napětí (1) se kapaliny snaží zaujmout tvar s minimálním povrchem. Když například vložíme do vodního roztoku saponátu drátěnou kostru ve tvaru krychle, měla by vytvořit blána geometrický útvar s minimální plochou (Obr.9a). Nejčastěji skutečně vznikne geometrický útvar, zobrazený na tomto obrázku (vodorovný čtverec o straně  $x$ , jehož plocha je dána vztahem 3 na Obr.9b). Někdy se však stane, že uprostřed vznikne krychlička o straně  $x$  (vztah 2), nebo útvar, podobný Obr.9a, ovšem se středovým čtvercem, orientovaným ve svislém směru (vztah 4). Příklad, charakterizovaný vztahem 1 odpovídá případu, kdy se plochy uprostřed krychle stýkají v jediném bodě (experimentálně ani teoreticky nenastává). Otázkou je, proč nejčastěji nastává případ, charakterizovaný vztahem 2 (vodorovná ploška  $x^2$ ) a graficky křivkou s inflexním bodem a nikoliv případ 4, popsáný křivkou s typickým minimem. Vysvětlení je třeba hledat v tom, že naše úvahy jsou stavěny na souvislosti mezi velikostí plochy a vnitřní energií systému (blány). Přírodní systémy se však řídí minimem volné energie  $E = U - T.S$  a k vysvětlení bude třeba uvážit i vliv změny entropie zkoumaných geometrických útvarů.



Obr10a. Závislost plochy povrchu obrazce na proměnné x. Vztah 2 – modrá křivka, vztah 3 – červená křivka, vztah 4 – zelená křivka.



Obr.10b. Derivace křivek z Obr.10a.

## Poděkování.

Příspěvek byl napsán v rámci řešení operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost: Moduly jako prostředek inovace v integraci výuky moderní fyziky a chemie, Reg.č.: CZ.1.07/2.2.00/28.0182

## Literatura.

- [1] TRNOVÁ, E, TRNA, J. *Influence of connectivism on science education with emphasis on experiments*. In Bruguier, C., Tiberghien, A. & Clément, P., (co-ed. Marzin, P. & Lavonen, J.). *E-book proceedings of the ESERA 2011 conference: Science Learning and Citizenship. Part 4*. Lyon, France: European Science Education Research Association, 2012. od s. 83-89, 7 s. ISBN 978-9963-700-44-8.
- [2] ILKOVIČ, D.: *Fyzika* (1958)
- [3] HLAVIČKA, A a kol.: *Fyzika pro pedagogické fakulty* (1971)
- [4] HORÁK, Z., KRUPKA, F.: *Fyzika* (1976)
- [5] HAJKO, V., DANIEL – SZABÓ, D.: *Základy fyziky* (1980)
- [6] SWARTZ C.E.: *Phenomenal Physics* (1981)
- [7] BINKO, J. a kol.: *Fyzika stavebního inženýra* (1983)
- [8] GIANCOLI, D.C.: *General Physics* (1984).
- [9] MATVĚJEV, A.N.: *Molekuljarnaja fizika* (1987)
- [10] GUBRECHT, H.: *Mechanik, Akustik, Wärme* (1990) .
- [11] MOORE, W.J.: *Fyzikální chemie* (1972)
- [12] KIREEV, V.A.: *Kurz fizičeskoj chimii* (1975)

*Prof. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc.*  
Katedra fyziky PdFMU  
Poříčí 7, 603 00 Brno  
Tel: 549495753  
E-mail: [navratil@ped.muni.cz](mailto:navratil@ped.muni.cz)

*PhDr. Jiřina Novotná, PhD.*  
Katedra matematiky PdFMU  
Poříčí 31, 603 00 Brno  
Tel: 549491663  
E-mail: [novotna@ped.muni.cz](mailto:novotna@ped.muni.cz)

# E-LEARNINGOVÝ KURS OPAKOVÁNÍ ZÁKLADŮ STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Marie Polcerová

Ústav fyzikální a spotřební chemie, Fakulta chemická, VUT v Brně,  
Purkyňova 118, 612 00 Brno  
E-mail: polcerova@fch.vutbr.cz

**Abstrakt:** Znalosti z matematiky jsou u studujících prvního ročníku, převážně kombinované formy studia, na nedostatečné úrovni. Studující tudíž nemohou plynule navázat na své vědomosti a dovednosti, což pak vede k tomu, že studium na vysoké škole nezvládají a předčasně ukončují. Na Fakultě chemické Vysokého učení technického v Brně se pokoušíme tento problém řešit tím, že nabízíme budoucím posluchačům, ještě před začátkem zimního semestru, e-learningový kurs "Opakování základů středoškolské matematiky". Příspěvek se zabývá právě tímto kursem, jeho obsahem, formou, organizací a prvními zkušenostmi.

**Abstract:** Students of the first semester, predominantly students of combine form of study, do not have adequate level of knowledge in Mathematics. Students cannot properly continue in their knowledge and skills which have the effect that they cannot handle the study on university and prematurely finish study. At the Faculty of Chemistry of Brno University of Technology we try to solve this problem so we propose to future students e-learning course "Repetition of Mathematics from high school", before beginning of winter semester. The paper deals with this course, its contents, form, organization and first experiences.

## **Kombinované studium**

Kombinované studium na Fakultě chemické Vysokého učení technického v Brně je studujícím nabízeno od samotného znovuoobnovení fakulty v akademickém roce 1996/97. Délka studia i obsah učiva jsou totožné jako u prezenčního studia. Bakalářské studium trvá tři roky a magisterské další dva roky. Od akademického roku 2010/2011 celá povinná výuka, včetně laboratorí, probíhá u prvního ročníku bakalářského studia pouze o víkendech. První sobotu v semestru vždy probíhá setkání všech přednášejících povinných předmětů se studujícími. Každý přednášející má jednu vyučovací hodinu (50 minut), na představení svého předmětu, studijní literatury, seznámení s podmínkami hodnocení, stanovení způsobu sjednávání a realizace konzultací atd. Ve zbylém čase pak může upozornit na klíčové a nejproblematictější pasáže učiva, případně může probrat některou úvodní pasáž vlastního učiva. Předpokládá se forma prezentace (v Power Pointu), kterou vyučující následně studujícím zpřístupní na e-learningu.

Další soboty pak probíhá výuka seminářů a cvičení povinných předmětů. Vyučující upraví výběr látky tak, aby se probraly a procvičily nejnáročnější úlohy a příklady, protože časová dotace je v porovnání s prezenčním studiem přibližně třetinová. V průběhu cvičení si vyučující rovněž smluví se studenty systém konzultací. Výuku cvičení musí vyučující podporovat využitím e-learningu a průběžné kontroly práce studentů mezi jednotlivými termíny s rozvrhovanou výukou. Volba způsobu výuky a využití rozvrhovaných jednotek je zcela v kompetenci garanta předmětu. Studující kombinované formy studia však musí pro úspěšné absolvování splňovat stejné podmínky, jako studenti prezenční formy, tedy například zápočtový test musí mít stejnou obtížnost. Studující kombinované formy však může být umožněn větší počet pokusů o jeho absolvování. V každém rozvrhovaném cvičení píše studující kontrolní test.

Zájem o kombinovanou formu velice vzrostl. Zatímco v akademickém roce 2010/2011 bylo přijato celkem 54 studujících, tak v akademickém roce 2011/2012 bylo přijato celkem 90 studujících. Do letního semestru ale postoupí studujících velice málo. V akademickém roce 2010/2011 to bylo 12 studujících, tedy přibližně 22 %, v akademickém roce 2011/2012 to bylo 15 studujících, tedy necelých 17 %. Jednou z příčin je i to, že znalosti studujících nejsou na dostatečné úrovni. Studující tudíž nemohou plynule navázat na své vědomosti a dovednosti, což pak vede k tomu, že studium na vysoké škole nezvládají a předčasně ukončují. Na Fakultě chemické Vysokého učení technického v Brně se pokoušíme tento problém řešit tím, že nabízíme budoucím posluchačům, ještě před začátkem zimního semestru, e-learningové kurzy z matematiky a chemie.

### **E-learningový kurs „Opakování základů středoškolské matematiky“**

Cílem celého kursu je nejen doplnit chybějící znalosti a dovednosti, ale zároveň systematicky utřídit a shrnout ty středoškolské znalosti a dovednosti, které jsou předpokladem k úspěšnému studiu na vysoké škole, ale které nejsou, převážně z důvodu dlouhého časového odstupu od předchozího studia, na předpokládané úrovni. Po příchodu do učebního procesu na vysoké škole se studující v kombinované, ale ani v prezenční, formě studia neseťká s vyučovací hodinou matematiky, ve které by se nejprve zopakovaly a sjednotily předchozí znalosti, pak vysvětlilo nové učivo a to následně procvičilo, jako tomu bylo na střední škole. Na vysoké škole studující mají nejprve přednášku, kde jim je vysvětlena nová látka. Tu si mají nastudovat a na základě jejího pochopení se připravit na cvičení. Konkrétně by si měli vyřešit všechny úlohy, které se budou ve cvičení probírat, a které jsou zveřejněny jak na e-learningu fakulty, tak na internetu. Setkávají se tedy s úplně jiným systémem výuky, kterému nepředchází žádná příprava a po tak dlouhé době, co nesešli ve školních lavicích, to pro ně je zákonitě obrovská změna. Mnozí z nich navíc zastávají ve svém zaměstnání zodpovědná řídicí místa a najednou se mají vžít do role studujícího, což může být velice stresující. Tento kurs by je měl, alespoň po stránce vědomostní, připravit na studium na vysoké škole.

Kurs „Opakování základů středoškolské matematiky“ bude zařazen ke stávajícímu předmětu Matematika I jakožto volitelný modul, který bude časově předcházet studiu na vysoké škole. Bude tedy realizován nejpozději v první polovině září, aby jej studující mohli absolvovat do zahájení výuky v zimním semestru.

Bude obsahovat stěžejní témata ze středoškolské matematiky, jejichž znalost je nutnou podmínkou pro zvládnutí již výše zmíněného povinného předmětu Matematika I. Protože znalosti a dovednosti, které získají v předmětu Matematika I bezprostředně ovlivňují úspěšnost studujících jak v navazujících předmětech (např.

Matematika II, Počítačová cvičení z matematiky), tak i v dalších odborných předmětech (např. Fyzika, Fyzikální chemie atd.), tak, nadneseně řečeno, ovlivňují celkovou úspěšnost studia na Fakultě chemické.

Modul kombinuje prezenční formu výuky (úvodní a závěrečný tutoriál) s řízeným samostudiem. Úvodní tutoriál trvá tři dny, a proto distanční učební oporu tvoří první tři kapitoly distančního učebního textu MATEMATIKA pro budoucí posluchače a posluchačky Fakulty chemické. Organizované samostudium trvá 10 dní, a proto distanční učební oporu tvoří následujících 10 kapitol výše uvedeného distančního textu. Závěrečný tutoriál trvá jeden den a je mu věnována poslední kapitola.

Učební text je tedy rozdělen celkem do 14 kapitol, které odpovídají 14 dnům, které jsou modulu přiděleny. První tři kapitoly: Úvod do předmětu, Základní matematické pojmy a Základy planimetrie a stereometrie, patří do tzv. Úvodního tutoriálu. Následujících deset kapitol: Lineární rovnice a nerovnice, Kvadratické rovnice a nerovnice, Další typy rovnic a nerovnic, Úpravy výrazů, Goniometrické rovnice a nerovnice, Reálná funkce jedné reálné proměnné, Definiční obory reálných funkcí jedné reálné proměnné, Základy analytické geometrie lineárních útvarů v rovině, Základy analytické geometrie lineárních útvarů v prostoru a Základy analytické geometrie kvadratických útvarů v rovině, patří do tzv. Organizovaného samostudia. Závěrečný tutoriál pak obsahuje pouze ukázkou kontrolního testu a jeho řešení. Při studiu tohoto distančního textu si studující budou svým vlastním tempem, krok za krokem, opakovat jednotlivá témata, která by jim měla pomoci nejen při řešení zadaných úloh, autotestů a kontrolního testu, ale hlavně při řešení úloh v předmětu Matematika I, v dalších navazujících a odborných předmětech a nakonec i při řešení praktických problémů v odborných předmětech a následně v praxi.

Předmět Matematika I navazuje na znalosti a dovednosti z matematiky ze střední školy, které bohužel nebývají na předpokládané úrovni. Ztěžují studujícím pochopení a zvládnutí dalšího učiva a jsou jedním z hlavních důvodů neúspěšnosti studujících při absolvování tohoto předmětu.

Doposud studující měli k dispozici hlavně klasické učební texty, výjimečně se setkali s hypertextovými dokumenty či e-learningovými kursy. Hlavně ale část jednoho tématu probírali v prvním ročníku, zatímco jinou část téhož tématu v jiném ročníku, nebo dokonce v jiném předmětu. Pokud si tedy studující ve čtvrtém ročníku nezvolil předmět, ve kterém by se připravoval na ústní maturitní zkoušku z matematiky, kde by měla být veškerá středoškolská matematika rozdělena do jednotlivých témat a jednotlivá témata by měla být souhrnně procvičena, tak jsou jejich vědomosti navíc neutříděné a místy kusé. Aby mohli využívat všechny své matematické znalosti a dovednosti, tak je třeba je mít i správně utříděné a je třeba používat adekvátní matematické pojmy a symboly. Předložený text je proto rozčleněn podle témat, ve kterých je daná problematika objasněna ve všech jim dosud známých kontextech, nebo těch kontextech, které jsou dále nezbytné pro studium předmětu Matematika I. Obsahují nejen vlastní výkladovou část základního a rozšiřujícího učiva, ale i spoustu interaktivních prvků, které mají své ikony, a které je budou provázet celým textem. Seznam těchto ikon i s jejich stručným popisem je uveden na začátku učebního textu.

Protože k nám studující přicházejí z různých škol a s různou úrovní znalostí, tak by bylo žádoucí zopakovat alespoň základní matematické pojmy a sjednotit jejich chápání. Bohužel, počet kontaktních hodin předmětu Matematika I je tak nízký, že si to již nemůžeme dovolit. Všechny kapitoly jak Úvodního tutoriálu, tak Organizovaného samostudia, obsahují látku, na kterou se navazuje, ale která se již neopakuje. Protože úroveň matematiky je na různých školách různá, některá témata se učí pouze ve volitelných předmětech atd., tak to, co se jednomu ze studujících může zdát triviální,



může pro druhého být velice obtížné a naopak. Kdo z nich ale projde celým tímto modulem, tak bude mít obrovskou výhodu, protože plynule na tyto znalosti a dovednosti naváže a úspěšně zvládne oba povinné předměty matematiky a třeba se mu matematika tak zalíbí, že si zvolí i nepovinný předmět Matematiku II, nebo dokonce Matematiku III.

Tento modul bude zakončen klasifikovaným kontrolním testem. Pokud si tento modul studující zvolí a úspěšně absolvujete tento kontrolní test, tak odpovídající počet bodů mu bude připočten k bodovému hodnocení pro udělení zápočtu v předmětu Matematika I.

Výhodou tohoto distančního textu je nejen to, že poznatky jsou zde systematicky uspořádány, ale hlavně to, že obsahuje obrovské množství vzorově vyřešených příkladů, grafů a obrázků, spoustu dobrých tipů, upozornění i varování. Jednotlivé interaktivní prvky studující budou provázet celým modulem a jsou nejen uvozeny ikonami, ale navíc i barevně odlišeny. Text není nutné studovat chronologicky. Pokud bude studující hledat pouze konkrétní informaci, tak ji pomocí rejstříku velice snadno nalezne.

Studující zde samozřejmě nenaleznou výklad učiva základní školy. Také zde nenaleznou témata jako je kombinatorika (faktoriál, kombinační čísla, permutace, variace, kombinace, binomická věta, pravděpodobnost atd.), komplexní čísla (algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla, početní operace, binomické rovnice, Moivreova věta atd.), posloupnosti (aritmetická a geometrická posloupnost, posloupnosti zadané rekurentně či vzorcem pro  $n$ -tý člen), nekonečné řady atd., které nejsou nezbytným předpokladem pro úspěšné zahájení studia na Fakultě chemické. V předloženém textu většinou naleznou pouze věty a vztahy, ze kterých se vychází, ale ne jejich důkazy, i když u těch nejzákladnějších vět, jako je Pythagorova věta, Eukleidovy věty atd., jsou tyto důkazy uvedeny.

Modul samozřejmě také obsahuje různé interaktivní nástroje jako jsou prezentace a flashe. Další součástí je Průvodce studiem. V modulu najdete celkem 10 úkolů a jedno diskusní fórum a na závěr si studující budou moci nanečisto vyzkoušet svůj test.

## **Závěr**

Na začátku akademického roku 2011/2012 jsme zkušebně spustili pouze část tohoto kursu a to všechny tři kapitoly Úvodního tutoriálu (Úvod do předmětu, Základní matematické pojmy, Základy planimetrie a stereometrie) a první dvě kapitoly Organizovaného samostudia (Lineární rovnice a nerovnice a Kvadratické rovnice a nerovnice). Konkrétně dne 8. září 2011 v době od 16 do 19 hodin proběhla první kontaktní hodina, 9. září od 16 do 19 hodin druhá kontaktní hodina. V dalším týdnu si měli studující projít Lineární rovnice a nerovnice a elektronicky odevzdat domácí úkol, v dalším týdnu si pak měli prostudovat Kvadratické rovnice a nerovnice a odevzdat elektronicky druhý domácí úkol. Dne 23. září v době od 16 do 18 hodin pak proběhlo vyhodnocení odevzdaných domácích úkolů, byly zodpovězeny veškeré dotazy a zájemci si napsali výstupní test.

Do kursu, který byl bezplatný, se přihlásilo celkem 93 studujících. Prvního kontaktního setkání dne 8. září 2011 se zúčastnilo celkem 64 studujících, druhého kontaktního setkání dne 9. září 2011 se zúčastnilo celkem 50 studujících a třetího kontaktního setkání dne 23. září 2011 se zúčastnilo celkem 26 studujících. Všech tří kontaktních setkání se zúčastnilo celkem 18 studujících. První domácí úkol odevzdalo celkem 25 studujících, druhý domácí úkol 24 studujících. Závěrečný test se pokusilo absolvovat celkem 23 studujících. Přestože z tohoto jednoho jediného pokusu nelze činit žádné věrohodné závěry, tak jsme zjistili několik důležitých skutečností.

Všech tří kontaktních setkání se zúčastnilo pouze 19 % přihlášených, domácí úkoly se pokusilo vyřešit pouze 26 % přihlášených a o závěrečný test se pokusilo pouze 25 % přihlášených. Vypadá to tedy tak, že necelých 25 % přihlášených se plně zapojilo do kursu a absolvovalo všechny jeho součásti.

Studující neměli nařízenou přesnou formu, jakým způsobem domácí úkol odevzdat. Mohli ho odevzdat na papíře, nebo poslat elektronicky a to buď na e-mail, nebo přímo do kursu v MOODLU. Zjistili jsme, že studující mají obrovské problémy odevzdat matematický text v elektronické podobě. První domácí úkol se podařilo prostřednictvím MOODLU odevzdat 14 studujícím, 11 jich to odevzdalo pomocí e-mailu a jedna pouze na papíře. Druhý domácí úkol už odevzdalo prostřednictvím MOODLU 18 studujících a 6 pomocí e-mailu. A jaké používali formáty? Nejčastější byl formát .doc (25 %), pak formát .docx (19 %), pak .jpg (17 %), pak .pdf (15 %), pak .bmp (8 %), pak shodně .xml a .rtf (4 %) a jedna odevzdala pouze na papíře.

Plná třetina studujících napsala domácí úkol v ruce na papír a pak jej převedla do elektronické podoby (mobil, skener, fotoaparát atd.) a poslala jako obrázek s příponou .jpg, nebo .bmp, nebo jej vložila do Wordu a poslala takto. Dvě třetiny se pokusilo napsat matematický text přímo v textovém editoru Word, ale pouze jeden z nich použil tzv. editor rovnic. Jejich matematický text byl velice špatně čitelný. Nikdo nepoužil jiný textový editor než Word. Ukázalo se, že studující neumějí napsat v textovém editoru matematický text tak, aby byl dobře čitelný a už vůbec ne tak, aby odpovídal typografickým pravidlům a normě ISO 31-11.

Dále se ukázalo, že druhý příklad z druhého domácího úkolu nevyřešil vůbec nikdo. Úloha neměla žádné řešení, ale každý studující nějaké „objevil“. Závěrečný test, který obsahoval i slovní úlohy byl pro studující velice obtížný a nikdo ho úspěšně neabsolvoval. Jejich znalosti ze střední školy tedy opravdu nebyly na dostatečné úrovni.

Jinak jsme zatím zaznamenali pouze kladné ohlasy. Studující projeví velký zájem i o zbývající kapitoly, ale shodně také konstatovali, že by tento kurs měl začínat dříve. V současné době se dopisují poslední dvě kapitoly. Prezentace a flashe k reálným funkcím jedné reálné proměnné a průvodce studiem jsou již nachystané. Chybí vymyslet ještě několik domácích úkolů, zadat do databáze úlohy k závěrečnému testu a graficky sladit a zveřejnit celý kurs na elearningu. Pokud to vedení fakulty schválí, tak bychom kurs chtěli spustit co nejdříve po ukončení přijímacího řízení. Ideální by bylo, kdyby studující měli na každou kapitolu jeden týden. Někteří by sice neměli některý týden co dělat, ale většina by to pouze uvítala. Ne každý se může každý den po práci ještě věnovat výuce. Někdo je příliš unavený, někdo má noční službu, jiný nemá chuť, náladu, nebo sílu se po náročném dni ještě věnovat studiu. Jsme si ale plně vědomi také toho, že o hlavních prázdninách si naši budoucí studující budou vybírat dovolenou na zotavenou. Proto si myslíme, že dostatečně dlouhá doba je více než žádoucí.

## Literatura

- [1] FUCHS, E., D. HRUBÝ a kolektiv. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-169-8,
- [2] JULÁKOVÁ, Eva. *Jak řešit problémy při psaní odborných textů*. Praha: VŠCHT Praha, 2007,
- [3] EGER L., BARTOŇKOVÁ H.: *Studijní texty v distančním vzdělávání*, Univerzita Olomouc, Olomouc 2003.

# **WYKORZYSTANIE WYBRANYCH METOD STATYSTYKI OPISOWEJ W PROCESIE ANALIZY WYPADKOWOŚCI W GÓRNICTWIE WĘGLA KAMIENNEGO W POLSCE W LATACH 2008 – 2011**

**Paulina Sikora-Drabik**

**Katedra Zarządzania i Inżynierii Bezpieczeństwa, Politechnika Śląska  
ul. Akademicka 2, 44-100 Gliwice, Polska  
email: paulina.sikora@polsl.pl**

**Abstrakt:** W artykule wykorzystano metodę analizy szeregów czasowych do zobrazowania zdarzeń, które występują w różnym czasie i nie są powtarzalne, a tym samym nie są możliwe do przewidzenia. Do tych zdarzeń zaliczono wypadki przy pracy górnictwie węgla kamiennego w latach 2008 – 2011.

**Abstract:** Time-series analysis method has been used in the article to observe events happening at different points in time, not being repeatable and as such impossible to predict. Accident in the coal-mining industry between years 2008 and 2011 have been included in this group of events.

## **1. Przedmiot badań – korelacja między zmiennymi.**

Celem przeprowadzonych w artykule analiz jest bliższe przyjrzenie się problemom jakimi są wypadki w górnictwie węgla kamiennego oraz próba znalezienia zależności pomiędzy czasem, a ilością wypadków. Wypadki w górnictwie węgla kamiennego są często spowodowane przyczyną niezwiązaną bezpośrednio z eksploatacją, której nie można w pełni przewidzieć.

Ponieważ najważniejszą wartością zarówno dla pracodawcy jak i dla pracownika jest życie i zdrowie człowieka, dlatego coraz większą uwagę przykładana się do sposobu wykonywania pracy. Ciągły rozwój techniki, technologii górniczej, a także organizacji pracy np. poprzez wdrażanie nowych koncepcji m.in. z zakresu zarządzania bezpieczeństwem pracy z pewnością mają wpływ na poprawę stanu bezpieczeństwa pracy, jednakże należy zdać sobie sprawę z nie możliwości zapobieżenia wszystkim wypadkom lub ich przewidzenia.

## 2. Określenie zbioru danych.

W oparciu o dane statystyczne Wyższego Urzędu Górniczego dokonano zestawienia wypadków, które zaistniały w górnictwie węgla kamiennego w Polsce:

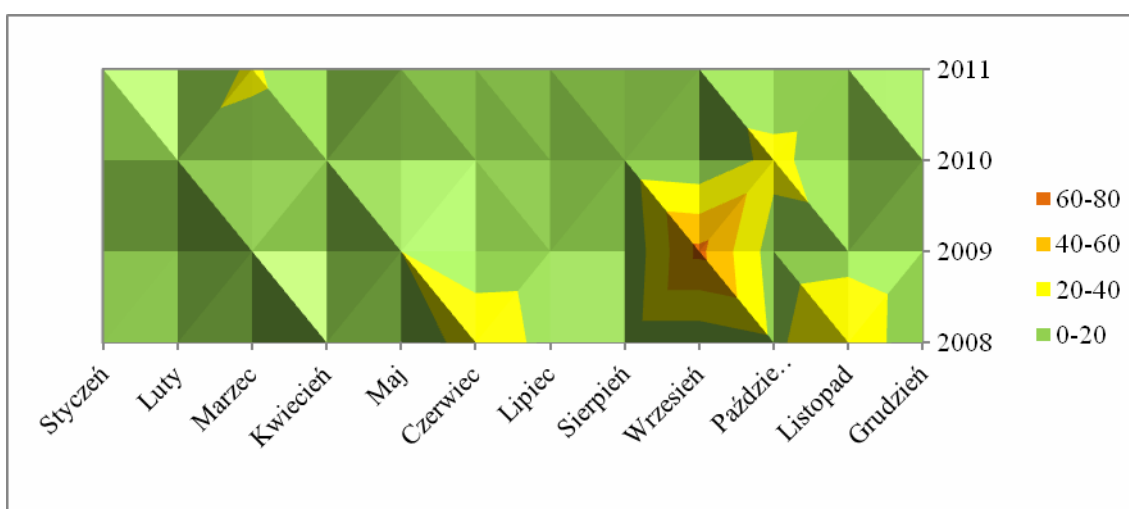
- ilość wypadków ogółem w danych, miesiącach, kwartałach i latach,
- ilość wypadków z ofiarami śmiertelnymi i ciężkimi urazami z podziałem na miesiące, kwartały i lata,
- zaistniałe wypadki zbiorowe w danym przekroju czasowym z podziałem na miesiące, kwartały i lata, oraz na ilość ofiar śmiertelnych, a także tych, które doznały ciężkich bądź znikomych obrażeń.

Zaznaczyć należy, że w badaniach nie dzielono wyników ze względu na przyczynę, skupiono się jedynie na ilości wypadków przy pracy.

Tabela 1. Zbiornicze zestawienie ilości wszystkich analizowanych wypadków, ilość wypadków śmiertelnych i ilość wypadków ciężkich z podziałem na miesiące (opracowanie własne).

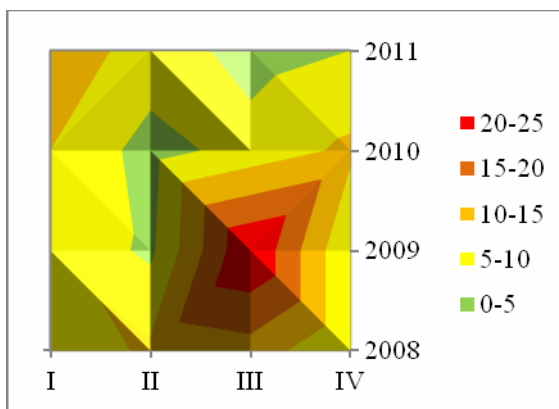
Miesiące	Ilość wszystkich wypadków (w tym pozostałych)				Ilość wypadków śmiertelnych				Ilość wypadków ciężkich			
	2008	2009	2010	2011	2008	2009	2010	2011	2008	2009	2010	2011
Styczeń	9	4	15	12	4	1	1	8	4	1	5	1
Luty	3	3	16	5	1	2	7	3	0	1	5	2
Marzec	1	17	13	23	1	6	2	2	0	3	4	2
Kwiecień	14	4	9	2	3	0	2	1	5	1	1	1
Maj	0	20	7	17	0	1	0	6	0	5	5	9
Czerwiec	33	9	3	7	8	3	1	1	8	1	2	4
Lipiec	14	10	2	3	5	3	1	0	2	3	1	0
Sierpień	6	2	8	5	5	1	5	0	1	1	3	0
Wrzesień	6	65	4	9	3	21	1	3	3	28	3	0
Październik	16	10	26	5	2	2	5	2	1	3	6	1
Listopad	38	13	4	7	0	3	2	2	0	2	0	2
Grudzień	3	4	17	3	3	0	4	1	0	0	0	2

Interpretację graficzną dla danych zawartych w tabeli 1 przedstawia rys. 1. Poniższy wykres uzyskał formę przypominającą mapę terenu pokrytą warstwicami. Obrazuje natężenie związane z ilością wypadków i poszkodowanych.

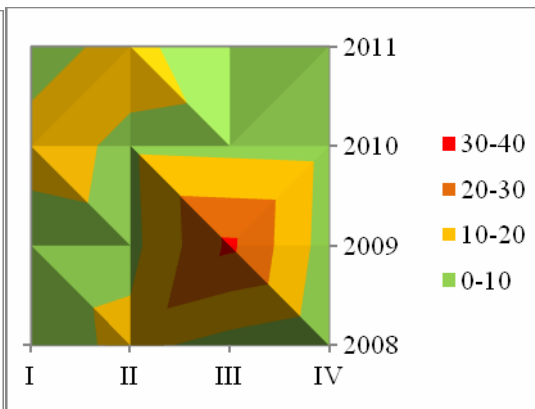


Rys 1. Ilość wszystkich wypadków przy pracy (w tym także pozostałych) w polskim górnictwie węgla kamiennego w latach 2008 - 2011.

Na powyższym wykresie (rys. 1) zauważyć można, że największa ilość wypadków miała miejsce w czerwcu i listopadzie 2008, wrześniu 2009, w październiku 2010 oraz w marcu 2011. W taki sam sposób można dokonać analizy wypadków śmiertelnych, ciężkich, zbiorowych i pozostałych w latach 2008 – 2011 i w kwartałach (rys. 2, 3).



Rys 2. Ilość wypadków śmiertelnych w polskim górnictwie w kwartałach w latach 2008 – 2011



Rys 3. Ilość wypadków ciężkich w polskim górnictwie w kwartałach w latach 2008 – 2011

### 3. Przeciętne miary pozycyjne.

Do analizy zebranego materiału statystycznego (tab. 1) wykorzystano wybrane metody statystyki opisowej. Wypadki podzielone zostały na następujące zbiory:

- zbiór A - wszystkie wypadki, w tym pozostałe,
- zbiór B - wypadki śmiertelne,
- zbiór C - wypadki ciężkie.

#### a) Miary statystyczne.

- *Wartość maksymalna zbioru:*  
 $X_{\max_A}=65, \quad X_{\max_B}=21, \quad X_{\max_C}=28.$
- *Wartość minimalna zbioru:*  
 $X_{\min_A}=0, \quad X_{\min_B}=0 \quad X_{\min_C}=0$

#### b) Miary tendencji centralnej.

- *Średnia arytmetyczna:*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.1)$$

$$\bar{x}_A=10,96; \quad \bar{x}_B=2,88; \quad \bar{x}_C=2,75$$

- *Wartość modalna (dominanta):*  
 $Dom._A=3; \quad Dom._B=1; \quad Dom._C=1.$
- *Mediana (wartość średnia):*

$$M_e \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} \text{ dla } n \text{ nieparzystego} \\ \frac{1}{2} (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \text{ dla } n \text{ parzystego} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$Me_A=7; \quad Me_B=2; \quad Me_C=2;$$

#### c) Miary zmienności.

- *Rozstęp zbioru:*

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (3.3)$$

$$R_A=65, \quad R_B=21, \quad R_C=28,$$

zatem zbiór A jest zbiorem o największej rozpiętości wartości.

- Średnie odchylenie standardowe:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.4)$$

$$s_A=11,28; \quad s_B=3,37; \quad s_C=4,25.$$

- Współczynnik zmienności:

$$V_s = \frac{s}{\bar{x}} \quad (3.5)$$

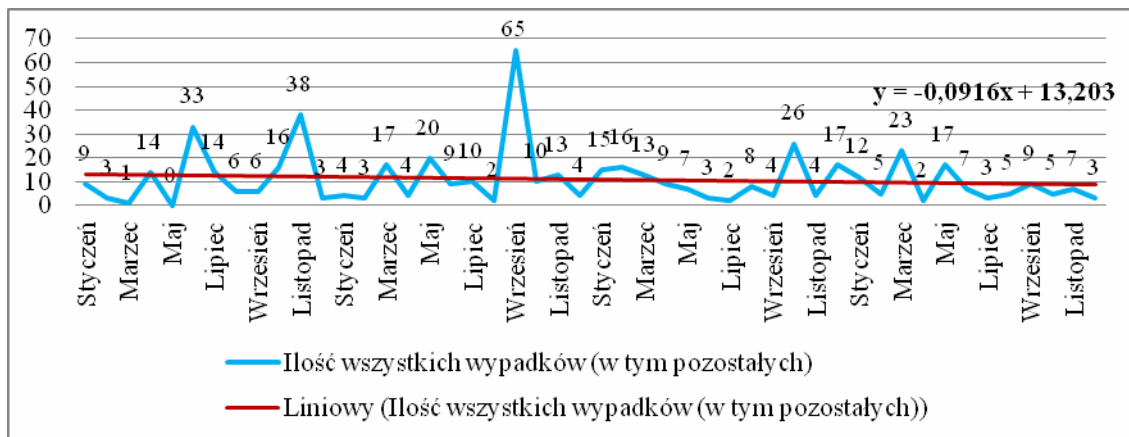
$$V_{sA}=1,03; \quad V_{sB}=1,17; \quad V_{sC}=1,55;$$

Na podstawie powyższych obliczeń można stwierdzić że zbiór C (wypadki ciężkie) jest zbiorem najbardziej zróżnicowanym spośród zbiorów.

Dla elementów zbioru A (zbiór 48 elementów) stanowiącego szereg czasowy uzyskana została liniowa funkcja trendu, której graficzne opracowanie przedstawia rys. 4:

$$f(x) = ax + b \quad (3.6)$$

$$f(x) = -0,0916x + 13,2$$



Rys 4. Ilość wypadków śmiertelnych oraz ciężkich w kolejnych miesiącach w latach 2009-2011 wraz z linią trendu.

#### 4. Analiza wskaźnika wypadków przy pracy.

Jednym ze wskaźników stosowanym do zobrazowania stanu bezpieczeństwa pracy w górnictwie węgla kamiennego w Polsce jest wskaźnik częstości wypadków w przeliczeniu na 1000 osób zatrudnionych.

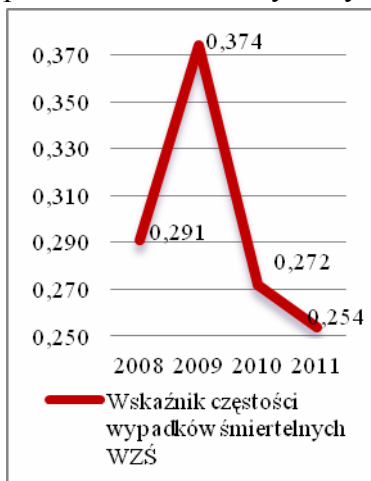
$$W_Z = \frac{W}{Z} \cdot 10^3 \quad (4.1)$$

gdzie:

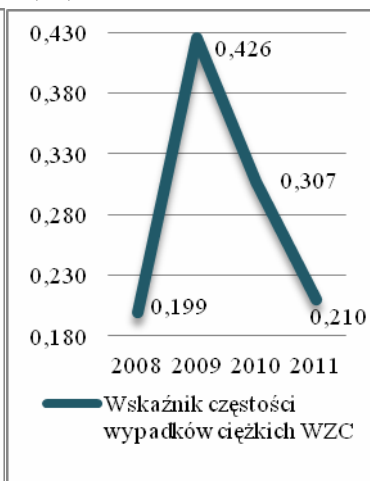
W - liczba wypadków,

Z - liczba załogi.

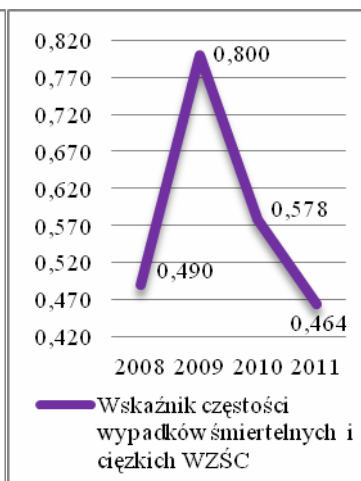
Dla analizowanego okresu czasu wartości wskaźnika częstości wypadków przedstawione zostały na rys. 5, 6, 7.



Rys 5. Wskaźnik  $W_{zś}$  w latach 2008-2012 w polskim górnictwie.



Rys 6. Wskaźnik  $W_{zc}$  w latach 2008-2012 w polskim górnictwie.



Rys 7. Wskaźnik  $W_{zśc}$  w latach 2008-2012 w polskim górnictwie.

Wartości wskaźników wypadkowości wykazują zróżnicowanie: o ile w przypadku wskaźnika częstości wypadków śmiertelnych  $W_{zś}$  rozstęp wynosi 0,120, to w przypadku wskaźnika częstości wypadków ciężkich  $W_{zc}$  wartość rozstępu wynosi już 0,227, czyli prawie dwukrotnie więcej.

## 5. Wnioski.

Analiza retrospektywna stanu bezpieczeństwa stanowi jeden z obszarów działań służb bhp w przedsiębiorstwach, także górniczych. Jest narzędziem, które funkcjonuje równolegle do działań podejmowanych w ramach wdrażania lub ciągłego doskonalenia systemów zarządzania bezpieczeństwem pracy. Zadaniem analizy retrospektywnej jest badanie przyczyn i okoliczności wypadków już zaistniałych, natomiast zadaniem procedur systemów zarządzania bezpieczeństwem jest badanie potencjału stanu zagrożeniowego.

Przedstawione w artykule wybrane metody statystyki opisowej mogą dodatkowo wzbogacić możliwości przetwarzania danych statystycznych będących w posiadaniu kopalń i stanowić istotny materiał także dla działań podejmowanych w ramach procedur zarządzania w obszarze bhp.

## Literatura

1. Dudka G., Bojanowski R.; Metodyka statystycznych analiz wypadków przy pracy; Centralny Instytut Ochrony Pracy – Państwowy Instytut Badawczy; Warszawa 2007.
2. Kowalik S.: Wybrane zagadnienia z matematyki wykłady dla doktorantów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
3. Sobczyk M.: Statystyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
4. Sikora P.; Wykorzystanie korelacji do oceny wpływu warunków środowiska pracy na konkretne części ciała człowieka na przykładzie stanowiska pracy wyposażonego w monitor ekranowy; „Moderní matematické metody v inženýrství (3mi)”. VŠB, Technická Univerzita v Ostravě, Czechy, Dolní Lomná, 31.05-01.06.2010.

5. <http://www.wug.gov.pl/> Wyższy Urząd Górniczy; Dane statystyczne 2009 – 2011.



# Singulární okrajová úloha pro diferenciální rovnici druhého řádu

Jakub Stryja

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail: jakub.stryja@vsb.cz

**Abstrakt:** Příspěvek se zabývá existencí řešení singulární okrajové úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Rovnice je s  $\phi$ -Laplaciánem a jedná se o homogenní Dirichletovu úlohu.

**Abstract:** This paper investigates existence of a solution for the singular Dirichlet problem with  $\phi$ -Laplacian for second order ODE.

## 1 Úloha

V tomto textu se budeme zabývat existencí řešení úlohy

$$(\phi(u'))' + f(t, u, u') = 0, \quad u(0) = u(T) = 0,$$

kde  $T \in (0; \infty)$ ,  $\phi$  je rostoucí lichý homeomorfismus s  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Dále funkce  $f$  splňuje Carathéodoryho podmínky na  $(0; T) \times \mathcal{D}$ , tj.  $f(t, x, y) \in Car((0; T) \times \mathcal{D})$ , kde  $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$  a  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathbb{R}$  jsou uzavřené intervaly obsahující 0.

**Poznámka 1.** Funkce  $f(t, x, y)$  může mít časové singularity pro  $t = 0$  a  $t = T$  a prostorové singularity v  $x = 0$  a  $y = 0$ .

**Definice 2.** Pro  $f \in Car((0; T) \times \mathbb{R}^2)$  nazveme úlohu *regulární* a pro  $f \in Car((0; T) \times \mathcal{D})$  *singulární*.

Abychom ukázali, že existuje řešení singulární úlohy, zkonstruujeme nejprve posloupnost pomocných regulárních úloh a ukážeme, že tyto úlohy mají řešení. Poté musíme ukázat, že posloupnost řešení regulárních úloh je konvergentní a nakonec, že limitní funkce je řešením naší singulární úlohy.

## 2 Definice

**Definice 3.** Funkce  $f$  má *časové singularity* v bodech  $t = 0$  resp.  $t = T$ , jestliže existuje bod  $[x, y] \in \mathcal{D}$  takový, že platí

$$\int_0^\varepsilon |f(t, x, y)| dt = \infty \text{ resp. } \int_{T-\varepsilon}^T |f(t, x, y)| dt = \infty$$

pro libovolné  $\varepsilon > 0$ .

**Definice 4.** Funkce  $f$  má *prostorové singularity* pro  $x = 0$  resp.  $y = 0$ , jestliže existuje množina  $J \subset (0; T)$  nenulové míry taková, že

$$\limsup_{x \rightarrow 0} |f(t, x, y)| = \infty \text{ resp. } \limsup_{y \rightarrow 0} |f(t, x, y)| = \infty$$

platí pro s. v.  $t \in J$  a nějaké  $y \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{0\}$  resp.  $x \in \mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}$ .

Singularitu v prostorové proměnné  $x$  nazveme *slabou singularitou* v bodě  $x = 0$ , jestliže pro všechna  $y \in \mathfrak{A}_2$  a pro s. v.  $t \in \langle 0; T \rangle$  existují konstanta  $c > 0$  a integrovatelná funkce  $m \in L(0; c)$  tak, že

$$|f(t, x, y)| \leq m(x)$$

pro všechna  $x \in (0; c)$ .

Singularitu v prostorové proměnné  $x$  nazveme *silnou singularitou* v  $x = 0$ , pokud není slabou singularitou v  $x = 0$ .

**Poznámka 5.** Podobně definujeme slabou a silnou singularitu v proměnné  $y$ .

**Příklad 6.**

$$f(t, x, y) = \frac{1}{t(T-t)^\alpha} + x^2 + y^2 + \frac{1}{|x|^\beta} + \frac{1}{|y|^\gamma}; \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Funkce  $f$  má singularitu v časové proměnné v bodě  $t = 0$ . V bodě  $t = T$  má singularitu pro  $\alpha \geq 1$ . Singularita v bodě  $x = 0$  je slabá pro  $\beta \in (0; 1)$  a silná pro  $\beta \geq 1$ . Singularita v bodě  $y = 0$  je slabá pro  $\gamma \in (0; 1)$  a silná pro  $\gamma \geq 1$ .

**Definice 7.** Funkci  $u : \langle 0; T \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  s  $\phi(u') \in AC \langle 0; T \rangle$  nazveme *řešením*, jestliže  $u$  splňuje rovnici

$$(\phi(u'(t)))' + f(t, u(t), u'(t)) = 0 \text{ pro s. v. } t \in \langle 0; T \rangle$$

a splňuje počáteční podmínky  $u(0) = u(T) = 0$ .

**Poznámka 8.**  $AC$  označíme *absolutně spojitě* funkce.

**Příklad 9.** Uvažujme úlohu

$$(u^3(t))' + \frac{\sin t \cos t}{tu(t)u'(t)} + 3u(t)u'^2(t) - \frac{1}{t} = 0, \quad u(0) = u(2\pi) = 0.$$

Vidíme, že

$$f(t, x, y) = \frac{\sin t \cos t}{txy} + 3xy^2 - \frac{1}{t}, \quad \phi(y) = y^3.$$

Funkce  $f$  má singularitu v  $t = 0$ , silné singularitu pro  $x, y = 0$  a je v proměnných  $x, y$  je neomezená. Řešením této úlohy je funkce

$$u(t) = \sin t, \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Někteří autoři pracují s jiným pojmem řešení. Zavedeme tedy pojem  $w$ -řešení.

**Definice 10.** Funkci  $u \in C \langle 0; T \rangle$  nazveme  $w$ -řešením, jestliže existuje konečný počet bodů  $t_i \in \langle 0; T \rangle$ ,  $i = 1, \dots, p$  tak, že pokud označíme  $J = \langle 0; T \rangle \setminus \{t_i\}_{i=1}^p$ , potom  $\phi(u') \in AC_{loc}(J)$  a pro s. v.  $t \in \langle 0; T \rangle$  splňuje funkce  $u$  rovnici

$$(\phi(u'(t)))' + f(t, u(t), u'(t)) = 0$$

a splňuje také počáteční podmínky  $u(0) = u(T) = 0$ .

**Poznámka 11.** Každé řešení je současně  $w$ -řešením naší úlohy.

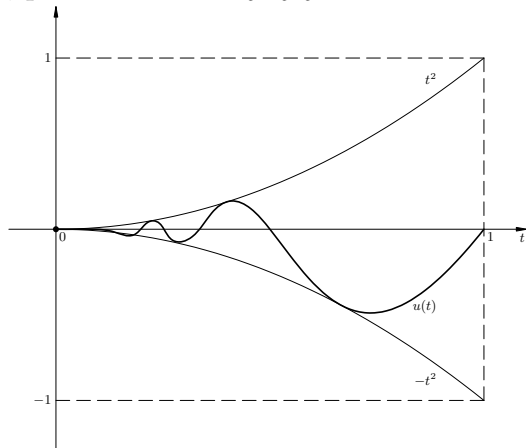
**Příklad 12.** Úloha

$$u''(t) + \frac{(2t^2 + \pi^2)u(t)}{t^4} - \frac{2u'(t)}{t} = 0, \quad u(0) = u(1) = 0$$

je opět singulární.  $\phi(y) = y$  a funkce  $f(t, x, y) = \frac{(2t^2 + \pi^2)x}{t^4} - \frac{2y}{t}$  má singularitu v  $t = 0$ . Funkce

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = 0 \\ t^2 \sin \frac{\pi}{t} & \text{pro } t \in (0; 1) \end{cases}$$

je  $w$ -řešením, ale není řešením, protože neexistuje její derivace v bodě  $t = 0$ .



**Definice 13.** Funkce  $\sigma \in C \langle 0; T \rangle$  se nazývá *horní funkce úlohy*, jestliže existuje konečná množina  $S \subset (0; T)$  taková, že  $\phi(\sigma') \in AC_{loc}((0; T) \setminus S)$  a pro všechna  $s \in S$  platí

$$\begin{aligned} \sigma'(s+) &:= \lim_{t \rightarrow s+} \sigma'(t) \in \mathbb{R}, & \sigma'(s-) &:= \lim_{t \rightarrow s-} \sigma'(t) \in \mathbb{R}, \\ \sigma(0) &\geq 0, & \sigma(T) &\geq 0, & \sigma'(s-) &> \sigma'(s+) \end{aligned}$$

a dále platí

$$(\phi(\sigma'(t)))' + f(t, \sigma(t), \sigma'(t)) \leq 0 \text{ pro s. v. } t \in \langle 0; T \rangle .$$

**Poznámka 14.** Podobně (obrácením nerovností) můžeme definovat *dolní funkci úlohy*.

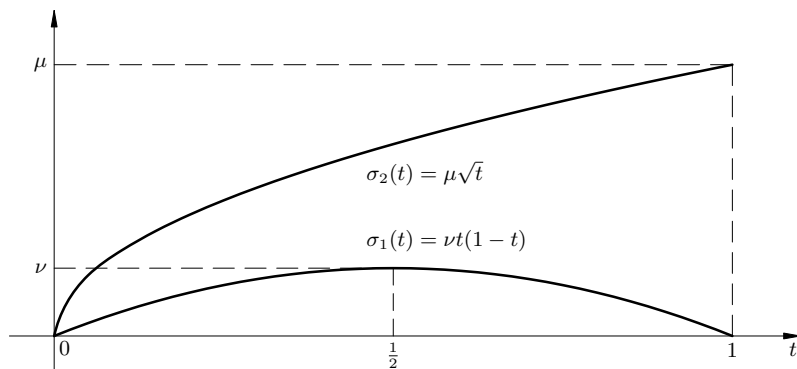
**Příklad 15.** Předpokládejme, že  $a, b, c > 0$ . Úloha

$$(u'^3(t))' + \frac{a}{u^2(t)} - bu(t) + \frac{c}{u'^2(t)} + \frac{1}{\sqrt{t^3}} = 0, \quad u(0) = u(1) = 0$$

je singulární.  $\phi(y) = y^3$  a funkce  $f(t, x, y) = \frac{a}{x^2} - bx + \frac{c}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{t^3}}$  má singularitu v časové proměnné pro  $t = 0$  a dále má silné singularity v prostorových proměnných pro  $x = 0$  a  $y = 0$ .

Pro dostatečně malé  $\nu > 0$  a dostatečně velké  $\mu > 0$  jsou funkce  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  dolní a horní funkce úlohy.

$$\sigma_1(t) = \nu t(1-t), \quad \sigma_2(t) = \mu \sqrt{t}, \quad t \in \langle 0; 1 \rangle .$$



### 3 Regulární problém

Nyní uveďme dvě věty zaručující existenci řešení regulárního problému. První z nich zobecňuje Fredholmovu větu, ve které je  $\phi(x) = x$ . Naše věta zaručuje existenci řešení i pro obecnější  $\phi$ .

**Věta 16 (Existenční věta Fredholmova typu).** *Nechť  $g \in Car(\langle 0; T \rangle \times \mathbb{R}^2)$ ,  $\phi$  je rostoucí lichý homeomorfismus s  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Předpokládejme, že existuje funkce  $m \in L \langle 0; T \rangle$  tak, že*

$$|g(t, x, y)| \leq m(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0; T \rangle \text{ a všechna } x, y \in \mathbb{R} .$$

*Potom má úloha*

$$(\phi(u'(t)))' + g(t, u(t), u'(t)) = 0 , \quad u(0) = u(T) = 0$$

*řešení.*

Důkaz věty uveden v [3] a je založen na převedení rovnice do operátorového tvaru a na aplikaci Schauderovy věty o pevném bodě.

Druhá věta zaručuje nejenom existenci řešení, ale dává také odhad pro řešení. Toto řešení leží mezi horní a dolní funkcí úlohy.

**Věta 17 (Metoda horních a dolních funkcí).** *Nechť  $g \in Car(\langle 0; T \rangle \times \mathbb{R}^2)$ ,  $\phi$  je rostoucí lichý homeomorfismus s  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Nechť  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  jsou dolní funkce a horní funkce regulární úlohy mající konečné derivace v bodech 0 a T. Nechť platí  $\sigma_1(t) \leq \sigma_2(t)$  pro  $t \in \langle 0; T \rangle$ . Předpokládejme, že existuje funkce  $m \in L \langle 0; T \rangle$  taková, že*

$$|g(t, x, y)| \leq m(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0; T \rangle \text{ a všechna } x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t) \rangle , y \in \mathbb{R} .$$

*Potom má regulární úloha řešení u pro které platí*

$$\sigma_1(t) \leq u(t) \leq \sigma_2(t) \text{ pro } t \in \langle 0; T \rangle .$$

Důkaz věty je opět uveden v [3]. Pomocí funkcí  $g, \sigma_1, \sigma_2$  definujeme pomocnou funkci  $\tilde{g}$  tak, abychom mohli na pomocnou úlohu aplikovat větu 16 a aby se pro  $x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t) \rangle$  funkce  $g, \tilde{g}$  rovnaly. Řešení pomocné úlohy je potom také řešením původní úlohy.

### 4 Singulární problém

Nejprve definujme posloupnost pomocných regulárních úloh

$$(\phi(u'))' + f_n(t, u, u') = 0 , \quad u(0) = u(T) = 0 ,$$

kde  $f_n \in Car(\langle 0; T \rangle \times \mathbb{R}^2)$ . Nyní můžeme vyslovit existenční větu.

**Věta 18 (Existenční princip).** *Nechť  $f \in Car(\langle 0; T \rangle \times \mathcal{D})$ ,  $f_n \in Car(\langle 0; T \rangle \times \mathbb{R}^2)$ ,  $\Delta_n = \langle \frac{1}{n}; T - \frac{1}{n} \rangle$ ,  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\eta_n > 0$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Předpokládejme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ . Dále předpokládejme, že*

(1) *pro s. v.  $t \in \Delta_n$  a všechna  $[x, y] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ ,  $|x| \geq \varepsilon_n$ ,  $|y| \geq \eta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  platí*

$$f_n(t, x, y) = f(t, x, y) ,$$

(2) existuje omezená množina  $\Omega \subset C^1 \langle 0; T \rangle$  tak, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  má regulární problém řešení  $u_n \in \Omega$  a  $[u_n(t), u'_n(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$  pro  $t \in \langle 0; T \rangle$ .

(i) Potom existuje funkce  $u \in C \langle 0; T \rangle$  a podposloupnost  $\{u_\ell\} \subset \{u_n\}$  tak, že

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_\ell(t) = u(t) \text{ stejnoměrně na } \langle 0; T \rangle .$$

(3) Pokud navíc existuje konečná množina  $S = \{s_1, \dots, s_p\} \subset (0; T)$  taková, že na každém intervalu  $\langle a; b \rangle \subset (0; T) \setminus S$  je posloupnost  $\{\phi(u'_\ell)\}$  stejně spojitá.

(ii) Potom  $u \in C^1((0; T) \setminus S)$  a existuje podposloupnost  $\{u_k\} \subseteq \{u_\ell\}$  tak, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u'_k(t) = u'(t) \text{ lokálně stejnoměrně na } (0; T) \setminus S .$$

(4) Dále předpokládáme, že množina  $S$  má tvar

$$S = \{s \in (0; T) : u(s) = 0 \text{ nebo } u'(s) = 0 \text{ nebo } u'(s) \text{ neexistuje}\} .$$

(iii) Potom  $\phi(u') \in AC_{loc}((0; T) \setminus S)$  a funkce  $u$  je  $w$ -řešení singulární úlohy.

(5) Označme  $s_0 = 0$ ,  $s_{p+1} = T$ . Jestliže existují  $\eta \in (0; \frac{T}{2})$ ,  $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_{p+1}, \mu_{p+1} \in \{-1, 1\}$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $k_0 > \frac{2}{T}$  a  $\psi \in L \langle 0; T \rangle$  tak, že pro všechna  $i \in \{0, \dots, p+1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq k_0$  platí

$$\operatorname{sgn} u'_k(t) \lambda_i f_k(t, u_k(t), u'_k(t)) \geq \psi(t) \text{ pro s. v. } t \in (s_i - \eta; s_i) \cap (0; T) ,$$

$$\operatorname{sgn} u'_k(t) \mu_i f_k(t, u_k(t), u'_k(t)) \geq \psi(t) \text{ pro s. v. } t \in (s_i; s_i + \eta) \cap (0; T) ,$$

(iv) pak  $\phi(u') \in AC \langle 0; T \rangle$  a funkce  $u$  je řešení singulární úlohy splňující  $[u(t), u'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$  pro  $t \in \langle 0; T \rangle$ .

Důkaz věty je uveden v [3]. K důkazu konvergence posloupnosti řešení je použita Arzelà - Ascoli věta, k důkazu, že limitní funkce je řešením singulární úlohy Lebesgueova věta a Fatouovo lemma.

Existenční princip není vhodný pro důkaz existence řešení nějaké konkrétní úlohy. Jsou v něm kladeny požadavky na aproximující regulární funkce  $f_n$  a na řešení regulárních úloh  $u_n$ . Ověřování těchto požadavků by bylo obtížné. Nyní vyslovíme větu, která je vhodná pro aplikace na konkrétní úlohy.

Budeme předpokládat, že  $f(t, x, y) \in Car((0; T) \times (0; \infty) \times \mathbb{R})$ . Funkce  $f(t, x, y)$  může mít singularitu v proměnných  $t$  a  $x$  (slabou i silnou) a může mít v proměnné  $x$  libovolný a v proměnné  $y$  kvadratický růst. V proměnné  $y$  u této aplikace singularita být nemůže. Budeme dokazovat existenci řešení kladného na intervalu  $(0; T)$ .

**Věta 19 (Aplikace).** Nechť  $f(t, x, y) \in Car((0; T) \times (0; \infty) \times \mathbb{R})$ . Nechť  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  jsou dolní a horní funkce úlohy mající konečné derivace v bodech 0 a  $T$  a nechť

$$0 < \sigma_1(t) \leq \sigma_2(t) \text{ pro } t \in (0; T) .$$

Předpokládejme, že existují konstanty  $a_1, a_2 \in \langle 0; T \rangle$ ,  $a_1 < a_2$ ,  $b^* \in (0, \infty)$ , nezáporná funkce  $h \in L \langle 0; T \rangle$  a funkce  $\omega^* \in C \langle 0; \infty \rangle$  splňující

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\omega^*(s)} = \infty , \quad \omega^*(s) \geq b^* \text{ pro } s \in \langle 0; \infty \rangle .$$

Dále nechť

$$f(t, x, y) \operatorname{sgn} y \leq \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|)$$

pro s. v.  $t \in \langle 0; a_2 \rangle$  a všechna  $x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t) \rangle$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t, x, y) \operatorname{sgn} y \geq -\omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|)$$

pro s. v.  $t \in \langle a_1; T \rangle$  a všechna  $x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t) \rangle$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

Potom má úloha řešení splňující odhad

$$\sigma_1(t) \leq u(t) \leq \sigma_2(t) \text{ pro } t \in \langle 0; T \rangle .$$

Důkaz věty je uveden v [3]. Nejprve jsou zkonstruovány pomocné regulární úlohy. K důkazu existence jejich řešení a k jejich odhadům se využívá věta 17. Poté jsou ověřeny všechny předpoklady věty 18 a tím je ukázána existence řešení singulární úlohy.

Na závěr uvedme příklad. Existenci řešení této úlohy nám zaručuje věta 19.

**Příklad 20.**

$$(u'^3(t))' + \left( \frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3} \right) \left( u(t) - \frac{t(T-t)}{2} \right) u'(t) + \frac{t(T-t)}{u(t)} + 3u^2(t) - \frac{1}{3} = 0 ,$$

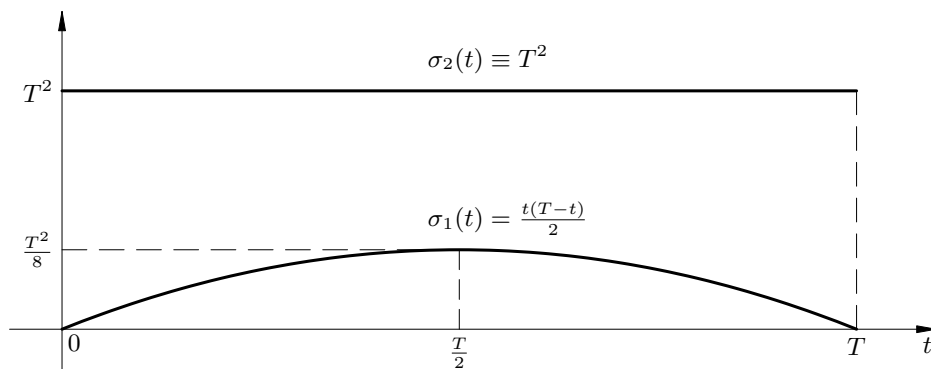
$$u(0) = u(T) = 0 .$$

Vidíme, že  $\phi(y) = y^3$  a funkce

$$f(t, x, y) = \left( \frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3} \right) \left( x - \frac{t(T-t)}{2} \right) y + \frac{t(T-t)}{x} + 3y^2 - \frac{1}{3}$$

má časové singularity v  $t = 0$  a  $t = T$  a prostorovou singularitu v  $x = 0$ . Řešení úlohy leží mezi dolní a horní funkcí úlohy, které můžeme zvolit například takto:

$$\sigma_1(t) = \frac{t(T-t)}{2} , \quad \sigma_2(t) \equiv T^2 .$$



## Reference

- [1] I. Rachůnková, S. Staněk: *General existence principle for singular BVPs and its application*, Georgian Math. J. **11**(2004), 549-565.
- [2] I. Rachůnková, J. Stryja: *Singular Dirichlet BVP for second order ODE*, Georgian Math. J. **14**(2007), 325-340.
- [3] I. Rachůnková, J. Stryja: *Dirichlet problem with  $\phi$ -Laplacian and mixed singularities*, Nonlinear Oscillations **11**(2008), 81-95.

# MAGNETICKÁ VAZBA VE VIRTUÁLNÍ LABORATOŘI

Pavel Svoboda, Stanislav Zajaczek, Jan Unger

Katedra elektrotechniky, VŠB-TU Ostrava  
17. listopadu, 708 33 Ostrava-Poruba

E-mail : [pavel.svoboda1@vsb.cz](mailto:pavel.svoboda1@vsb.cz), [stanislav.zajaczek@vsb.cz](mailto:stanislav.zajaczek@vsb.cz), [jan.unger@vsb.cz](mailto:jan.unger@vsb.cz)

**Abstrakt:** Tento příspěvek se zabývá využitím virtuálních laboratoří jako moderního prostředku, který je využíván v předmětu Teorie obvodů I a seznamuje naše studenty s indukčně vázanými obvody. Za pomoci této moderní technologie je na studenta přenesena celá zodpovědnost a musí při řešení využít svých dosavadních vědomostí a logického myšlení. Nespornou výhodou je možnost realizace virtuálního měření mimo prostory univerzity.

**Abstract:** This paper deals with the use of virtual labs as a modern resource that is used in the subject Circuit Theory I and introduces our students inductively coupled circuits. With the help of modern technology is transferred completely responsibility of the student to tackle and use their existing knowledge and logical thinking. Advantage is the possibility of implementation of virtual measurement outside the university.

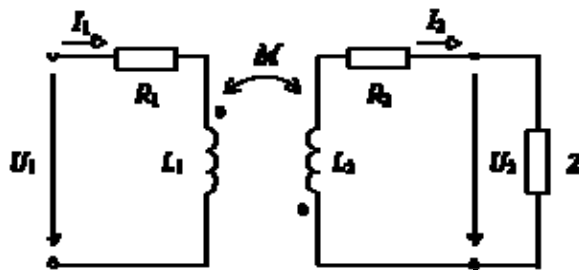
## Úvod:

Současná společnost tlačí na kantory a studenty značným způsobem, aby při výuce využívali moderní technologie. Velkou výhodou tohoto nátlaku je, že dochází ke zkvalitnění a zefektivnění výuky. V 21. století má převážná většina studentů, ne-li všichni k dispozici svůj vlastní netbuk, notebook nebo tablet. Na jakémkoliv z těchto výpočetních přístrojů si mohou spustit virtuální laboratoř vlastní-li software balíček MS Office.

Virtuální laboratoře obsahují virtuální modely reálných úloh, které jsou k dispozici v laboratoři katedry elektrotechniky a volně ke stažení z webových stránek univerzity a při výuce předmětu Teorie obvodu I a Teorie obvodu II jsou s nimi seznámeni všichni studenti 1. ročníku studijního programu Elektrotechnika a celouniverzitního studijního programu Mechatronika, kteří studují na Fakultě elektrotechniky a informatiky, VŠB – TUO. Tyto virtuální modely nám umožňují za pomoci simulací a animací vytvořit různé stavy, která nám co nejlépe přiblíží reálný model a studenti si na nich mohou ověřit i ty provozní stavy, které by mohly v praxi vést k poškození reálného zařízení.

## Indukčně vázané obvody ve virtuální laboratoři

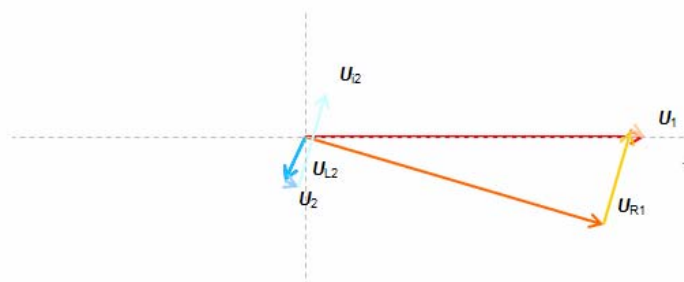
Virtuální laboratoř je vytvořena v prostředí MS Excel, kde jsou vytvořeny 4. listy. Na prvním listu sešitu je vytvořeno schéma indukčně vázaného obvodu znázorněného na obr.1.



Obr.1 Indukčně vázaný obvod

Mimo schéma zapojení jsou na prvním listu vypsány všechny parametry obvodu. Mezi tyto obvodové parametry patří odpor primárního vinutí  $R_1$ , celkovou indukčnost primární strany transformátoru  $L_1$ , odpor sekundární stany vinutí  $R_2$ , celková indukčnost sekundární strany  $L_2$ , činitel vazby  $k$ , frekvence obvodu  $f$ , zatěžovací impedanci  $Z$  a vstupní napětí na primární straně  $U_1$ . Další důležitou součástí zmíněného listu je tlačítko vyřeš, které jedním stiskem vyřeší žádané výpočty, jimiž jsou proudy v obvodu, napětí obvodu, zdánlivé výkonu obvodu, úhlová frekvence a vzájemná indukčnost.

Druhý list sešitu vykresluje fázorové diagramy v automaticky nastaveném měřítku. Na obr.2 je zobrazen fázorový diagram napětí a proudů na jednotlivých obvodových prvcích.

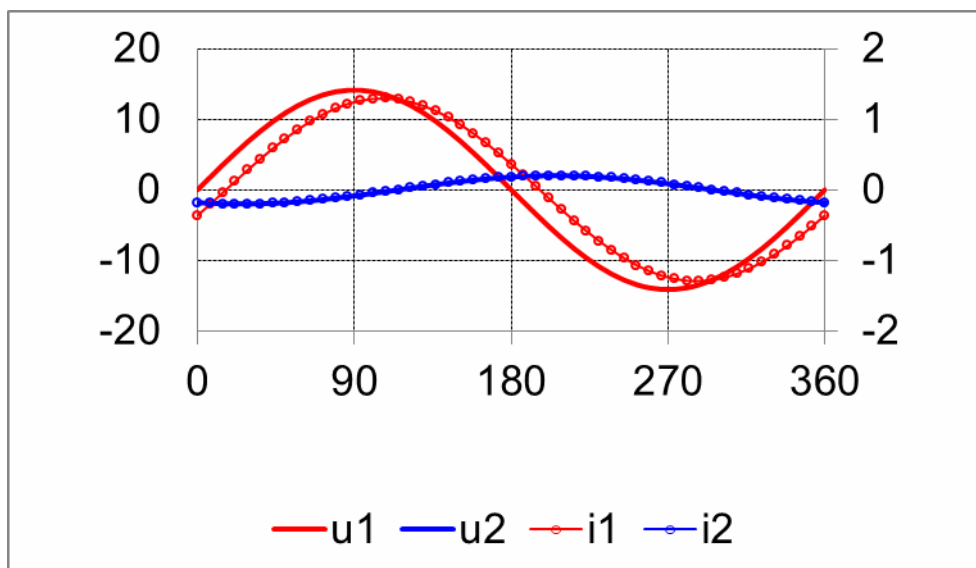


Obr.2 Fázorový diagram obvodových prvků

Kromě toho fázového diagramu jsou ihned po stisknutí tlačítka vyřeš na prvním listě vykresleny fázorové diagramy napětí a proudů, které vykreslují poměry na vstupu a výstupu řešeného indukčně vázaného obvodu.

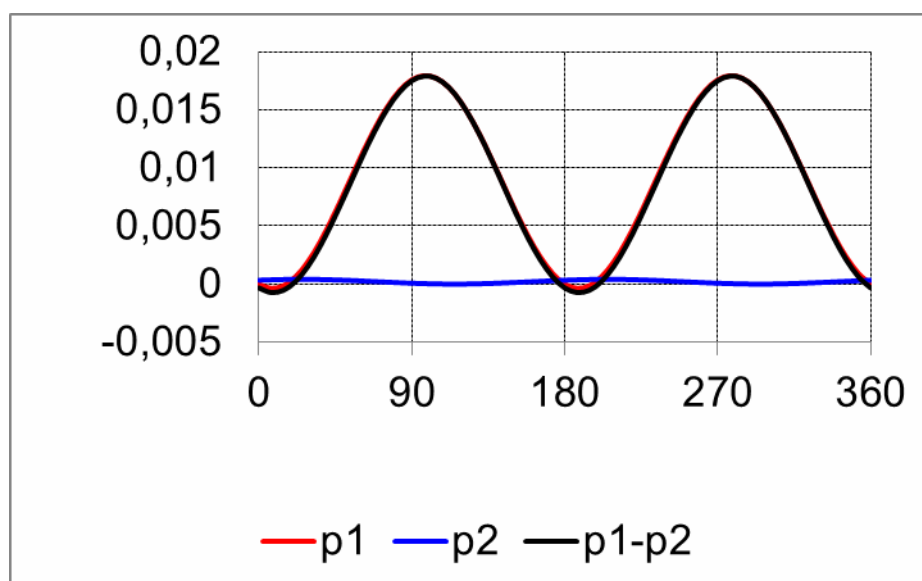
Třetí list sešitu vykreslí graf okamžitých hodnot napětí a proudů v čase viz obr 4. Graf zobrazí studentům jaký je ve skutečnosti průběh napětí a proudů v indukčně vázaném obvodu. Na základě změny vstupních hodnot mohou studenti pozorovat změny vstupního a výstupního napětí, potažmo vstupního a výstupního proudu. Takový to graf je zobrazen na obr. 3.





Obr. 3 Graf okamžitých hodnot  $u(t)$  a  $I(t)$

Na čtvrtém listě je graf okamžitého výkonu  $p(t)$ , který se skládá s rozdílu výkonu na primární a sekundární straně řešeného obvodu. Studenti tak vidí jaké poměry panují mezi výkony a jak nakonec vypadá výsledný výkon, který by si jen obtížně představovali.



Obr.4 Okamžitý výkon  $p(t)$

### Přínos virtuální laboratoře pro studenty

Mezi nespornou výhodou použití virtuálních laboratoří je oproti klasické výuce to, že studenti se nemusejí zabývat složitými výpočty, při kterých se nezřídka stává, že se mohou dopustit chyb.

Díky virtuální laboratoři mají studenti přístup k daleko většímu množství informací ihned oproti fyzické realizaci měření. Jelikož je virtuální měření vytvořeno v prostředí MS Excel a

zařízení na kterém běží je s určitostí připojeno k síti internet, pak má možnost student nalézt informace ihned na webovém prohlížeči, aniž by musel zdlouhavě vyhledávat v klasickém tištěném materiálu.

### **Závěr**

Průmyslová aglomerace a rozdílné vědomosti studentů z celého spektra středních škol vyžadují přechod od klasického pojetí výuky k modernější, e-learningové formě. Nicméně budoucnost takového typu výuky spatřujeme v tom, že se studentům nevnucuje striktní zadání, studenti se sami mohou rozhodnout co vypracují a jak, a tím se vlastně sami i ohodnotí. Učitel jim v tomto případě nabídne pouze možnost volby. Na studenty se tedy přenáší odpovědnost se sám rozhodnout a nést za toto rozhodnutí následky v podobě bodového ohodnocení.

### **Literatura**

1. Kijonka, J., Orság, P., Zajaczek, S.: *Matematické modely pro podporu výuky trojfázových obvodů*, Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava, (2009).
2. Kijonka, J., Zajaczek, S.: *Tvorba videí do výuky Teorie obvodů II*. In Sborník XXV. mezinárodního kolokvia o řízení osvojovacího procesu., Brno:Univerzita obrany, (2007).

### **Poděkování**

Príspevek vznikl díky podpoře projektu FRVŠ 2012/872.

# GERŠGORINOVY KRUHY

Martina Štěpánová

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK Praha  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
E-mail: [martinastepanova@centrum.cz](mailto:martinastepanova@centrum.cz)

**Abstrakt:** Cílem příspěvku je seznámit čtenáře s tzv. Geršgorinovými kruhy komplexní čtvercové matice  $A$ . Sjednocení těchto kruhů vytváří oblast komplexní roviny, v níž leží všechna vlastní čísla matice  $A$ . Krása Geršgorinovy věty spočívá v její jednoduchosti, neboť Geršgorinovy kruhy získáme pomocí snadných aritmetických operací s prvky matice  $A$ .

**Abstract:** The goal of this paper is to familiarize the reader with so-called Geršgorin circles of a complex square matrix  $A$ . The union of Geršgorin circles is a region in the complex plane which contains all the eigenvalues of  $A$ . The beauty of Geršgorin's theorem consists in its simplicity because circles are obtained by easy arithmetic operations on the entries of  $A$ .

V okamžiku, kdy jsme se poprvé setkali s definicí pojmu *vlastní číslo matice*,<sup>1</sup> nás zřejmě nenapadlo, že bychom mohli všechna vlastní čísla dané matice, resp. jim odpovídající body komplexní roviny lokalizovat do nějaké přesně vymezené oblasti, která je navíc získána pouze na základě jednoduchých operací s prvky dané matice. Připomeňme nejprve definici vlastního čísla matice:

**Definice 1.** *Necht'  $A$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Prvek  $\lambda$  nazýváme vlastním číslem matice  $A$ , jestliže existuje nenulový  $n$ -složkový řádkový vektor  $x$ , pro který platí<sup>2</sup>*

$$Ax^T = \lambda x^T.$$

*Vektor  $x$  se nazývá vlastní vektor matice  $A$  příslušný k vlastnímu číslu  $\lambda$ .*

Vlastní čísla matice  $A$  hledáme nejčastěji pomocí *charakteristického polynomu*  $\det(A - \lambda E)$  matice  $A$ , kde  $E$  značí jednotkovou matici řádu  $n$ , přesněji řečeno pomocí *charakteristické rovnice*  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Vlastní čísla matice  $A$  jsou totiž kořeny jejího charakteristického polynomu, tj. řešeními její charakteristické rovnice. *Násobnost vlastního čísla* splývá s násobností kořene charakteristického polynomu. Soubor všech vlastních čísel matice  $A$ , kde každé bereme tolikrát, kolik činí jeho násobnost, se nazývá *spektrum matice  $A$* .

---

<sup>1</sup> V celém textu budeme uvažovat matice nad číselným komutativním tělesem, tj. číselným polem.

<sup>2</sup> Je-li  $x$  řádkový vektor, pak  $x^T$  značí vektor transponovaný k vektoru  $x$ .

Tvrzení Geršgorinovy věty je založeno na Lévyově-Desplanquesově větě, která se týká tzv. diagonálně dominantních matic.

**Definice 2.** Necht'  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$  a necht'  $A_i$  značí součet absolutních hodnot prvků  $i$ -tého řádku neležících na hlavní diagonále, tj.

$$A_i = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jestliže  $|a_{ii}| > A_i$  pro každé  $i = 1, \dots, n$ , potom řekneme, že  $A$  je diagonálně dominantní matice.

**Věta 1 (Lévyova-Desplanquesova věta).**<sup>3</sup> Diagonálně dominantní matice  $A$  je regulární.

*Důkaz:* Předpokládejme, že je diagonálně dominantní matice  $A$  singulární. Homogenní soustava lineárních rovnic s maticí  $A$  má tedy netriviální řešení  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Mezi indexy  $i = 1, 2, \dots, n$  vyberme index  $r$ , pro který je  $|x_r|$  maximální, a z  $r$ -té rovnice soustavy dostaneme vztah

$$|a_{rr}| |x_r| \leq \sum_{k=1, k \neq r}^n |a_{rk}| |x_k| \leq A_r |x_r|,$$

kde první nerovnost plyne z vlastností absolutní hodnoty součtu a součinu, druhá z maximality  $|x_r|$ . Odtud plyne nerovnost  $|a_{rr}| \leq A_r$ , což je spor s předpokladem. ■

Pro nerozložitelnou (neboli ireducibilní) matici řádu  $n$ , tj. čtvercovou matici, kterou nelze simultánními permutacemi řádků a sloupců převést na tvar

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix},$$

kde  $O$  je nulová matice a  $A$  a  $C$  jsou čtvercové matice, můžeme v nejvýše  $n-1$  případech připustit rovnost  $|a_{ii}| = A_i$  a věta zůstane v platnosti.

Velmi efektním důsledkem Lévyova-Desplanquesova teorému je tzv. Geršgorinova věta. Postačí větu aplikovat na charakteristický polynom matice. Pro vlastní číslo  $\lambda$  matice  $A$  je determinant  $\det(A - \lambda E)$  nulový, a proto musí existovat index  $i$  takový, že  $|a_{ii} - \lambda| \leq A_i$ . Z geometrické interpretace této nerovnosti dostáváme následující tvrzení:

**Věta 2 (Geršgorinova věta).** Všechna vlastní čísla komplexní čtvercové matice  $A = (a_{ij})$  řádu  $n$  leží v oblasti

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i,$$

<sup>3</sup> Jednoduchost Lévyovy-Desplanquesovy věty podtrhuje její využití. Například při řešení homogenních soustav lineárních rovnic, jejichž matice jsou diagonálně dominantní, věta poskytne v porovnání s jinými metodami (např. Gaussovou eliminační metodou) velmi rychlý výsledek. Diagonálně dominantní matice soustavy je regulární, proto má homogenní soustava jediné řešení, kterým je řešení triviální. Soustavu tedy není nutné dále řešit. Pro nehomogenní soustavu alespoň usoudíme, že řešení soustavy existuje jediné.

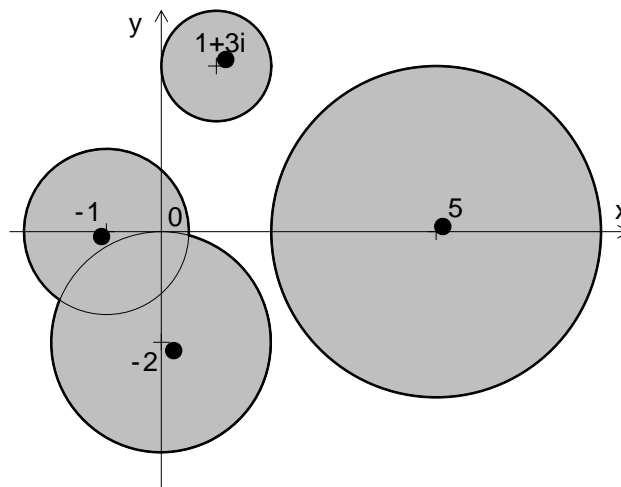
Obdobně lze „od pohledu“ řešit otázku, zda například vektory  $\mathbf{a} = (1; 5; 0; 0)$ ,  $\mathbf{b} = (-2; 1; -1; 8)$ ,  $\mathbf{c} = (7; 1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{d} = (2; -3; 14; 5)$  tvoří bázi vektorového prostoru  $R^4$ . Postačí uvažovat matici, jejíž řádky jsou po řadě vektory  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{b}$ , pomocí věty o diagonálně dominantních maticích usoudit, že matice je regulární, a na položenou otázku můžeme ihned odpovědět kladně.

kde  $\Gamma_i$  jsou kruhy v komplexní rovině o středu  $a_{ii}$  a poloměru  $r_i$ , který se rovná součtu absolutních hodnot prvků ležících v  $i$ -tém řádku matice  $A$  mimo hlavní diagonálu.<sup>4</sup> Tyto oblasti se nazývají Geršgorinovy kruhy, jejich sjednocení Geršgorinova množina.

Ukažme výpočet Geršgorinovy množiny pro konkrétní matici

$$A = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0,5 \\ -1 & 1 & -2i & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Její Geršgorinovy kruhy mají po řadě středy  $a_{11}=1+3i$ ,  $a_{22}=-1$ ,  $a_{33}=-2i$ ,  $a_{44}=5$  a poloměry  $r_1=1$ ,  $r_2=1,5$ ,  $r_3=2$ ,  $r_4=3$ . Příslušná Geršgorinova množina tedy vypadá takto (vlastní čísla jsou na všech obrázcích znázorněna černými kroužky):



Každý z kruhů nemusí nutně obsahovat právě jedno vlastní číslo. Existují matice, jejichž některé kruhy nemají žádné vlastní číslo, ale jiné kruhy jich obsahují více. Jestliže je však nějaká souvislá komponenta Geršgorinovy množiny vytvořena pomocí  $m$  kruhů, potom obsahuje právě  $m$  vlastních čísel. Z toho vyplývá, že izolovaný kruh musí obsahovat právě jedno vlastní číslo.

Pro matici druhého řádu, jejíž Geršgorinovy kruhy se neredukují na bod, můžeme uvést dva přesnější výsledky:

**Věta 3.** Společný bod dvou Geršgorinových kruhů matice druhého řádu, který není jejich společným hraničním bodem, nemůže být vlastním číslem této matice.

*Důkaz:* Předpokládejme, že vlastní číslo  $\lambda$  matice  $A=(a_{ij})$  leží v obou kruzích, ale není jejich společným hraničním bodem, tj. splňuje nerovnosti  $|a_{11} - \lambda| \leq |a_{12}|$  a  $|a_{22} - \lambda| < |a_{21}|$ .

Uvažujme dále soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Protože  $\lambda$  je vlastním číslem matice  $A$ , musí k němu existovat nenulový vlastní vektor  $(x_1^*, x_2^*)$ , tj. musí existovat netriviální řešení zmíněné soustavy. Mezi absolutními

<sup>4</sup> Místo  $A_i$  jsme poloměry těchto kruhů označili  $r_i$ , jak je zvykem.

hodnotami složek platí jeden ze vztahů  $|x_1^*| > |x_2^*|$ ,  $|x_1^*| = |x_2^*|$  nebo  $|x_1^*| < |x_2^*|$ , z nichž však každý popírá platnost předpokládaných nerovností. ■

**Věta 4.** Dvojnásobné vlastní číslo matice řádu dva může být společným hraničním bodem jejích Geršgorinových kruhů pouze v případě, že se kruhy dotýkají a mají stejný poloměr.

*Důkaz:* Nejobecnější případ (nediagonální) matice řádu dva, jež má dvojnásobné vlastní číslo  $\lambda$ , lze psát ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22}/D & -a_{12}/D \\ -a_{21}/D & a_{11}/D \end{pmatrix},$$

kde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  jsou libovolná komplexní čísla taková, že  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ . Po roznásobení a úpravě dostáváme tvar

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + a_{12}a_{22}/D & -a_{12}^2/D \\ a_{22}^2/D & \lambda - a_{12}a_{22}/D \end{pmatrix}.$$

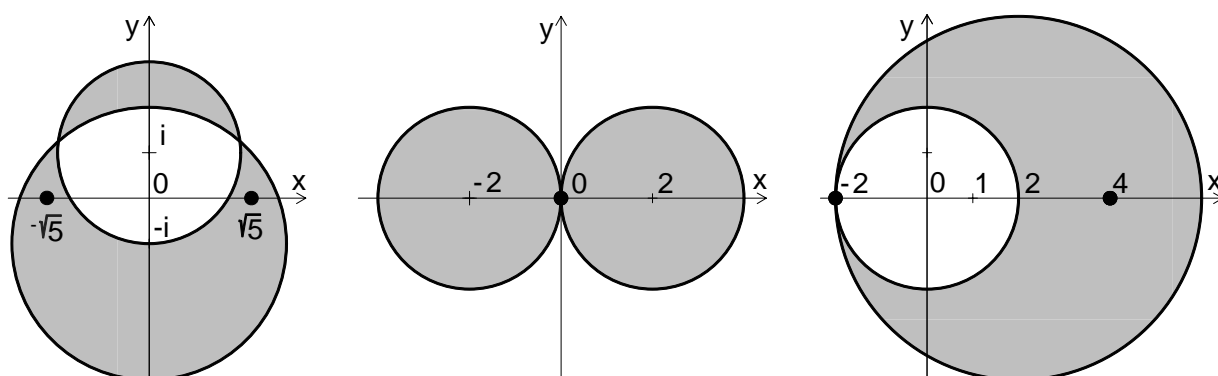
Jestliže  $\lambda$  leží uvnitř nebo na hranici prvního kruhu, platí  $|\lambda - \lambda - a_{12}a_{22}/D| \leq |-a_{12}^2/D|$  a po úpravě  $|a_{22}| \leq |a_{12}|$ . Jestliže  $\lambda$  leží uvnitř nebo na hranici druhého kruhu, dostáváme zcela analogicky  $|a_{22}| \geq |a_{12}|$ . Tedy  $|a_{22}| = |a_{12}|$  a po dosazení do výše uvedené matice  $A$  vidíme, že poloměry kruhů jsou stejné (rovné číslu  $a_{12}^2/|D|$ ) a kruhy se dotýkají (neboť jejich středy jsou středově souměrné dle bodu  $\lambda$  a vzdáleny  $2a_{12}^2/|D|$ ). ■

Použití Věty 3 je výhodné, když se kruhy značně překrývají nebo když jeden leží uvnitř druhého. Pro větší názornost přikládáme tři konkrétní příklady:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 3 & -i \end{pmatrix},$$

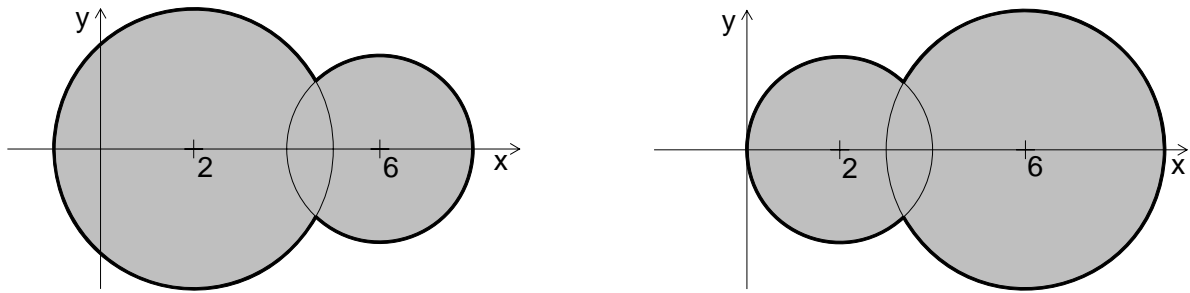
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

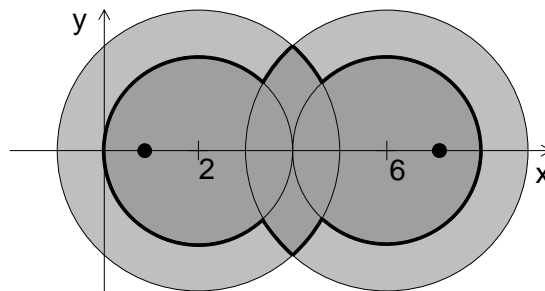


Je-li tedy menší kruh uvnitř většího, neobsahuje žádné vlastní číslo, a jsou-li kruhy separované, nutně obsahuje právě jedno vlastní číslo. Musí tedy existovat mezní pozice kruhů, v níž menší kruh obsahuje vlastní číslo.

Geršgorinovu větu jsme formulovali pomocí řádků matice. Zcela analogicky tvrzení platí i pro její sloupce. Ukažme na konkrétním příkladu (pro jednoduchost na matici řádu dva), jak lze kombinací obou přístupů zmenšit oblast, v níž leží vlastní čísla matice. Užitím řádků a poté sloupců matice získáme pro matici  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  Geršgorinovy množiny



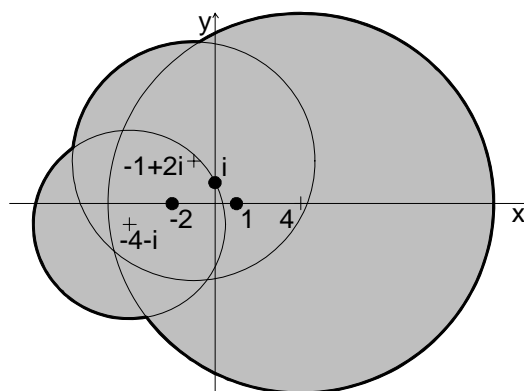
Vlastní čísla dané matice leží v obou těchto množinách, tj. v jejich průniku:



Průniků různých Geršgorinových množin lze využít i v případě podobných transformací. Pro regulární matici  $S$  mají totiž matice  $A$  a  $S^{-1}AS$  stejná vlastní čísla, transformací se však pozmění Geršgorinova oblast. Lze uvažovat speciální případ podobné transformace, která zachovává středy Geršgorinových kruhů a mění pouze jejich poloměry. Jedná se o matice  $S$ , které se od jednotkové matice liší pouze na  $i$ -tém místě hlavní diagonály, kde mají vhodný nenulový prvek  $q$ . Geršgorinův kruh příslušný  $i$ -tému řádku má pak poloměr  $1/q$ . Pro lepší názornost ukažme proměny kruhů na konkrétní matici

$$A = \begin{pmatrix} -4-i & -2-i & 2+i \\ -2+2i & -1+2i & 2-2i \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

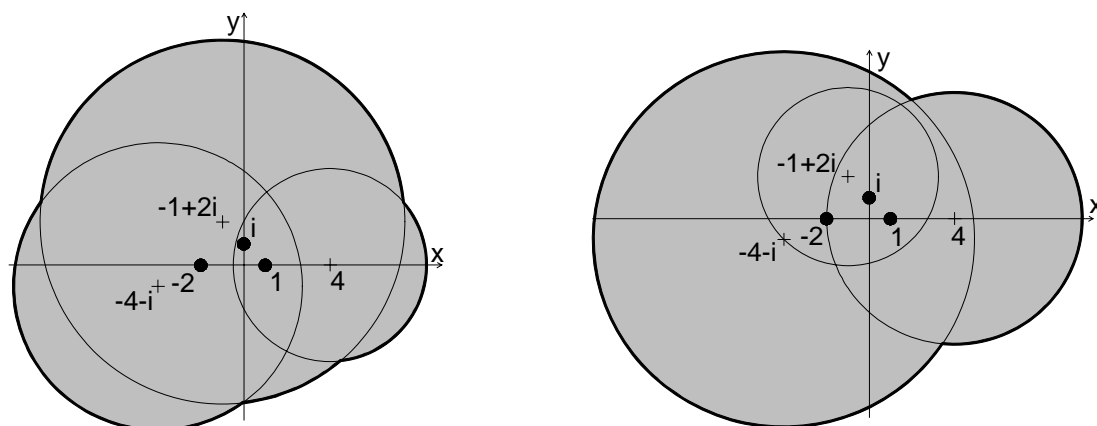
Její vlastní čísla jsou  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = i$  a  $\lambda_3 = 1$ . Středy kruhů jsou v bodech  $-4-i$ ,  $-1+2i$  a  $4$ , příslušné poloměry jsou po řadě  $2\sqrt{5}$ ,  $2\sqrt{8}$  a  $9$ . Geršgorinova množina vypadá takto:



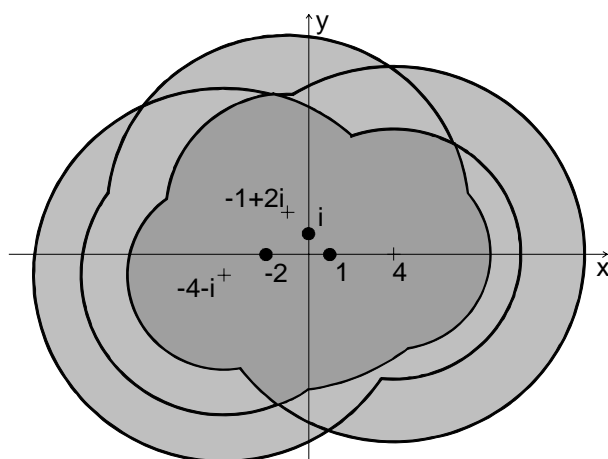
Uvažujme nyní transformaci  $B = S^{-1}AS$  a následně transformaci  $C = T^{-1}BT$ , kde regulární matice  $S$  a  $T$  jsou zadány takto:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Těmito transformacemi se nejprve zmenší poloměr kruhu příslušného k třetímu řádku matice  $A$  na polovinu a poté poloměr kruhu příslušného k druhému řádku matice  $B$  také na polovinu. Současně se změní i poloměry ostatních kruhů. Postupně tedy vzniknou nové Geršgorinovy množiny:



Průnik tří uvedených Geršgorinových množin je znázorněn na následujícím obrázku:



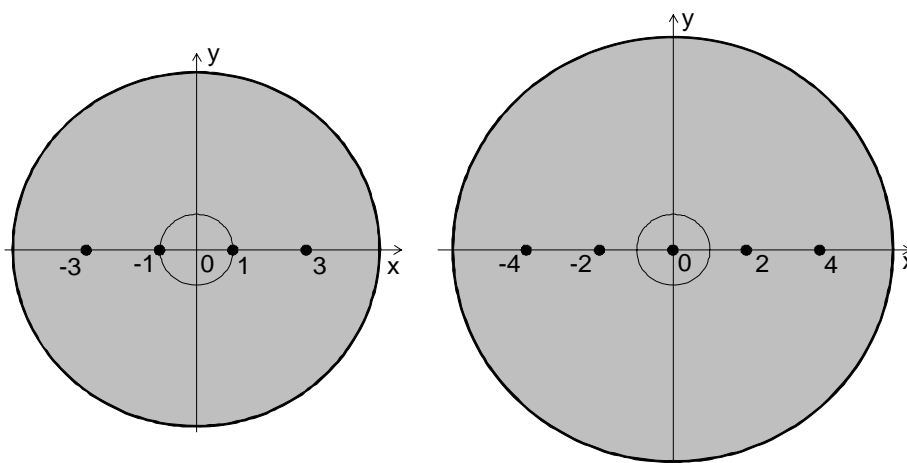
Chceme-li oblast, v níž leží vlastní čísla dané matice, dále zužovat, můžeme rezignovat na požadavek zachování středů kruhů.

S Geršgorinovými množinami bychom si mohli „hrát“ pro různé speciální typy matic. Triviálním případem jsou diagonální matice, jejichž kruhy mají nulové poloměry. Kruhy degenerují na body, které odpovídají prvkům na hlavní diagonále, jež jsou současně vlastními čísly matice. Geršgorinovy množiny jsou zajímavé například i pro tzv. Kacovy matice. Kacovou maticí  $K_n$  přitom rozumíme čtvercovou matici řádu  $n+1$ , jejíž prvky nad diagonálou jsou  $1, 2, \dots, n$ , pod diagonálou  $n, n-1, \dots, 1$  a ostatní prvky jsou rovny 0. Je známo, že vlastní čísla Kacovy matice  $K_n$  jsou rovna  $\pm n, \pm (n-2), \dots$ , přičemž posloupnost končí čísly  $\pm 1$ , jestliže je  $n$  liché, resp.  $\pm 2, 0$ , jestliže je  $n$  sudé. Všech  $n+1$  Geršgorinových kruhů Kacovy matice  $K_n$  ( $n \geq 2$ ) se redukuje na dva soustředné kruhy se středem v počátku souřadnicového systému. První z nich vznikne splynutím dvou kruhů příslušných prvnímu a poslednímu řádku matice a má vždy poloměr roven jedné, druhý vznikne splynutím kruhů příslušných všem zbývajícím řádkům a jeho poloměr je o dvě jednotky větší než největší vlastní číslo matice  $K_n$ , (o jedničku větší než řád matice  $K_n$ , tj.  $n+2$ ). Kacovy matice  $K_3$  a  $K_4$  a jejich Geršgorinovy množiny tedy vypadají takto:



$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



## Literatura

- [1] Brauer A.: *Limits for the characteristic roots of a matrix*. Duke Mathematical Journal 13(1946), 387–395.
- [2] Desplanques J.: *Théorème d'algèbre*. Journal de Math. Spec. 9(1887), 12–13.
- [3] Gerschgorin S.: *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*. Izvestija Akademii nauk SSSR 7(1931), 749–754.
- [4] Lévy L.: *Sur la possibilité de l'équilibre électrique*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 93(1881), 706–708.
- [5] Taussky-Todd O.: *A method for obtaining bounds for characteristic roots of matrices with application to flutter calculations*. Aeronautical Research Council of Great Britain, Report 10.508, 1947.
- [6] Taussky-Todd O.: *Bounds for characteristic roots of matrices*. Duke Mathematical Journal 15(1948), 1043–1044.
- [7] Taussky-Todd O.: *A recurring theorem on determinants*. The American Mathematical Monthly 56(1949), 672–676.
- [8] Taussky-Todd O.: *How I became a torchbearer for matrix theory*. The American Mathematical Monthly 95(1988), 801–812.
- [9] Taussky-Todd O., Todd J.: *Another look at a matrix of Mark Kac*. Linear Algebra and its Applications 150(1991), 341–360.
- [10] Varga R. S.: *Geršgorin and his circles*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

## Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*.

# **OBLICZANIE ILOŚCI POWIETRZA DOPŁYWAJĄCEGO DO POŁA ZAWAŁOWEGO ŚCIANY PRZEWIETRZANEJ SYSTEMEM NA „U“ DO GRANIC POŁA EKSPLOATACJI**

**Magdalena Tutak**

**Instytut Eksploatacji Złóż, Wydział Górnictwa  
i Geologii, Politechnika Śląska ul. Akademicka 2, 44 – 100 Gliwice, Polska  
E-mail: magdalena.tutak@polsl.pl**

**Abstrakt:** Artykuł przedstawia możliwość zastosowania równania filtracji Darcy do obliczenia ilości powietrza dopływającego do przestrzeni zawałowej ścian eksploatacyjnych przewietrzanych systemem na „U“ do granic pola.

**Abstract:** The article presents the possibility of using the Darcy equation to calculate the airflow volume through the goaf of longwalls with caving with "U" ventilation system from retreat.

## **1. Wprowadzenie**

Podczas przewietrzania ścian eksploatacyjnych, prowadzonych na zawał, system na „U“ do granic pola eksploatacyjnego, powietrze doprowadzane i odprowadzane ze ściany, na całej długości styka się ze zrobami zawałowymi (polem zawałowym, strefą zawału) [1,3]. W przypadku stosowania tego systemu przewietrzania występują starty powietrza przez zrob, zarówno od strony chodnika nadścianowego jak i podścianowego. Uciekające powietrze do strefy zawału, nie spełnia w pełni swojego zadania wentylacyjnego, a straty powietrza przenikającego do zrobów mogą sięgać nawet 50%, co uzależnione jest m.in. od miąższości pokładu czy szczelności zrobów zawałowych [3].

Ilość powietrza dopływającego do zrobów ścian zawałowych ma istotne znaczenie w przypadku występowania zagrożenia metanowego oraz zagrożenia pożarowego w rejonie eksploatowanej ściany.

Pomimo, że w ostatnich latach nastąpiło zdecydowane odejście od systemu przewietrzania ścian eksploatacyjnych systemem na „U” do granic pola, warto zaznaczyć, że system ten posiada korzystne cechy w przypadku występowania zagrożenia metanowego oraz zagrożenia tapaniami [5].

W niniejszym artykule przedstawiono sposób obliczania ilości powietrza dopływającego do pola zawałowego ścian przewietrzanych systemem na „U” do granic pola eksploatacyjnego.

## 2. Równanie filtracji gazów przez ośrodki przepuszczalne

Zroby ściany zawałowej tworzą załamane bloki skalne. Można je traktować jako ośrodek szczelinowaty, w którym następuje filtracyjny przepływ gazów. Prędkości filtracji w takim ośrodku, zgodnie z prawem Darcy’ego, określa zależność [2, 4]:

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p \quad (1)$$

gdzie:

- $\bar{v}$  - prędkość filtracji, m/s
- $k$  - współczynnik przepuszczalności,  $m^2$
- $\mu$  - współczynnik lepkości, Pa·s
- $p$  - ciśnienie gazu, Pa

Przepływ gazu w polu zawałowym, zapisać można w postaci równania ciągłości przepływu w ośrodku przepuszczalnym:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \text{div} \rho \bar{v} = 0 \quad (2)$$

przy czym:

$$Q = m\rho + \rho_s \quad (3)$$

gdzie:

- $m\rho$  - masa gazu zawarta w jednostce objętości ośrodka o porowatości  $m$ ,
- $\rho_s$  - gęstość sorpcji gazu.

Równanie (1) sprowadzone do równania transportu gazu w ośrodku przepuszczalnym przyjmie postać:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ \frac{k}{\mu} \rho \operatorname{grad} p \right] \quad (4)$$

Rozpatrywanie ruchu w ośrodku przepuszczalnym wymaga jeszcze podania równania stanu izotermi w postaci:

$$\frac{p}{\rho} = \operatorname{const} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (5)$$

gdzie:

$\rho$  - gęstość powietrza.

Równanie Laplace'a (cząstkowe równanie różniczkowe drugiego rzędu na pole ciśnień w przypadku filtracji dwuwymiarowej) ruchu jednowymiarowego, po przyjęciu warunków brzegowych, przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

Gdy równanie (1) zostanie podstawione do równania (4), przy założeniu, że: przepływ gazu jest jednowymiarowy, pole bezźródłowe, przemiana jest przemianą izotermiczną, a wartości  $\mu$ ,  $k$ ,  $\rho$  są stałe, to całka z równania (6) przyjmie postać:

$$p = C_1 x + C_2 \quad (7)$$

Po przyjęciu warunków brzegowych:

$$x = 0, \quad p = p_1 \Rightarrow C_2 = p_1$$

$$x = L, \quad p = p_2 \Rightarrow C_1 = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{\Delta p}{L}$$

otrzyma się więc:

$$p = p_1 - \frac{\Delta p}{L} x \quad (8)$$

Zróżniczkowanie równania (8) daje równanie w postaci:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L} \quad (9)$$

Uwzględniając powyższe formułę prawa Darcy można w rezultacie zapisać przy pomocy ciśnienia w postaci różniczkowej:

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (10)$$

gdzie:

L - długość drogi filtracji, m.

Ilość powietrza dopływającego do zrobów ściany zawałowej można obliczyć zatem wykorzystując równanie w postaci:

$$\Delta Q = S \frac{k \Delta p}{\mu L} \quad (11)$$

gdzie:

S - pole powierzchni przepływu powietrza przez zrob, m<sup>2</sup>.

Powierzchnia przez którą następuje przepływ powietrza wynosi ostatecznie:

$$S = 3,5 \times m \times l, \text{ m}^2 \quad (12)$$

gdzie:

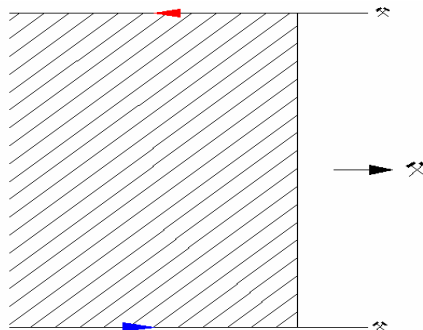
m - wysokość ściany, m;

l - długość zrobów, m.

### **Przykład obliczeniowy:**

Na podstawie poniższych danych obliczyć wydatek powietrza przepływającego przez pole zawałowe ściany przewietrzanej systemem na „U” do granic pola:

1. wysokość eksploatowanej ściany:  $m = 1,0 \text{ m}$
2. długość zrobów:  $l = 100 \text{ m}$
3. długość eksploatowanej ściany (długość drogi filtracji):  $L = 150 \text{ m}$
4. współczynnik lepkości dynamicznej powietrza:  $\mu = 181 \cdot 10^{-5} \text{ Nsm}^{-5}$
5. współczynnik przepuszczalności:  $k = 10^{-6} \text{ m}^{-2}$
6. różnica ciśnień na drodze filtracji (mierzona pomiędzy chodnikiem podścianowym i nadścianowym):  $\Delta p = 90 \text{ Pa}$



Rys. 1. Schemat przewietrzania ściany systemem na „U” do granic pola eksploatacji.

$$Q = 3,5 \times 1,0 \times 100 \times \frac{10^{-6} \times 90}{181 \times 10^{-5} \times 150} = 0,116 \text{ m}^3/\text{s}$$

### **3. Zakończenie**

Polskie kopalnie węgla kamiennego prowadzą eksploatację głównie systemem ścianowym z zawałem skał stropowych. Eksploatacja węgla prowadzona jest w pokładach, w których występują zarówno zagrożenie metanowe jak i zagrożenie pożarowe. Obliczenie ilości powietrza przenikającego do przestrzeni zawałowej może zostać wykorzystane do doboru profilaktyki, której celem jest zwalczanie zagrożenia pożarami endogenicznymi w zrobach zawałowych.

Przedstawione w artykule równanie filtracji Darcy daje możliwość obliczenia ilości powietrza dopływającego do pola zawałowego, która uzależniona jest od: współczynnika lepkości dynamicznej powietrza, pola powierzchni zrobów zawałowych, współczynnika przepuszczalności, a także różnicy ciśnień na drodze filtracji.

#### **Literatura:**

1. Budryk W.: Wentylacja kopalń. Część 1 – Przewietrzanie wyrobisk. Wyd. Górnictwo – Hutnicze, Katowice, 1981;
2. Jeżowiecka – Kabsch K., Szewczyk H.: Mechanika Płynów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001;
3. Pawiński J., Roszkowski J., Strzeński J.: Przewietrzanie kopalń. Wyd. Śląsk, Katowice 1979;
4. Strzelecki T., Kostecki S., Żak S.: Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2008;
5. Szlązak J., Szlązak N.: Filtracja powietrza przez zroby ścian zawałowych w kopalniach węgla kamiennego. Uczelniane Wydawnictwa Naukowe – Dydaktyczne AGH, Kraków 2005.
6. Szlązak J.: Metody obliczania rozprywu powietrza i rozkładu stężenia metanu w zrobach ścian zawałowych. Przykłady wykorzystania. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.

# ÚLEHLOVY POČETNICE

L. Vízek

**Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze  
Sokolovská 83, 186 75 Karlín – Praha 8  
Email: lukas.vizek@seznam.cz**

**Abstrakt:** Článek přibližuje učebnice matematiky pro měšťanské školy Josefa Úlehly (1852–1933), významného českého učitele. Podává jejich přehled, rozebírá obsah, vzájemně je porovnává a představuje nepublikovaný metodický doplněk k učebnicím. Závěrem uvádí možný přesah Úlehlových učebnic do současnosti.

**Abstract:** This article approaches the textbooks for the secondary schools written by important Czech teacher Josef Úlehla (1852–1933). It gives the overview of these texts, analyzes their content, compares them with each other and presents the unpublished methodological supplement to these textbooks. Finally, it talks about the overlap of Úlehla's textbooks to the present.

## 1. Úvod

### 1.1 Josef Úlehla

Josef Úlehla se narodil 16. března 1852 v Podivíně u Břeclavi. Studoval na gymnáziích ve Strážnici a v Brně, absolvoval v roce 1873 složením zkoušky dospělosti na učitelském ústavu v Brně. Vyučoval matematiku a přírodovědné předměty na obecných a později měšťanských školách na Moravě. Funkci ředitele měšťanské školy zastával od roku 1897 v Kloboukách u Brna, v roce 1905 v Jaroměřicích nad Rokytinou a v letech 1905 až 1912 ve Strážnici. Byl vůdčí osobností moravských učitelů, aktivně se podílel na utváření učitelských spolků. Zemřel 22. prosince 1933 v Lipově.

Publikoval více než 150 prací. Věnoval se didaktice a metodice přírodovědných oborů, historii matematiky a filozofii. Do češtiny překládal práce evropských reformních pedagogů. Napsal dvoudílnou monografii *Dějiny matematiky*, učebnici *Počet infinitesimální* a učebnice přírodopisu a matematiky pro měšťanské školy.<sup>1</sup>

### 1.2 Měšťanské školy

V roce 1869 došlo k reorganizaci vzdělávání v rakousko-uherské monarchii na základě tzv. velkého říšského zákona. Pod souhrnným názvem *obecné školy* vznikly

---

<sup>1</sup> O životě a díle Josefa Úlehly viz Vízek L.: *Josef Úlehla a jeho učebnice Počet infinitesimální*. In *Sborník z 20. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. Ostrava, 2011, str. 125–131, nebo Vízek L.: *Josef Úlehla (1852–1933) a jeho Dějiny matematiky*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): *32. mezinárodní konference Historie matematiky*. Matfyzpress, Praha, 2011, str. 275–284.

*obyčejné obecné školy a měšťanské školy*; zpravidla byly dělené na chlapecké a dívčí. *Obecné školy* byly osmileté, chodily na ně děti v rámci své povinné školní docházky ve věku 6 až 14 let. *Obyčejné obecné školy* (častěji zřizované na venkově) i *měšťanské školy* (zřizované především ve městech) byly osmileté nebo na pětileté *obyčejné obecné školy* navazovaly tříleté *měšťanské školy*. V roce 1883 byly *měšťanské školy* reformovány a ustanoveny již čistě jako tříleté vyšší *obecné školy*. V současnosti jsou porovnatelné s druhým stupněm základní školy.<sup>2</sup>

## 2. Úlehlovy početnice pro měšťanské školy

J. Úlehla napsal početnice pro všechny tři ročníky (stupně) měšťanské školy, připravil odlišné verze pro chlapecké školy a pro dívčí školy. Všechny vyšly v prvním vydání v roce 1909. V následujícím rozboru využijeme jejich variantu pro chlapecké školy.<sup>3</sup>

Učebnice jsou v každém ročníku rozděleny do deseti kapitol s dodatky.<sup>4</sup> Každá obsahuje v průměru 38 číslovaných úloh. K přiblížení jejich uspořádání vybereme například první kapitolu z druhého ročníku *O poměru a srovnalosti*.

Na úvod zařadil J. Úlehla jednoduché úkoly, jimiž motivoval ke studiu nové látky. Zmíněnou kapitolu zahájil vybídnutím:

*1. Změřte, jak vysoká jest lidská hlava s krkem proti celému tělu; jak dlouhá jest ruka, noha proti tělu; jak vysoké jest čelo proti tváři. ([1], str. 38)*

V následujících úlohách stručně zavedl nové pojmy a popsal jejich vlastnosti. V podstatě se však nezabýval teorií. Představovaná pravidla ani v náznaku nedokazoval, potřebný komentář nechal na učiteli. Mnohdy k objevení nových vlastností motivoval příkladem:

*2. Tvář byla dlouhá 16 cm, čelo vysoké 5·5 cm; kolikrát byla tvář vyšší než čelo?*

*Srovnání dvou veličin stejnorodých, aby se určilo, kolikrát jest jedna z nich větší*

*nebo menší než druhá, sluje poměr; 16 : 5·5 jest poměr.*

---

<sup>2</sup> Více o zavedení měšťanských škol a o vývoji tehdejší soustavy škol v našich zemích viz Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství*. I. díl, Sfinx Bohumil Janda, Praha, 1929.

<sup>3</sup> Vydání pro dívčí školy je určitým způsobem od chlapeckého odvozené.

<sup>4</sup> *Stupeň I.: Počítání. Základní čísla, společná míra, společný násobek. Soustava desetinná. Číslice římské. Základní úkony početní. Počítání s čísly vícejemnými. Počítání zlomkové. Počítání úsudkové. Počet procentový a Jednoduchý počet úrokový.*

*Stupeň II.: O poměru a srovnalosti. Trojčlenka jednoduchá. Trojčlenka složená. Umocňování a odmocňování dvěma. Počet procentový. Jednoduchý počet úrokový. Počet diskontový. Počet lhůtový. Počet průměrný, směšovací a spolkový. Příklady k opakování a dodatek Míry, váhy a peníze.*

*Stupeň III.: Umocňování a odmocňování třemi. Složitý počet úrokový. Výpočty pojišťovací. Počet mincovní. Cenné papíry. Řetězový počet. Obchod a knihy obchodní. O číslech protivných. O číslech obecných s podkapitolou Rovnice. Příklady k opakování a dodatky Tabulka uročitelů, střadatelů a záso-bitelů. Pojišťovací sazby. Mince. Kursovní list. Míry, váhy a peníze a Ukázka obchodních knih.*



*Poměrem se naznačuje měření. ([1], str. 38)*

*5. Když se zvětší nebo zmenší tvář i čelo, co se nesmí zvětšiti ani zmenšiti?  
Poměr se nezmění, když se stejně znásobí nebo rozdělí oba jeho členy. ([1], str. 38)*

Největší prostor v kapitolách věnoval J. Úlehla příkladům na procvičení. Seřadil je zpravidla podle obtížnosti od jednodušších po složitější. Úlohy mnohdy vzájemně propojil, k jejich řešení bylo nutné postupovat popořadě:

*9. Za 5 minut ujede cyklista 2 km, za 30 minut ujede 12 km; který jest poměr a) obojí dráhy? b) obojí doby? ([1], str. 39)*

*10. Jsou tyto poměry rovny? Jsou dráha a doba věci na sobě závislé? Kterak jsou na sobě závislé?*

Na závěr kapitol zařadil J. Úlehla zpravidla obtížnější nebo rozšiřující cvičení. Sledovanou kapitolu *O poměru a srovnalosti* zakončil příkladem, pomocí něhož připravoval žáky ke studiu následující kapitoly *Trojčlenka jednoduchá*:

*15. Ve srovnalosti  $x : 15 = 16 : 6$  neznáme prvního členu; kterak jej vypočteme ze tří členů ostatních? ([1], str. 39)*

### **3.1 Početnice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň I. a II.**

Nyní popíšeme jednotlivé díly Úlehlových početnic. Přiblížíme jejich obsah a z každé vybereme několik příkladů.

*Početnice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň I. a II.* [1] tvoří jeden svazek. První část, *Stupeň I.* a je věnována výkladu základních početních operací, zlomkům, desetinným číslům, procentům a jednoduchým slovními úlohami. *Stupeň II.* je určen k výuce trojčlenky, umocňování, odmocňování, finanční aritmetiky (zejména jednoduchému úročení) a k opakování ročníku.

J. Úlehla chtěl mnohdy přivést žáky k matematice trochu mimoděk, proto vytvářel dosti originální cvičení. Do kapitoly *Počítání* (část *Stupeň I.*) zahrnul například úlohy:

*13. Vypozorujte, za kolik minut projdete km při klidné chůzi, za kolik minut jej proběhnete; za kolik minut jej projede cyklista, automobil, kočár, vůz s těžkým nákladem.*

*16. Změřte, jak jste silni, kolik kg utlačíte na siloměru. ([1], str. 1–2)*

# POČETNICE

PRO

## MĚŠŤANSKÉ ŠKOLY

CHLAPECKÉ.

NAPSAL

JOSEF ÚLEHLA.

STUPEŇ PRVNÍ A DRUHÝ.



CENA 60 h.

V PRAZE.

V CÍSAŘSKÉM KRÁLOVSKÉM ŠKOLNÍM KNĚHOŠKLADĚ.  
1909.

V učebnici je mnoho příkladů založeno na reálných informacích a odráží Úlehlův důraz na vztah probírané látky k praktickému každodennímu životu. Dokladem je 67. příklad z kapitoly *Základní úkony početní*:

*Z Nového Yorku vyvezlo se 12. července 1902 do Evropy 222.000 bušlů pšenice.*

*Kolik je to angl. liber, počítá-li se bušl za 60 lb? Kolik kg, je-li angl. libra 453·598 g?*

([1], str. 17)

V době vydání popisovaných učebnic se výuka matematiky věnovala početním operacím více než dnes. Je to samozřejmě pochopitelné, neboť nebyly k dispozici současné výpočetní prostředky. Podívejme se, jakým způsobem J. Úlehl ve druhé části knihy, *Stupni II.*, v kapitole *Umocňování a odmocňování dvěma* vysvětlil postup výpočtu druhé odmocniny:

22. *Sestroj čtverec, jenž má 2116 cm<sup>2</sup>.*

*16 dm jest plocha čtverce, jehož strana jest dlouhá 4 dm = 40 cm; 516 cm<sup>2</sup> jest plocha obdélníku, který se k tomuto čtverci připojuje po dvou jeho stranách jako pás a s ním činí nový čtverec. Ten jest pak delší než 80 cm. Přiměříme-li 80 k 516, vypočteme, že obdélník jest široký 6 cm, dlouhý 86 cm, plocha jeho jest 86 cm<sup>2</sup> x 6 = 516 cm<sup>2</sup>. Výpočet tento upravujeme takto:*

$$\sqrt{(22|16)} = 46$$

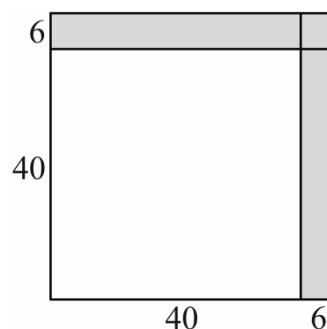
$$- 16$$

$$516 : 86$$

$$- 86 \times 6$$

*Žádaný čtverec má stranu dlouhou 46 cm.* ([1], str. 45)

Aritmetická úloha je geometricky interpretována, má být vypočtena délka strany čtverce se zadaným obsahem. Nejdříve je nalezeno nejvyšší číslo menší než zadaných 2116, jenž lze z paměti odmocnit. V řešení je uvažováno 1600, snadný výpočet odmocniny zdůrazňuje uvedených 16 dm<sup>2</sup>. Čtverec s takovým obsahem má stranu délky 4 dm, tj. 40 cm (na obrázku vpravo je znázorněn bíle).



Dále je vypočten rozdíl zadaného a uvažovaného čtvercového čísla:  $2116 - 1600 = 516$ . Lze jej interpretovat jako obsah plochy tvaru písmene L, která obepíná nalezený čtverec (na obrázku je vyznačena šedě). K výpočtu její šířky je využito „rozvinutí“ plochy v obdélník, jehož delší strana má jistě větší délku než dvojnásobek strany bílého čtverce. Neboli je třeba nalézt rozklad čísla 516 na součin dvou čísel, z nichž je jedno větší než 80. Situaci odpovídá rozklad  $516 = 6 \times 86$ . Odmocnina z čísla 2116 je nakonec rovna součtu 40 a 6, tj. 46.

Závěrem ještě upozorníme na tiskovou chybu. V prvním řádku výpočtu je mylně uvedeno  $\sqrt{(22|16)}$ , má být  $\sqrt{(21|16)}$ .<sup>5</sup>

### 3.2 Početnice pro měšť'anské školy chlapecké, stupeň III.

<sup>5</sup> Ve vydání pro dívčí školy se tato chyba nevyskytuje.

Počtenice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň III. [3] je věnována umocňování a odmocňování třemi, složenému úročení a dalším tématům finanční aritmetiky, počítání se zápornými čísly, úpravám výrazů a řešením lineárních rovnic. Předvedme nejprve výklad složeného úročení:

1. Hochovi zbylo po rodičích K 10.000. Tyto peníze uložil poručník do spořitelny na 4%. Kolik peněz vyplatila by spořitelna po 10 letech?

Kdo nechá peníze ve spořitelně a nevybere úroku, tomu se připočítává úrok na konci úrokové lhůty k jistině a pak dostane úrok už i z tohoto úroku. Nyní připočítávají spořitelny úrok po půl roce; když se připočítává úrok po roce jest ve spořitelně

na konci roku prvního:  $4\%$  z K 10.000 =  $400 \cdot \square$  K 10.400.–

na konci roku druhého:  $4\%$  z K 10.400 =  $416 \cdot \square$  K 10.816.□

„ „ „ třetího:  $4\%$  z K 10.816 =  $432 \cdot 64$  K 11.248.64

... a t. d.

na konci roku desátého: K 14.802.44. ([3], str. 7)

J. Úlehla v tomto příkladu názorně vyložil základní princip a podstatu složeného úročení a následně zařadil 3 úlohy na procvičení. V úlohách s více než 10 úrokovacími obdobími již žáky „nenutil“ používat výše prezentovaný postup. Odkazoval na *Tabulku úročitelů*,<sup>6</sup> v níž uvedl příslušné mocniny úročitelů. Obecný vzorec pro výpočet zůstatku však nevedl. Přestože připomněl soudobé úročení *per semestre*, v úlohách užíval pouze úročení *per annum*.

V následující ukázce přiblížíme Úlehlův přístup k rovnicím a slovním úlohám řešených pomocí nich. Připomeňme, že učebnice se věnuje pouze lineárním rovnicím o jedné neznámé. Nejprve ukažme, jakým způsobem J. Úlehla „definoval“ rovnice a jak vysvětlil její řešení:

18.  $5 = 5$ ,  $7 = 7$ ,  $4 + 5 = 9$ ,  $5 \square 1 = 4$ ,  $x = 9$ .

*Spojíme-li rovnítkem dvě rovná čísla, vznikne rovnice.*

21. *Vypočítej x na příkladech:  $x - 4 = 5$ ,  $x + 4 = 5$ ,  $4x = 20$ .*

*Řešení. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou rovnic jest rovnice nová. Proto jest:*

a)  $x \square 4 = 5$                       b)  $x + 4 = 5$   
 $\quad \quad \quad + 4 = + 4$                                $\quad \quad \quad - 4 = - 4$

<sup>6</sup> [3], str. 62.

$$x + 4 + 4 = 5 + 4$$

$$\underline{x = 9}$$

$$x + 4 - 4 = 5 - 4$$

$$\underline{x = 1}$$

... atd. ([3], str. 44)

Na rozdíl od současných učebnic matematiky pro základní školy J. Úlehla zavedl rovnice jiným způsobem. Nezdůraznil pojem neznámá rovnice, nepracoval s ekvivalentními úpravami rovnic a nevedl žáky k provedení zkoušky. Celkově věnoval rovnicím proti nynější výuce menší prostor, jejich výklad spolu s úlohami na procvičení zabírá v učebnici pouze tři strany.

Ze slovních úloh řešených pomocí rovnic uveďme dva příklady, jenž jsou v jistém smyslu nevšední a do výuky vnášejí originální jemný humor:

36. *Pacholek s koňmi zavláčil by pole za 15 hodin, volák za 21 hodinu; za kolik hodin je zavláčí spolu?*

42. *Dvě slečinky z měst šly vedle pasačky a ptaly se: „Kolik je vás? Jistě sto!“ □ „Těchto hus není sto! Ale, kdyby jich byla ještě polovice, čtvrtina a vy dvě k tomu, bylo by sto!“ ([3], str. 46)*

### 3.3 Početnice pro měšťanské školy dívčí, stupeň I. a II.

Učebnice pro dívčí měšťanské školy pro první a druhý ročník [4] je podobná příslušnému vydání pro chlapce. Obsahuje stejné kapitoly seřazené ve stejném pořadí. Neliší se ve výkladu látky, zahrnuje stejné řešené příklady. Celkově je v ní však zařazeno méně úloh na procvičení, což odpovídá menšímu stránkovému rozsahu. Některé jednodušší, především motivační příklady jsou vynechány a místo nich jsou často zařazeny „dívčí“ úlohy.

Ve vydání pro dívky například chybí výše uvedená úloha číslo 16, v níž mají žáci změřit, jak jsou silní. Příklad 13 o projití, proběhnutí a projetí jednoho kilometru je rovněž vynechán a místo něj je pod stejným číslem zařazena následující úloha:

13. *Můžete-li, spočítejte, kolik polen jest metr polenového dříví. ([4], str. 4)*

Typické příklady pro dívky se věnují šití, hospodářským pracím nebo vaření. Uveďme alespoň jednu Úlehlovu originální úlohu o zelenině:

30. *Zvaž prostřední cibuli a z toho vypočítej, kolik q cibule potřebují asi do roka města Praha, Brno, Ostrava, Opava, Vídeň, potřebuje-li osoba na týden průměrně 2 cibule? ([4], str. 30)*

### 3.4 Početnice pro měšťanské školy dívčí, stupeň III.

Učebnice pro třetí ročník dívčí měšťanské školy [5] má téměř o 20 stran méně než vydání pro chlapecké školy. S menším rozsahem stran souvisí její obsah. Je značně zstručněný, nezahrnuje vůbec kapitoly o třetí mocnině a odmocnině, výrazech nebo rovnicích. Zbývající části knihy jsou v podstatě neměněny.

### 3.5 Další vydání početnic

Učebnice *Početnice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň I. a II.* a *Početnice pro měšťanské školy dívčí, stupeň III.* se dočkaly v letech 1915 a 1913 druhého vydání [2] a [6].<sup>7</sup> Mají sice novou sazbu, obsahově se však v podstatě neliší.

<sup>7</sup> Zbývající díly učebnic pravděpodobně podruhé vydány nebyly. Nebyly nalezeny v katalozích českých knihoven i přes celkově četné zastoupení Úlehlových učebnic.

V letech 1920 až 1923 byly Úlehlovy učebnice vydány pod názvem *Početnice pro občanské školy, stupeň I., II. a III.* [7], [10] a [11]. V jejich tiráži je uvedeno „třetí přehlédnuté vydání“. Domníváme se však, že žádné první ani druhé vydání těchto učebnic neexistovalo, a že se jedná o třetí vydání *Početnic pro měšťanské školy*. Změna názvu pravděpodobně odráží dobové snahy o přejmenování měšťanské školy na školu občanskou, k němuž však nakonec nedošlo.<sup>8</sup> Obsahově *Početnice pro občanské školy* odpovídají „chlapeckému vydání“ *Početnic pro měšťanské školy*, nejsou však již rozděleny pro chlapecké a dívčí školy. Části *I.* a *II. stupeň* jsou vydány samostatně, místy jsou kapitoly jinak uspořádané a některé obsahově starší úlohy jsou nahrazeny novými. Například:

*16. Rakousko mělo r. 1906 státního dluhu 9.606.400.000 K. ([1], str. 7)*

je nahrazeno:

*6. Rakouská říše měla roku 1912 dluhu 12.748,894.700 franků; válkou vzrostl tento dluh na 150.000,000.000 fr. ([7], str. 10)*

Na závěr poznamenejme, že některé díly *Početnice pro občanské školy* byly vydány i po čtvrté, resp. po páté [8], [9] a [12].

### 3.6 Překlad Úlehlových učebnic do slovenštiny

V letech 1923 a 1924 byly Úlehlovy učebnice přeloženy do slovenštiny [13], [14] a [15]. Podobně jako vydání pro občanské školy i tyto „cizojazyčné“ verze nebyly rozděleny na chlapecké a dívčí, I. a II. díl byl vydán samostatně. Obsahem odpovídají vydáním pro občanské školy, podle nichž byl překlad proveden.

### 3.7 Recenze

Na první vydání *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí* byly napsány tři recenze. Publikovali je Josef Groulík [17] a Konrád Pospíšil [18] a [19]; oba hodnotí Úlehlovy učebnice pozitivně. Vyzdvihují srozumitelnost textu, připomínají důležitost mezioborových vztahů a kladně hodnotí Úlehlův didaktický přístup. Výhrady mají pouze k některým příkladům, které jsou podle nich nereálné. Kritizují například úlohy:

*21. Krupař má mouku po 28 h a 35 h, žena chce mouku po 32 h; kterak jí krupař vyhoví? ([1], str. 65)*

nebo

*32. Zelinářka má dvojí cibuli, po 60 g a 35 g; kterak vybere 100 cibulí, aby vážily 5 kg? ([1], str. 67)*

Na Úlehlovy početnice ve slovenštině bylo rovněž v tisku upozorněno [20]. Nejednalo se však o recenzi v pravém slova smyslu, neboť krátký nepodepsaný text pouze stručně upozorňoval na vydání nových učebnic, nijak je však nehodnotil.

### 3.8 Příklady početní, metodický doplněk k učebnicím pro měšťanské školy

---

<sup>8</sup> Problematika je podrobně popsána v Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství*. II. díl, Sfinx Bohumil Janda, Praha, 1931, str. 45.

V archivu Moravského zemského muzea v Brně je dochován Úlehlův rukopis nepublikované práce *Příklady početní, metodický doplněk k učebnicím pro měšťanské školy* [16]. Skládá se ze 24 sešitů,<sup>9</sup> každý obsahuje několik řešených úloh, po nichž následuje 48 nečíslovaných cvičení.

Tematicky sešity „kopírují“ příslušné kapitoly učebnic, jejich číslování však jen částečně odpovídá seřazení látky v jednotlivých ročnících. Zaměření chybějících sešitů číslo 10 a 25 lze přibližně

rekonstruovat podle toho, jaké tematické celky nejsou v rukopisu ve srovnání s učebnicemi zahrnuty.<sup>10</sup> V poznámkách v textu je uvedeno, že bylo plánováno vydat z každého sešitu 8 testových listů po 6 cvičeních. Rukopis tedy představuje určitou sbírku úloh, která měla pravděpodobně sloužit k tvorbě písemných prací. Jakým způsobem mělo být pracováno s řešenými příklady, není patrné.

Rukopis není datován a není zřejmé, zda byl dokončen nebo zda se některé jeho části ztratily.

### 3. Závěr

Úlehlovy učebnice matematiky odrážejí osobitý styl autora, jeho invenci a mnohdy nevšední přístup k tvorbě úloh. Dnes mohou inspirovat uspořádáním látky v kapitolách, příklady založenými na dobových reáliích a rovněž typografií. Sazbu mají zhotovenu úsporně, bez zbytečných prázdných míst.

V početnicích nejsou žádné obrázky, jenž mnohdy vhodně oživují současné učební texty. Většina příkladů je určena k procvičení, jejich výsledky však nejsou uvedeny. Negativum rovněž představují recenzemi zmíněné úlohy, u nichž snaha o zasazení do reálného prostředí vedla k jisté nepraktičnosti. Přes všechny nedostatky jsou Úlehlovy početnice historicky cenné, dobový význam podtrhují jejich další vydání i jejich překlady do slovenštiny.

### Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a projektu *Specifický vysokoškolský výzkum 2012-261-315*.

### Literatura

- [1] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň I. a II.* C. k. školní knihosklad, Praha, 1909, 75 stran.

<sup>9</sup> 1. Čtení a zapisování čísel. 2. Převádění a rozvádění čísel. 3. Nejmenší společný násobek. 4. Rozklad na kmenové činitele. 5. Nejvyšší společná míra dvou čísel. 6. Sečítání. 7. Odčítání. 8. Násobení. 9. Dělení. 10. chybí. 11. Trojčlenka. 12. Počet směšovací a průměrný. 13. Počítání podle soustavy šedesátkové. 14. Čísla vícejemná. 15. Počet procentový. 16. Počet úrokový. 17. Počet lhůtový. 18. Složitý počet úrokový. 19. Počet mincovní. 20. Peněžní trh. 21. Cenné papíry. 22. Počet řetězový. 23. Druhá mocnina. 24. Třetí mocnina a třetí odmocnina. 25. chybí a 26. Úkoly o práci.

<sup>10</sup> V rukopisu chybí například úlohy na práci s římskými čísly, zlomky, desetinnými čísly, poměrem nebo některá dílčí témata finanční aritmetiky.

- [2] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň I. a II.* 2. vydání, C. k. školní knihosklad, Praha, 1915, 82 stran.
- [3] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké, stupeň III.* C. k. školní knihosklad, Praha, 1909, 91 stran.
- [4] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy dívčí, stupeň I. a II.* C. k. školní knihosklad, Praha, 1909, 70 stran.
- [5] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy dívčí, stupeň III.* C. k. školní knihosklad, Praha, 1909, 73 stran.
- [6] Úlehla J.: *Početnice pro měšťanské školy dívčí, stupeň III.* 2. vydání, c. k. školní knihosklad, Praha, 1913, 69 stran.
- [7] Úlehla J.: *Početnice pro občanské školy, stupeň I.* 3. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1921, 52 stran.
- [8] Úlehla J.: *Početnice pro občanské školy, stupeň I.* 4. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1924, 88 stran.
- [9] Úlehla J.: *Početnice pro občanské školy, stupeň I.* 5. vydání, Státní nakladatelství, 1930, 88 stran.
- [10] Úlehla J.: *Početnice pro občanské školy, stupeň II.* 3. vydání, Státní školní knihosklad, Praha, 1920, 44 stran.
- [11] Úlehla J.: *Početnice pro občanské školy, stupeň III.* 3. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1923, 124 stran.
- [12] Úlehla J.: *Početnice pro občanské školy, stupeň III.* 4. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1930, 138 stran.
- [13] Úlehla J.: *Počtovnica pre slovenské školy meštianské, díl I., pre 5. školský rok.* Štátne nakladateľstvo, Praha, 1923, 38 stran.
- [14] Úlehla J.: *Počtovnica pre slovenské školy meštianské, díl II., pre 6. školský rok.* Štátne nakladateľstvo, Praha, 1923, 94 stran.
- [15] Úlehla J.: *Počtovnica pre slovenské školy meštianské, díl III., pre 7. školský rok.* Štátne nakladateľstvo, Praha, 1924, 48 stran.
- [16] Úlehla J.: *Příklady početní, metodický doplněk k učebnicím pro měšťanské školy.* Nepublikovaný rukopis, Moravské zemské muzeum v Brně, fond Josef Úlehla, sign. 41/82, inv. č. S89.
- [17] Groulík J.: *Početnice pro měšťanské školy chlapecké.* Pedagogické rozhledy 23 (1909–1910), str. 29–30.
- [18] Pospíšil K.: *Početnice pro měšťanské školy dívčí.* Škola měšťanská 11 (1909), příloha odboru matematicko-technického, str. 53–55.
- [19] Pospíšil K.: *Početnice pro měšťanské školy dívčí.* Pedagogické rozhledy 23 (1909–1910), str. 593–594.
- [20] –: *Josef Úlehla: Počtovnica pre slovenské školy meštianské.* Český učitel 26 (1922–1923), č. 28. ze dne 9. února 1923, str. 441.

# VARIAČNÍ POSLOUPNOST<sup>1</sup>

Jana Volná<sup>‡</sup>, Petr Volný<sup>‡</sup>, Dana Smetanová<sup>†</sup>

<sup>‡</sup>Ústav matematiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Nad Stráněmi 4511, 760 05 Zlín  
E-mail: [volna@fai.utb.cz](mailto:volna@fai.utb.cz)

<sup>‡</sup>Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava  
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba  
E-mail: [Petr.Volny@vsb.cz](mailto:Petr.Volny@vsb.cz)

<sup>†</sup>Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích  
Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice  
E-mail: [smetanova@mail.vstecb.cz](mailto:smetanova@mail.vstecb.cz)

**Abstrakt:** Na fibrovaných varietách konstruuje tzv. variační posloupnost, pomocí které lze geometricky modelovat některé významné objekty variačního kalkulu (lagrangián, Eulerova-Lagrangeova forma, Helmholtzova-Soninova forma).

**Abstract:** On the fibered manifolds we construct a variational sequence. The variational sequence is used for geometric interpretation of some crucial objects of the calculus of variations (Lagrangian, Euler-Lagrange form, Helmholtz-Sonin form).

## 1. Úvod

Variační posloupnost charakterizuje lokální a globální vlastnosti takových základních objektů variační teorie, jako je Eulerovo-Lagrangeovo resp. Helmholtzovo-Soninovo zobrazení. Variační posloupnost  $r$ -tého řádu je faktorová posloupnost, která vzniká faktorizací De Rhamovy posloupnosti na  $r$ -tém jetovém prodloužení fibrované variety podle její kontaktní podposloupnosti.

Variační posloupnost konečného řádu nad  $n$ -rozměrnou bazí zavedl Krupka v roce 1989 [4]. Prezentoval explicitní formule pro všechny třídy variační posloupnosti prvního řádu v mechanice (jednorozměrná báze). Studoval tzv. variační členy, tj. členy odpovídající lagrangiánům, Eulerovým-Lagrangeovým formám resp. Helmholtzovým-Soninovým formám. Touto problematikou se také zabýval Vinogradov, Vitolo, Krbek, Musilová a další. Anderson [1] studoval variační posloupnost na nekonečných jetech, tzv. variační bikomplex.

---

<sup>1</sup>Autoři děkují za podporu svých pracovišť.



## 2. Variační posloupnost

Fibrovanou varietou s bází  $X$  a konfiguračním prostorem  $Y$  nazýváme surjektivní submerzi  $\pi : Y \rightarrow X$ ,  $\dim X = 1$  (mechanika),  $\dim Y = m + 1$ , zobrazení  $\pi$  je lokálně projekce. Souřadnice na varietě  $X$  označujeme  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (t)$ , na varietě  $Y$   $(V, \psi)$ ,  $\psi = (t, q^\sigma)$ ,  $1 \leq q \leq m$ . Množina  $\pi^{-1}(t)$  se nazývá *fibr* nad bodem  $t$ .

Zobrazení  $\gamma : X \rightarrow Y$  takové, že  $\pi \circ \gamma = \text{id}_X$  se nazývá *řez* fibrované variety  $\pi$ . Zvolme bod  $y \in Y$  a označme  $\Gamma_{t,y}$  množinu všech hladkých řezů  $\gamma(t) = y$ . Řezy  $\gamma_1, \gamma_2$  mají kontakt  $s$ -tého řádu v bodě  $t \in X$ , jestliže platí

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \gamma_2(t), \\ D_k(q^\sigma \gamma_1 \varphi^{-1})(\varphi(t)) &= D_k(q^\sigma \gamma_2 \varphi^{-1})(\varphi(t)), \quad 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq \sigma \leq m. \end{aligned} \quad (1)$$

Množinu řezů, které mají v bodě  $t$  kontakt  $r$ -tého řádu s řezem  $\gamma$  značíme  $J_t^r \gamma$ , množinu  $J^r Y = \bigcup_{t \in X} J_t^r \gamma$  nazýváme  *$r$ -té jetové prodloužení* fibrované variety  $\pi$ . Na této množině máme asociovaný souřadnicový systém  $(V^r, \psi^r)$ ,  $V^r = (\pi^{r,0})^{-1}V$ ,  $\psi^r = (t, q^\sigma, q_1^\sigma, \dots, q_r^\sigma)$ , kde

$$q_l^\sigma(J_t^r \gamma) = D_l(q^\sigma \gamma \varphi^{-1})(\varphi(t)), \quad 1 \leq l \leq r. \quad (2)$$

Přirozeně pak vznikají kanonické projekce  $\pi^{r,s} : J^r Y \rightarrow J^s Y$ ,  $\pi^{r,0} : J^r Y \rightarrow Y$ ,  $\pi^r : J^r Y \rightarrow X$ . Souřadnice na  $J^1 Y$ ,  $J^2 Y$  budeme značit  $(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$  resp.  $(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)$ .

Diferenciální forma  $\rho$  na  $J^r Y$  se nazývá *kontaktní*, jestliže  $J^r \gamma^* \rho = 0$  pro každý řez  $\gamma$  fibrované variety  $\pi$ . Jestliže si zvolíme konkrétní souřadnicový systém  $(V, \psi)$  na  $Y$  a s ním asociovaný souřadnicový systém  $(V^r, \psi^r)$  na  $J^r Y$ , pak 1-formy tvaru

$$\omega_j^\sigma = dq_j^\sigma - q_{j+1}^\sigma dt, \quad 0 \leq j \leq r, \quad (3)$$

jsou kontaktní. Každá diferenciální 1-forma na  $V^r$  se dá vyjádřit v kanonické bázi  $(dt, dq^\sigma, \dots, dq_{r-1}^\sigma, dq_r^\sigma)$  nebo v tzv. *kontaktní bázi*  $(dt, \omega^\sigma, \dots, \omega_{r-1}^\sigma, dq_r^\sigma)$ , kde  $\omega_j^\sigma$  jsou definované vztahem (3). Každá kontaktní 1-forma se dá vyjádřit jako lineární kombinace pouze kontaktních 1-forem  $\omega_j^\sigma$ .

Každá diferenciální  $k$ -forma  $\rho$  na  $J^r Y$  po zvednutí (pullback) na  $J^{r+1} Y$  se dá jednoznačně rozložit na součet  $i$ -kontaktních komponent  $p_i \rho$  (v kontaktní bázi na  $J^{r+1} Y$  každý člen  $i$ -kontaktní komponenty obsahuje přesně  $i$  diferenciálních 1-forem  $\omega_j^\sigma$ ). Pro jednodimenzionální bázi  $X$  fibrované variety  $\pi$  existuje jednoznačný rozklad

$$(\pi^{r+1,r})^* \rho = p_{k-1} \rho + p_k \rho. \quad (4)$$

Nechť  $W$  je otevřená množina. Označme  $\Omega_k^r W$  Abelovskou grupu všech diferenciálních  $k$ -forem na  $W^r = (\pi^{r,0})^{-1}W$ . Položme

$$\Omega_{0,c}^r W = \{0\}, \quad \Omega_{k,c}^r W = \ker p_{k-1}, \quad \Theta_k^r W = \Omega_{k,c}^r W + d\Omega_{k-1,c}^r W, \quad (5)$$

kde  $k \geq 1$ . Množina  $\Omega_{k,c}^r W$  je Abelovská grupa všech  $k$ -kontaktních  $k$ -forem na  $W^r$ ,  $d\Omega_{k-1,c}^r W$  je Abelovská grupa vnějších derivací všech  $(k-1)$ -kontaktních  $(k-1)$ -forem na  $W^r$  a  $\Theta_k^r W$  je podgrupa grupy  $\Omega_k^r W$ . Pokud se neomezíme na konkrétní množinu  $W$ , ale budeme uvažovat všechny otevřené množiny, pak místo Abelovské grupy  $\Omega_k^r W$  dostáváme obecnější strukturu, tzv. svazek  $\Omega_k^r$ . Analogicky konstruujeme svazky pro všechny ostatní výše zmíněné grupy.



brazení,  $E : \Omega_2^r/\Theta_2^r \rightarrow \Omega_3^r/\Theta_3^r$  se nazývá *Helmholtzovo-Soninovo zobrazení*. Zobrazení  $E$  v dalších sloupcích variační posloupnosti nemá zatím interpretaci v rámci variačního kalkulu.

V některých situacích je výhodnější třídy ztotožnit s diferenciální formou, která leží na vyšším jetovém prodloužení. Konkrétně třídu  $[\rho] \in \Omega_1^r/\Theta_1^r$  můžeme ztotožnit s  $[\rho] = Ldt \in \Omega_1^{r+1}$ , kde  $L$  je lineární v proměnné  $q_{r+1}^\sigma$ , třídu  $[\rho] \in \Omega_2^r/\Theta_2^r$  můžeme ztotožnit s  $[\rho] = E_\sigma \omega^\sigma \wedge dt \in \Omega_2^{2r}$ , třídu  $[\rho] \in \Omega_3^r/\Theta_3^r$  můžeme ztotožnit s  $[\rho] = H_{\sigma\nu}^j \omega_j^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge dt \in \Omega_3^{2r+1}$ . V obecném případě diferenciální forma, která reprezentuje třídu na  $r$ -tém řádu, leží na  $(2r+1)$ -ním řádu. K této reprezentaci tříd pomocí forem se používá tzv. vnitřní Eulerův operátor [2], [5], [6].

V rámci předchozího ztotožnění formy  $[\rho] = \lambda = Ldt$ , má Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení vyjádření

$$E([\rho]) = E(\lambda) = E_\lambda = [d\rho], \quad \text{kde} \quad E_\lambda = \sum_{l=0}^r (-1)^l D_l \frac{\partial L}{\partial q_l^\sigma} \omega^\sigma \wedge dt, \quad (6)$$

a pro formu  $[\rho] = \varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge dt$  má Helmholtzovo-Soninovo zobrazení vyjádření

$$E([\rho]) = E(\varepsilon) = H_\varepsilon = [d\rho], \quad (7)$$

kde (pro ilustraci omezíme formu  $\varepsilon$  jen na druhý řád, tj.  $\varepsilon \in \Omega_2^2$ )

$$\begin{aligned} H_\varepsilon = & \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial q^\sigma} - \frac{1}{2} D \left( \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} D_2 \left( \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) \right) \omega^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) - D \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \dot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) \ddot{\omega}^\nu \wedge \omega^\sigma \wedge dt, \quad 1 \leq \sigma, \nu \leq m. \end{aligned} \quad (8)$$

Vzhledem k faktu, že variační posloupnost je také exaktní, pak forma  $\varepsilon$  je lokálně variační (tzn. existuje k ní lagrangián  $\lambda$  takový, že  $\varepsilon = E_\lambda$ ) právě tehdy, když  $H_\varepsilon = 0$ .

## Literatura

- [1] I.M. Anderson, The variational bicomplex, Utah State University, Technical Report, 1989.
- [2] M. Krbek, J. Musilová, Representation of the variational sequence, Rep. Math. Phys., Torun, 51 (2003), 251–258.
- [3] D. Krupka, Global Variational principles: Foundations and current problems, Amer. Ins. of Phys., Proc. of the Global Analysis and Appl.Math.: Int. Workshop on Global Analysis, Cankaya University, April 2004, Ankara, Turkey, 729 (2004), 3–18.
- [4] D. Krupka, Variational sequences in mechanics, *Calc. Var.* **5** (1997), 557–583.
- [5] D. Krupka, J. Šeděnková, Variational sequences and Lepage forms, Diff. Geom. and its Appl., Proc. Conf. Prague, August 30 - september 3, 2004, Charles University, Prague (Czech Republic), 2005, 617–627.
- [6] J. Šeděnková, Representations of variational sequences and Lepage forms, Ph.D. Thesis, Palacký University, Olomouc, 2004.

# ÚSPEŠNOSŤ ŠTUDENTOV V PREDMETE MATEMATIKA I NA SJF STU v BRATISLAVE

Viera Záhonová

Ústav matematiky a fyziky, SJF STU  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika  
E-mail: viera.zahonova@stuba.sk

**Abstrakt:** Počet študentov, ktorí úspešne ukončia predmet Matematika I z roka na rok klesá. Vplyv na tento fakt má nedostatočná príprava z matematiky na strednej školy a taktiež aj to, že študenti nie sú naučení priebežne študovať. V príspevku je popísaný tiež návrh experimentu, ktorý chce Ústav matematiky a fyziky zrealizovať v budúcom školskom roku, zameraný na zlepšenie práce študentov počas celého semestra.

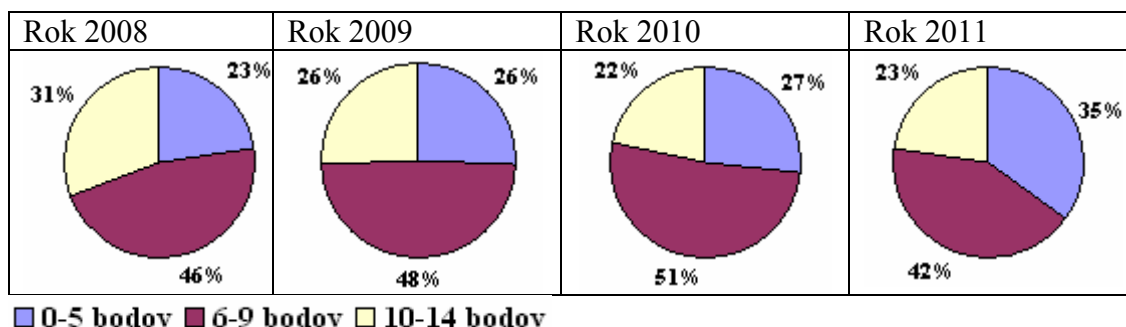
**Abstract:** Number of students who successfully complete the subject Mathematics I is constantly decreasing. This situation is caused by inadequate preparation at secondary schools and also by the fact that students are not accustomed to systematic study. The paper describes the experiment design, Institute of mathematics and physics wants to implement in the next school year, aimed at improving students' work during the whole semester.

## 1. Úvod

Počet hodín matematiky na stredných priemyslových a odborných školách výrazne poklesol, niekde zo 14 hodín na 6 hodín týždenne počas celého štúdia. Na Strojníckej fakulte SJF STU v Bratislave študuje okolo 50% študentov práve z týchto škôl. V dôsledku nízkej výmery hodín matematiky na strednej škole, títo študenti nemôžu maturovať z matematiky, pretože odporúčaná týždenná dotácia pre maturitu je 12 hodín. Tiež treba podotknúť, že počet hodín z matematiky je už znížený aj na základných školách a nedostatočné základy matematiky sa postupne „nabaľujú“. Napriek tomu sa študenti zo stredných priemyslových a odborných škôl hlásia na vysoké školy technického zamerania a tu, hlavne v prvom semestri, im chýbajú základné vedomosti a zručnosti z matematiky. V školskom roku 2010/2011 po prvýkrát si študenti na SJF STU zapísali do indexov povinne voliteľný predmet Doplnkové cvičenia z Matematiky I, ktorý je ukončený zápočtom. Na základe výsledkov vstupného testu, niektorí študenti získajú hneď zápočet, pre ostatných je tento predmet povinný. Obsah týchto cvičení je cielený, dopĺňajú sa stredoškolské vedomosti z tých častí matematiky, ktoré sú nevyhnutné, aby študent dokázal zvládnuť predmet Matematika I. Keďže vyrovnanie vedomostí pomocou absolvovania tohto predmetu sa osvedčilo [1], v tomto predmete sa naďalej pokračuje. No aj napriek tomu, výsledky z Matematiky I sú neuspokojivé.

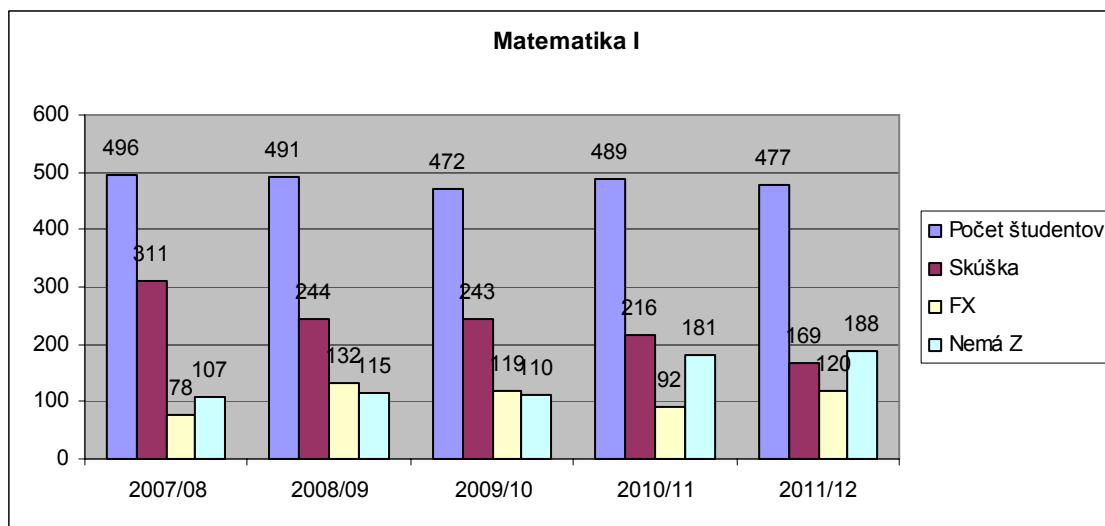
## 2. Faktory ovplyvňujúce úspešnosť predmetu Matematika I.

Istým predpokladom úspešného štúdia, je dostatočný vedomostný základ študenta a jeho samostatná a systematická práca počas semestra. Ako sa spomenulo v úvode, tak úroveň vedomostí so strednej školy je dosť nízka a rôznorodá - študenti sú z rôznych typov škôl. Táto úroveň z roka na rok klesá, ako tomu nasvedčujú aj výsledky vstupných testov z posledných štyroch rokov. Tieto testy obsahujú otázky základného charakteru [1] a každý študent, ktorý chce študovať na vysokej škole technického zamerania by ich mal zodpovedať na 100 %. Výsledky testov sú na nasledujúcom obrázku.



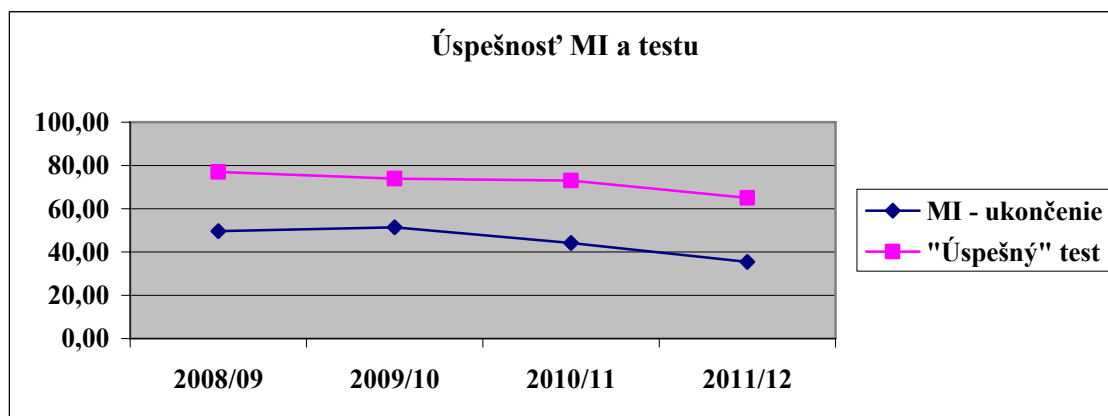
Obr.1 Vstupný test

Oddelenie matematiky Ústavu matematiky a fyziky na Sjf úspešnému zvládnutiu matematiky venuje dosť veľkú pozornosť. Budeme sa teraz zaoberať iba predmetom Matematika I, ktorý je nosným predmetom prvého semestra pre študentov Sjf STU v Bratislave. Aj napriek úsiliu učiteľov oddelenia matematiky ÚMF, výsledky z Matematiky I nie sú uspokojivé. Keď porovnáme počty študentov, ktorí urobili skúšku z Matematiky I za posledných päť rokov, dostaneme:



Obr. 2 Úspešnosť predmetu Matematika I

Vidíme, že počet študentov, ktorí sú schopní ukončiť predmet Matematika I klesá. Keď ich premeníme na percentá, tak nasledujúci graf udáva úspešnosť študentov v percentách a porovnáva s percentom „úspešných“ študentov na teste, t.j. tých, ktorí dosiahli 6-14 bodov.



*Obr. 3 Porovnanie úspešnosti Matematiky I a vstupného testu*

Aj z grafov je zrejmé, že ukončenie predmetu Matematika I závisí od vstupných vedomostí študentov.

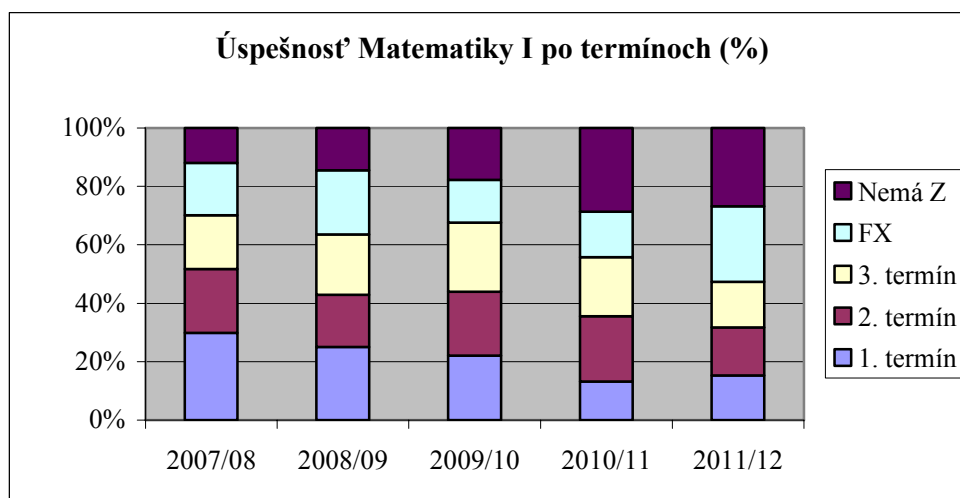
Ďalším faktorom, ktorý vo veľmi veľkej miere ovplyvňuje vedomosti študentov, je priebežné štúdium matematiky. Chceme podotknúť, že študenti majú k dispozícii na štúdium v AIS všetky prezentácie prednášok, ktoré obsahujú základné pojmy a ich vlastnosti, tiež dostatočné množstvo príkladov na riešenie spolu aj s výsledkami. Príklady sú zostavené postupne, od úplne triviálnych po komplikovanejšie.

Pri oddelení je zriadené aj konzultačné centrum, ktoré študenti môžu využívať nepretržite počas pracovných dní. Využitie tohto konzultačného centra počas semestra je však minimálne a cez skúškové obdobie sa využíva väčšinou iba deň pred skúškou. Tiež, ako už bolo spomenuté v úvode, posledné dva školské roky študenti majú pridané dve hodiny matematiky navyše, kde si môžu (až chcú) doplniť vedomosti so stredoškolskej matematiky [1].

Aby sme motivovali študentov k postupnému štúdiu, tak počas semestra sa píše dve kontrolky, z ktorých môže študent získať 34 bodov a za aktivitu na cvičeniach má možnosť dostať 6 bodov. Tieto získané body (40 bodov) sa potom zohľadňujú pri udeľovaní zápočtu a pri skúške. Na získanie zápočtu od šk. roku 2010/11 je potrebných minimálne 13 bodov, dovedty zápočet získal každý, kto sa zúčastňoval cvičení. Avšak podiel tých študentov, ktorí mali menej ako 13 bodov, na zvládnutí predmetu Matematika I je zanedbateľný. Na skúške je maximálny počet bodov, ktoré môže študent získať 60, z toho 40 bodov za príklady a 20 bodov za teoretický test. Nutné podmienky k získaniu skúšky sú minimálne 20 bodov z príkladov, 7 bodov teoretický test, 30 bodov zo skúšky a 51 bodov spolu za cvičenia a skúšku. V prípade, že študent nezíska 7 bodov na teoretickom teste, tak potom ešte absolvuje ústnu skúšku. U mnohých študentov však získať 13 bodov na zápočet je nezvládnuteľná úloha, pričom termín priebežnej kontrolky je známy už na začiatku semestra.

Aj keď študent získa zápočet, to však ešte neznamená, že zvládne aj predmet Matematika I.. Keďže väčšina z nich pracuje na minimum, tak je jasné, že 13 bodov, ktoré získajú na zápočet je príliš malý základ na to, aby niektorí z nich boli úspešní aj na skúške. Museli by potom na skúške získať aspoň 38 bodov, a to je niekedy veľmi problematické, pretože väčšina týchto študentov nie je schopná správne zodpovedať testové otázky. To znamená, že príklady by museli napísať skoro na 100 %. Snáď by bolo vhodné ešte podotknúť, že teoretický test na skúške sa skladá z desiatich otázok so štyrmi odpoveďami, z ktorých môže byť 0 až 4 správnych. Za správnu odpoveď je pridelený jeden bod, za nesprávnu sa bod odpočítava. Tým sme zamedzili tomu, aby študenti tipovali odpovede. Boli sme milo prekvapení, že málokto získa záporné body

z testu. Každý študent má právo zúčastniť sa troch termínov. O percentuálnej úspešnosti z celkového počtu zapísaných študentov na jednotlivých termínoch hovorí nasledujúci graf. Všimnime si, že počet študentov, ktorí uspeli na prvom termíne klesá a zvyšuje sa úspešnosť na druhom a treťom termíne.



Obr. 4 Percentuálne rozloženie úspešnosti predmetu Matematika I podľa termínov

Taktiež kvalita výsledkov nie je postačujúca. Nasledujúca tabuľka udáva počty študentov podľa hodnotenia. Je tam tiež uvedený počet študentov, ktorí získali zápočet, vyjadrený aj v percentách vzhľadom na počet zapísaných študentov. Hodnotenie A je v rozmedzí 91 – 100 bodov, B 81 – 90 bodov, C 71 – 80 bodov, D 61 – 70 bodov, E 51 -60 bodov. Kto získa 50 a menej bodov, na skúške neuspel.

Šk. rok	Zápočet	A	B	C	D	E	FX+FN
2007/08	389 – 78,43%	58	37	40	48	128	78
2008/09	376 – 76,58%	44	44	28	47	81	132
2009/10	362 – 76,68%	26	18	39	42	118	119
2010/11	308 – 62,99%	32	23	20	29	90	114
2011/12	289 – 60,59%	11	13	16	45	84	120

Počet študentov, ktorí získajú zápočet sa z roka na rok znižuje a znižuje sa aj počet tých, ktorí získajú skúšku (Obr. 2). Šk. roky 2008/09 a 2009/10 čo sa týka úspešnosti sú vyrovnané (Obr. 2), ale počet študentov, ktorí získali hodnotenie A a B sa znížil na úkor hodnotenia E. V šk. roku 2010/11 ako keby vzrástol počet tých, ktorí získali hodnotenie A a B, možno to bolo spôsobené tým, že na zápočet už bolo nutné počas semestra získať 13 bodov. Zrejme tí študenti, ktorí mali nejaké návyky systematickej práce, aby získali zápočet začali priebežne pracovať počas semestra, a tým aj dosiahli lepšie výsledky na skúške.

### 3. Ako zapojiť študentov do systematickej práce počas semestra?

Na túto otázku sa dá pozeráť z viacerých uhlov. Buď začneme pravidelne dávať študentom domáce úlohy – nabehneme na stredoškolský systém. Pre učiteľa, ktorý však učí napríklad 4 pracovné skupiny, pribudne neúmerne množstvo práce. Aby tento systém fungoval a mal nejaký zmysel, učiteľ musí domáce úlohy skontrolovať a opraviť. Stále však nemá zaručené, že tieto úlohy väčšina študentov neopísala, a teda

zase systematicky nepracujú hlavne slabší študenti. Aby sa vylúčilo opisovanie, dajú sa vygenerovať príklady podobného charakteru, ale opäť, kto má s tým robotu navyše? Podotýkam, že tieto príklady je potrebné vytvárať každý rok, pretože všetci vieme, že študenti si predávajú svoje poznatky z roka na rok.

Ďalšou možnosťou je písať na každom cvičení krátku kontrolku, ktorá nie je časovo náročná na výpočty a opravu. Na takejto kontrolke je však vhodné zadať iba úplne jednoduché príklady, kde je zrejmy hneď výsledok. V opačnom prípade sa „ponoríme“ do stáleho vymýšľania a opravovania písomiek. Negatívom tejto formy je aj to, že študent sa pripraví ozať iba na základné výpočty a použitie týchto výpočtov na riešenie komplexnejších úloh začína byť problematické. Skúšali sme aj týmto spôsobom prinútiť študentov systematicky pracovať počas semestra, ale veľmi sa to neosvedčilo, aj keď body za kontrolky boli časťou hodnotenia študentov za semester, a tým aj na skúške.

Existujú aj iné metódy, ale stále je to na učiteľovi, či niektorú z nich použije. Od budúceho školského roka chceme experimentálne v jednej z troch paraleliek vyskúšať jednu z možných metód, ktorou možno naučíme študentov priebežne sa pripravovať na cvičenia. Vzhľadom na to, že na SjF STU na zápočet z Matematiky I je potrebných 13 bodov zo 40, na začiatku semestra každý študent získa 13 bodov, teda má zaručený zápočet. Aby si ich udržal, bude musieť na tom pracovať. Študenti budú dostávať na domácu úlohu príklady, ktoré si majú pripraviť na nasledujúce cvičenie. V prvej polovici ďalšieho cvičenia študenti budú tieto príklady samostatne riešiť a vysvetľovať na tabuľu bez použitia poznámok. Budú vyvolávaní sporadicky, nemôže v tom byť žiaden systém. V prípade, že sa študent nepripraví, stráca bod. Je zrejmé, že každý zo študentov musí byť počas semestra pri tabuli 13-krát. Táto požiadavka sa dá splniť, pretože cvičenia z Matematiky I sú vo výmere 4 hodiny, teda dve cvičenia za týždeň. Tiež, pokiaľ bude komplikovanejší príklad, tak riešenia tohto príkladu sa zúčastnia viacerí študenti. Problematika, z ktorej budú zadávané domáce úlohy, bude odprednášaná a na predchádzajúcom cvičení v druhej polovici cvičenia budú podrobne riešené podobné príklady ako tie, ktoré budú zadané na domácu úlohu. Študent bude môcť využiť aj konzultačné hodiny naplánované tak, aby sa nestalo, že medzi dvoma cvičeniami, až narazí na nejaký problém pri riešení úlohy, nebude mu mať kto pomôcť. Tiež budú mať k dispozícii skriptá s riešenými príkladmi z Matematiky I. Počas semestra budú študenti experimentálnej paralelky podobne, ako aj ostatní písať dve kontrolky.

#### 4. Záver

Predmet Matematika I je nosným predmetom v zimnom semestri prvého ročníka. Počet kreditov za ukončenie tohto predmetu je 10, čo stačí na postup v prvom ročníku do letného semestra. Študenti, ktorí úspešne absolvujú Matematiku I vo väčšine už nemajú problémy s matematikou v druhom semestri. Práve preto Ústav matematiky a fyziky venuje neustálu pozornosť priechodnosti tohto predmetu. Či sa popísaný experiment osvedčí, uvidíme o rok, keď bude možné porovnať výsledky v experimentálnej a kontrolnej skupine. Snáď tu zohrá úlohu aj psychologický fakt, že človek nerád stráca niečo, čo už má.

#### Literatúra

- [1] ZÁHONOVÁ, V.: *Môžu študenti zvládnuť Matematiku na SjF STU v Bratislave?* Sborník z 20. seminára Dolní Lomná, 30.5. - 1. 6. 2011. - Ostrava : VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2011. - ISBN 978-80-248-2517-5. - S. 132-136



## Seznam účastníků

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.	MFF UK Praha	<a href="mailto:becvar@karlin.mff.cuni.cz">becvar@karlin.mff.cuni.cz</a>
Ing. Josef Bednář, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	<a href="mailto:bednar@fme.vutbr.cz">bednar@fme.vutbr.cz</a>
Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:petr.beremlijski@vsb.cz">petr.beremlijski@vsb.cz</a>
Doc. RNDr. Zdeněk Boháč, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:zdenek.bohac@vsb.cz">zdenek.bohac@vsb.cz</a>
Doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jiri.bouchala@vsb.cz">jiri.bouchala@vsb.cz</a>
Dr. Inż. Tadeusz Burak	PS Gliwice	<a href="mailto:tburak@polsl.pl">tburak@polsl.pl</a>
Mgr. František Červenka	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:frantisek.cervenka@vsb.cz">frantisek.cervenka@vsb.cz</a>
Mgr. Dagmar Dlouhá, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:dagmar.dlouha@vsb.cz">dagmar.dlouha@vsb.cz</a>
Dr. Krzysztof Dłutek	PS Gliwice	<a href="mailto:krzysztof.dlutek@polsl.pl">krzysztof.dlutek@polsl.pl</a>
RNDr. Milan Doležal, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:milan.dolezal@vsb.cz">milan.dolezal@vsb.cz</a>
Ing. Hana Doležalová, Ph.D.	ÚGN AV ČR Ostrava	<a href="mailto:hana.dolezalova@ugn.cas.cz">hana.dolezalova@ugn.cas.cz</a>
Doc. RNDr. Jarmila Doležalová, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jarmila.dolezalova@vsb.cz">jarmila.dolezalova@vsb.cz</a>
Mgr. Jaroslav Drobek, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jaroslav.drobek@vsb.cz">jaroslav.drobek@vsb.cz</a>
Mgr. Radka Hamříková	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:Radka.Hamrikova@vsb.cz">Radka.Hamrikova@vsb.cz</a>
Mgr. Jana Hoderová, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	<a href="mailto:hoderova@fme.vutbr.cz">hoderova@fme.vutbr.cz</a>
RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:pavel.jahoda@vsb.cz">pavel.jahoda@vsb.cz</a>
Mgr. Alexej Kolcun, CSc.	ÚGN AV ČR Ostrava	<a href="mailto:alexej.kolcun@ugn.cas.cz">alexej.kolcun@ugn.cas.cz</a>
Doc. Dr. Mgr. Ivan Kolomazník	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:ivan.kolomaznik@vsb.cz">ivan.kolomaznik@vsb.cz</a>
Dr. Inż. Zygmunt Korban	PS Gliwice	<a href="mailto:zygmunt.korban@polsl.pl">zygmunt.korban@polsl.pl</a>
RNDr. Jan Kotůlek, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jan.kotulek@vsb.cz">jan.kotulek@vsb.cz</a>
Mgr. Petr Kovář, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:petr.kovar@vsb.cz">petr.kovar@vsb.cz</a>
Dr Hab. Inż. Stanisław Kowalik, prof.	PS Gliwice	<a href="mailto:skowalik@wsb.edu.pl">skowalik@wsb.edu.pl</a>
RNDr. Břetislav Krček, CSc.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:bretislav.krcek@vsb.cz">bretislav.krcek@vsb.cz</a>
Mgr. Inż. Piotr Krowicki	PS Gliwice	<a href="mailto:piotr.krowicki@polsl.pl">piotr.krowicki@polsl.pl</a>
RNDr. Michael Kubesa, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:michal.kubesa@vsb.cz">michal.kubesa@vsb.cz</a>
Doc. RNDr. Radek Kučera , Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:radek.kucera@vsb.cz">radek.kucera@vsb.cz</a>
Ing. Martina Litschmannová, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:martina.litschmannova@vsb.cz">martina.litschmannova@vsb.cz</a>
Mgr. Zuzana Morávková, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:zuzana.moravkova@vsb.cz">zuzana.moravkova@vsb.cz</a>

Prof. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc.	PdF MU Brno	<a href="mailto:navratil@ped.muni.cz">navratil@ped.muni.cz</a>
Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	<a href="mailto:nechvatal@fme.vutbr.cz">nechvatal@fme.vutbr.cz</a>
PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D.	PdF MU Brno	<a href="mailto:novotna@ped.muni.cz">novotna@ped.muni.cz</a>
RNDr. Marie Polcerová, Ph.D.	FCH VUT Brno	<a href="mailto:polcerova@fch.vutbr.cz">polcerova@fch.vutbr.cz</a>
Dr Hab. Inž. Henryk Przybyła, prof.	PS Gliwice	<a href="mailto:henryk.przybyla@polsl.pl">henryk.przybyla@polsl.pl</a>
RNDr. Petra Šarmanová, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:petra.sarmanova@vsb.cz">petra.sarmanova@vsb.cz</a>
RNDr. Dana Smetanová, Ph.D.	VŠTE České Budějovice	<a href="mailto:smetanova@vste.mail.cz">smetanova@vste.mail.cz</a>
Mgr. Jakub Stryja, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jakub.stryja@vsb.cz">jakub.stryja@vsb.cz</a>
Ing. Pavel Svoboda	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:svoboda86@seznam.cz">svoboda86@seznam.cz</a>
Ing. Jan Szweda, Ph.D.	FS VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jan.szweda@vsb.cz">jan.szweda@vsb.cz</a>
Mgr. Martina Štěpánová	MFF UK Praha	<a href="mailto:martinastepanova@centrum.cz">martinastepanova@centrum.cz</a>
Ing. Petr Tomášek, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	<a href="mailto:tomasek@fme.vutbr.cz">tomasek@fme.vutbr.cz</a>
RNDr. Michaela Tužilová, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:michaela.tuzilova@vsb.cz">michaela.tuzilova@vsb.cz</a>
Ing. Jan Unger	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:jenda.unger@seznam.cz">jenda.unger@seznam.cz</a>
Mgr. Lukáš Vízek	MFF UK Praha	<a href="mailto:lukas.vizek@seznam.cz">lukas.vizek@seznam.cz</a>
Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:petr.vodstrcil@vsb.cz">petr.vodstrcil@vsb.cz</a>
RNDr. Petr Volný, Ph.D.	KMDG VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:petr.volny@vsb.cz">petr.volny@vsb.cz</a>
RNDr. Viera Záhonová, CSc.	SjF STU Bratislava	<a href="mailto:viera.zahonova@stuba.sk">viera.zahonova@stuba.sk</a>
Ing. Stanislav Zajaczek, Ph.D.	FEI VŠB - TU Ostrava	<a href="mailto:stanislav.zajazek@vsb.cz">stanislav.zajazek@vsb.cz</a>
Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.	ÚM FSI VUT Brno	<a href="mailto:zatocilova@fme.vutbr.cz">zatocilova@fme.vutbr.cz</a>

Zavádíme a provozujeme  
užitečné informační technologie

IT infrastruktura

Outsourcing

Podnikové aplikace a služby

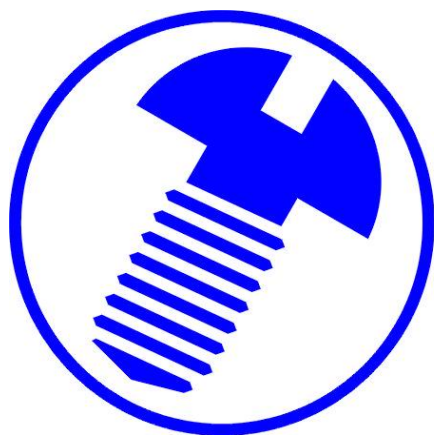
Content management

Vývoj softwaru

v organizacích.



**AutoCont**



**K A B E D E X**

**H U T N Í M A T E R I Á L Y**



---

Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

**3 $\mu$  2012**

Horní Lomná, 4. – 6.června 2012

---

Dagmar Dlouhá  
Zuzana Morávková  
Radka Hamříková  
Petr Volný

---

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

## Co je GeoGebra?

GeoGebra je volný a multiplatformní dynamický software pro všechny úrovně vzdělávání, neboť spojuje geometrii, algebru, tabulky, znázornění grafů, statistiku a infinitezimální počet, to vše v jednom balíčku. Tento program získal četná ocenění pro vzdělávací software v Evropě a USA.

- Grafika, algebra a tabulky jsou propojeny a plně dynamické
- Jednoduše použitelné uživatelské prostředí, mnohé výkonné funkce
- Autorizační nástroje k vytvoření výukového materiálu na webové stránce
- Přístupné milionům uživatelů na celém světě v mnoha jazycích
- Free a open source software

<http://www.geogebra.org>

## Co se naučíte na našem workshopu?

### První krůčky s GeoGebrou

Dagmar Dlouhá ([dagmar.dlouha@vsb.cz](mailto:dagmar.dlouha@vsb.cz))

Tato lekce si klade za cíl usnadnit začátky všem, kteří se rozhodli začít pracovat s programem GeoGebra. Seznámíme se s prostředím aplikace programu na třech příkladech. V prvním budeme konstruovat kružnici vepsanou trojúhelníku. V druhém příkladě vykreslíme graf kvadratické funkce s dynamicky se měnícími hodnotami koeficientů. Nakonec si ukážeme slovní úlohu – měření hloubky řeky v nedostupných místech, ve které si zopakujeme používání základních nástrojů GeoGebry.

### Upevnění pojmu funkce pomocí slovních úloh

Zuzana Morávková ([zuzana.moravkova@vsb.cz](mailto:zuzana.moravkova@vsb.cz))

Na několika úlohách si ukážeme jak studentům pomoci s lepším pochopením pojmu funkce. V prvním příkladě se dostaneme mezi barevné hady, v druhém pomůžeme hladové ovečce a v posledním spěchajícímu rybáři, aby se dostal co nejrychleji domů.

### Zajímavé animační úlohy

Radka Hamříková ([radka.hamrikova@vsb.cz](mailto:radka.hamrikova@vsb.cz))

Na rotaci trojúhelníka kolem daného bodu si ukážeme souvislost mezi geometrií a násobením matic a odpovíme na klasická studentskou připomínku – „A k čemu je to násobení matic dobré?“ Studenti během výuky narazí na problém – vypočítejte délku asteroidy, její plochu nebo objem tělesa, které vznikne rotací asteroidy kolem souřadnicové osy. Nakonec vytvoříme model hodin.

### Demonstrace vybraných pojmů z matematické analýzy

Petr Volný ([petr.volny@vsb.cz](mailto:petr.volny@vsb.cz))

Naším cílem bude vyrobit dynamické webové stránky obsahující aplety, pomocí kterých můžeme studentům demonstrovat některé vybrané pojmy z matematické analýzy. Jedná se o Riemannův určitý integrál a směrové pole diferenciální rovnice.



---

## Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

### 3 $\mu$ 2012

---

### První krůčky s GeoGebrou

Dagmar Dlouhá

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

---

Tato lekce si klade za cíl usnadnit začátky všem, kteří se rozhodli začít pracovat s programem GeoGebra. Seznámíme se s prostředím aplikace programu na třech příkladech.

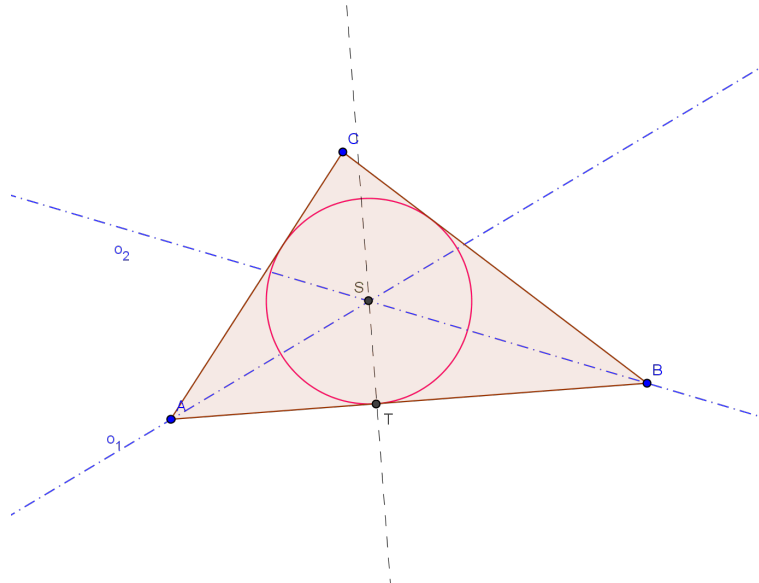
V prvním budeme konstruovat kružnici vepsanou trojúhelníku.

V druhém příkladě vykreslíme graf kvadratické funkce s dynamicky se měnícími hodnotami koeficientů.

Nakonec si ukážeme slovní úlohu – měření hloubky řeky v nedostupných místech, ve které si zopakujeme používání základních nástrojů GeoGebry.

## Příklad 10: Kružnice vepsaná

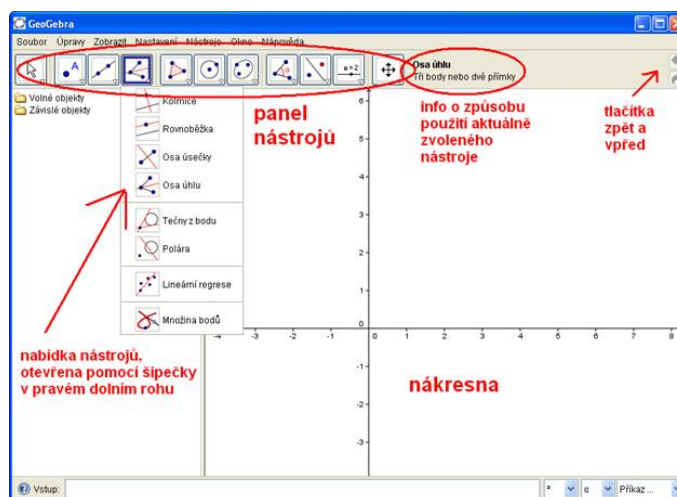
**Zadání:** Sestrojme kružnici vepsanou trojúhelníku ABC.



Obrázek 1: Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC

## Příprava








Po spuštění programu se objeví prostředí GeoGebry.



Obrázek 2: Úvodní stránka GeoGebry

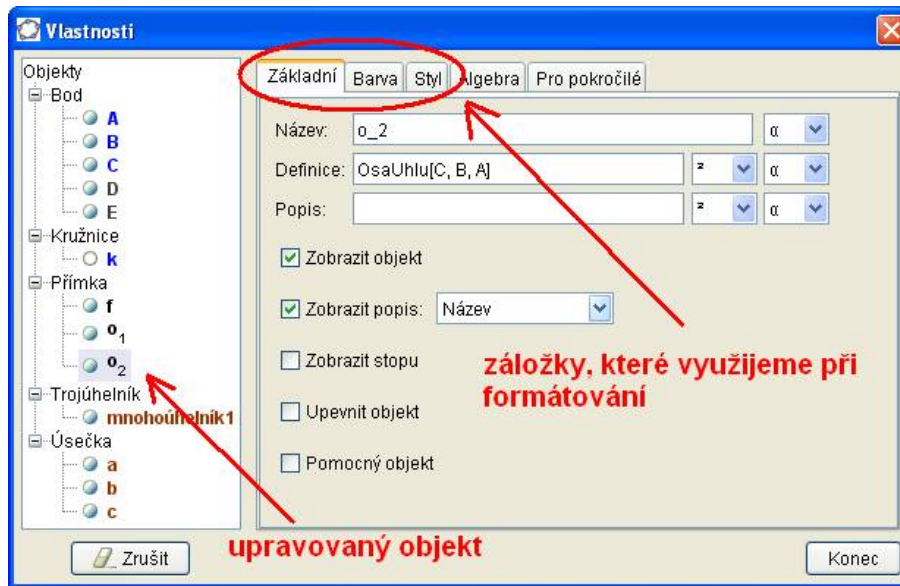


## Konstrukce

1.		<p>Vytvoříme libovolný trojúhelník (ABC).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• V panelu nástrojů vybereme „Mnohoúhelník“.</li> <li>• Na nákresně postupně zvolíme tři body (vrcholy budoucího trojúhelníku).</li> <li>• Trojúhelník ukončíme tím, že znovu klikneme na počáteční vrchol.</li> </ul>
2.		<p>Sestrojíme osy dvou úhlů (d, e).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Použijeme nástroj „Osa úhlu“.</li> <li>• Klikneme postupně na tři body udávající úhel (vrcholy trojúhelníku).</li> </ul>
3.		<p>Najdeme průsečík os úhlů, střed kružnice vepsané (D).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Použijeme nástroj „Průsečíky dvou objektů“.</li> <li>• Klikneme postupně na obě osy.</li> </ul>
4.		<p>Sestrojíme kolmici na stranu trojúhelníku procházející středem kružnice vepsané (f).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Použijeme nástroj „Kolmice“.</li> <li>• Klikneme na střed kružnice a stranu trojúhelníku.</li> </ul>
5.		<p>Najdeme průsečík této kolmice se stranou trojúhelníku, bod dotyku kružnice vepsané (E).</p>
6.		<p>Sestrojíme kružnici vepsanou (g).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Použijeme nástroj „Kružnice daná středem a bodem“.</li> <li>• Klikneme na její střed a potom na její bod dotyku s trojúhelníkem.</li> </ul>
7.		<p>Hotovo.</p>




## Postřehy a poznámky

Vlastnosti objektů můžeme měnit.




Obrázek 3: Úpravy vlastností objektu

Upravme si vzhled nákresny.

- Osy odstraníme (či znovu navrátíme) pomocí „Zobrazit“ → „Osy“.
- Nákresnu posuneme pomocí nástroje „Posunout nákresnu“  nebo tažením myši se stisknutou klávesou *Shift*.
- Nákresnu přiblížíme či oddálíme pomocí nástrojů „Zvětšit“  a „Zmenšit“  nebo pomocí kolečka myši.

Pohybujeme objekty.

- Zvolíme nástroj „Ukazovátka“ .
- Hýbat můžeme volnými objekty, v tomto případě vrcholy trojúhelníku.
- Vidíme, že ostatní objekty se přizpůsobují, to je dáno jejich závislostí.
- V algebraickém okně si můžeme prohlédnout, které objekty jsou volné a které závislé.

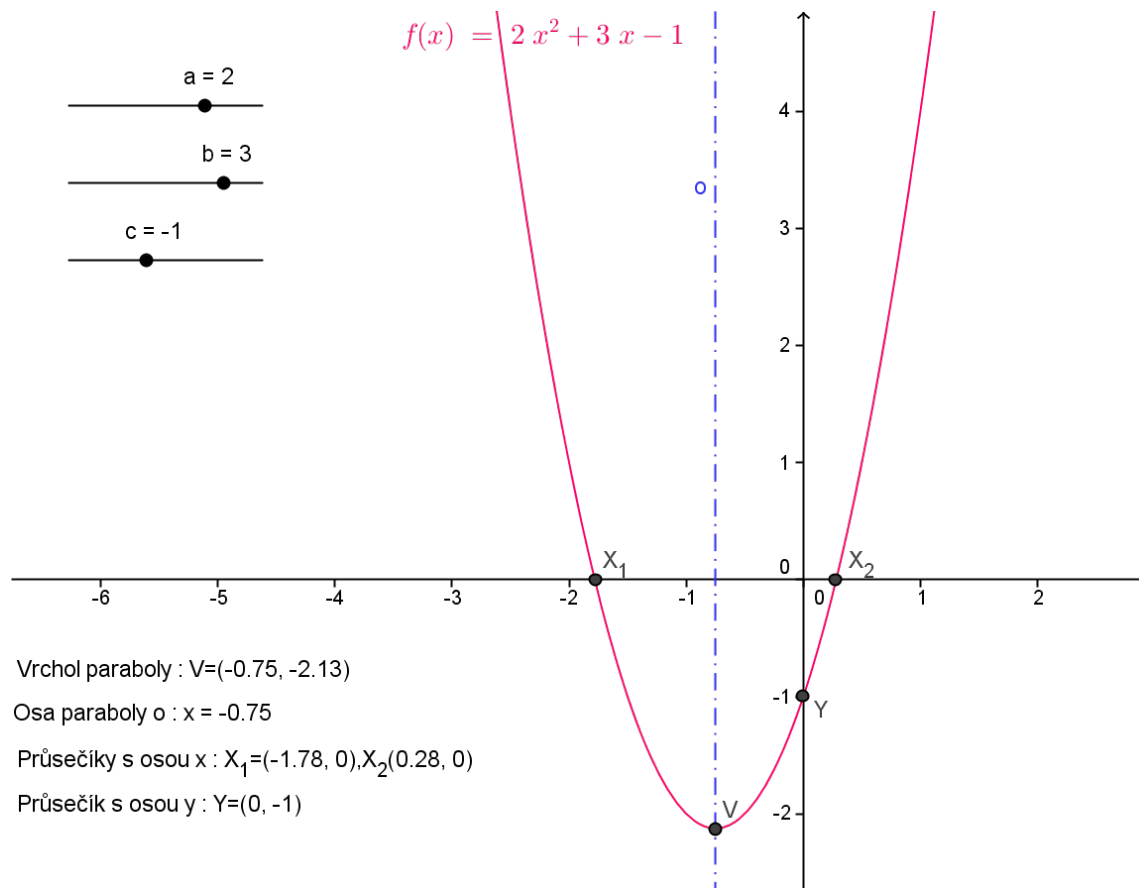
## Úlohy k procvičení

1. Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku ABC.
2. Sestrojte trojúhelník A'B'C' osově souměrný s trojúhelníkem ABC, je-li osou souměrnosti přímka f.
3. Sestrojte trojúhelník A'B'C' středově souměrný s trojúhelníkem ABC, je-li středem souměrnosti bod S.

## Moje poznámky

## Příklad 11: Kvadratická funkce

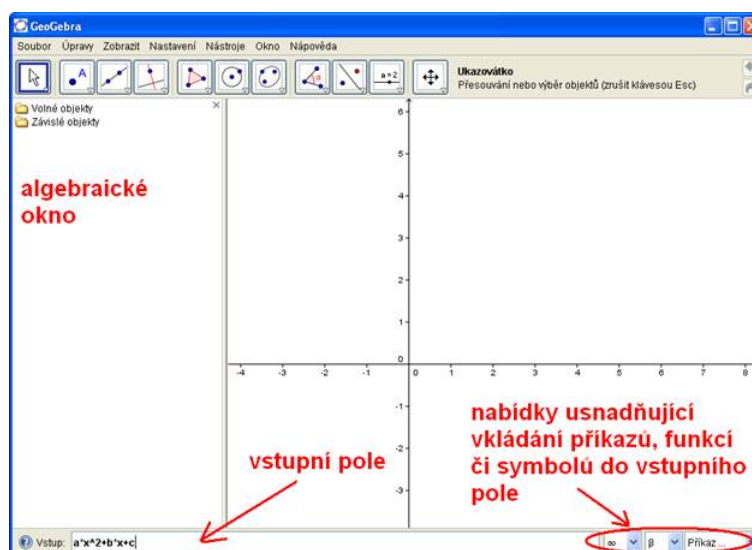
**Zadání:** Nakresleme graf kvadratické funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$  s dynamicky se měnícími hodnotami koeficientů. Výsledek uložíme jako webový applet.



Obrázek 4: Kvadratická funkce

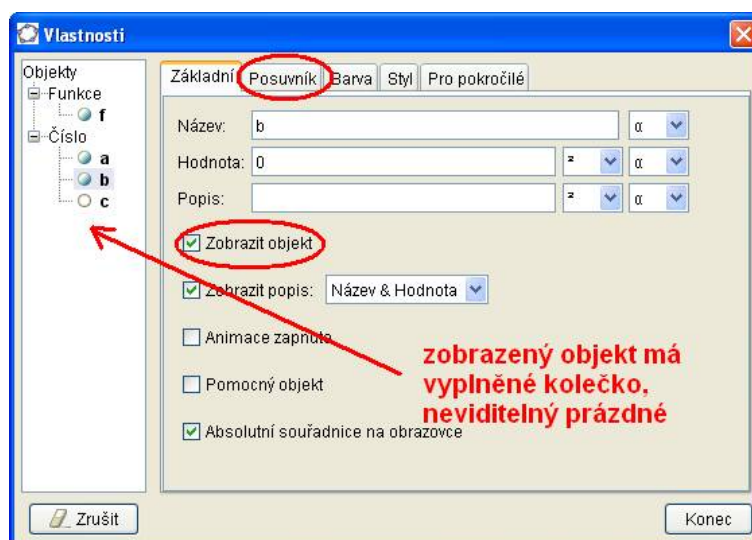
## Příprava

Vkládání příkazů pomocí vstupního pole




Obrázek 5: Vkládání příkazů

**Usnadnění práce se vstupním polem** Po napsání prvních dvou písmen příkazu se tento automaticky doplňuje. Souhlasíme-li s tímto doplněním, stiskneme *Enter*, v opačném případě pokračujeme v psaní. Další informace o práci se vstupním polem získáme kliknutím na „Vstup” v levém dolním rohu. Máme-li nastaven jazyk na češtinu, můžeme používat českou i anglickou verzi příkazů.



Obrázek 6: Zobrazení objektu

## Konstrukce

1.	<input type="text" value="vstup:"/>	<p>Zadáme hodnoty parametrů <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math>. Ty pak bude možné měnit.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Do vstupního pole napíšeme <math>a = 1</math> a potvrdíme klávesou Enter.</li> <li>• Zkontrolujeme, že se ve složce Volné objekty v algebraickém okně objevilo <math>a = 1</math>.</li> <li>• Stejně zadáme <math>b = 0</math> a <math>c = 0</math>.</li> </ul>
2.	<input type="text" value="vstup:"/>	<p>Zadáme rovnici kvadratické funkce.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Do vstupního pole napíšeme <math>f(x) = a * x^2 + b * x + c</math> (viz. obr. 5)</li> </ul>
3.	<input type="text" value="vstup:"/>	<p>Zobrazíme a nastavíme posuvníky pro hodnoty <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ve vlastnostech (Úpravy → „Vlastnosti“) na záložce „Základní“ zatrhneme pro <math>a</math>, <math>b</math> i <math>c</math> možnost „Zobrazit objekt“. (viz. obr. 6).</li> <li>• Nastavit viditelnost je možné i přímo v algebraickém okně (kliknutím na kolečko u objektu).</li> <li>• Na záložce „Posuvník“ můžeme nastavit rozsah hodnot parametrů.</li> </ul>
4.	<input type="text" value="vstup:"/>	<p>Zvýrazněme vrchol paraboly.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Použijeme příkaz <code>Extrem[f]</code>.</li> <li>• Ten vybereme v nabídce v pravém dolním rohu nebo prostě napíšeme do vstupního pole.</li> </ul>
5.		<p>Najdeme průsečíky s osami <math>x</math> a <math>y</math>, a osu paraboly.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Průsečíky s osami sestrojíme pomocí nástroje „Průsečíky dvou objektů“.</li> <li>• Osu paraboly sestrojíme pomocí nástroje „Rovnoběžka“. (Bod = V, rovnoběžka = osa <math>y</math>.)</li> </ul>

## Úpravy

### Upravíme vzhled čar, bodů a popisků

- Průsečíky přejmenujeme na  $X_1$ ,  $X_2$  a  $Y$ , osu na  $o$ .
- Pro  $f$  nastavíme v záložce „Základní“ položku „Zobrazit popis“ na „Název & Hodnota“.


**Text v obrázku**, který bude popisovat souřadnice průsečíků atd. a dynamicky se měnit spolu s grafem funkce.

- Uvozovky značí statický text. Hodnotu proměnné, která se může dynamicky měnit, ohraničuje  $+$ .
- Do vstupního pole postupně zadáme následující:
 

```
''Vrchol paraboly: V = '' + V
''Osa paraboly: o: '' + o
''Průsečíky s osou x: X1 = '' + X1 + '', X2 = '' + X2
''Průsečík s osou y: Y = '' + Y
```
- Text můžeme upravovat a formátovat ve „Vlastnostech“. Samotný text se dá změnit i po dvojkliku myší.
- Text zatím umístíme libovolně, jeho pozici můžeme kdykoli měnit myší. Přesnou pozici textu nastavíme ve „Vlastnostech“ na záložce „Pozice“.

## Export do html

Nyní vše upravíme do podoby, jakou by měl mít applet na naší webové stránce.

- Zavřeme algebraické okno.
- Upravíme velikost okna.
- Použijeme nástroj „Posunout nákresnu“  a upravíme umístění středu souřadnic.

Vytvoříme html soubor obsahující tento applet.

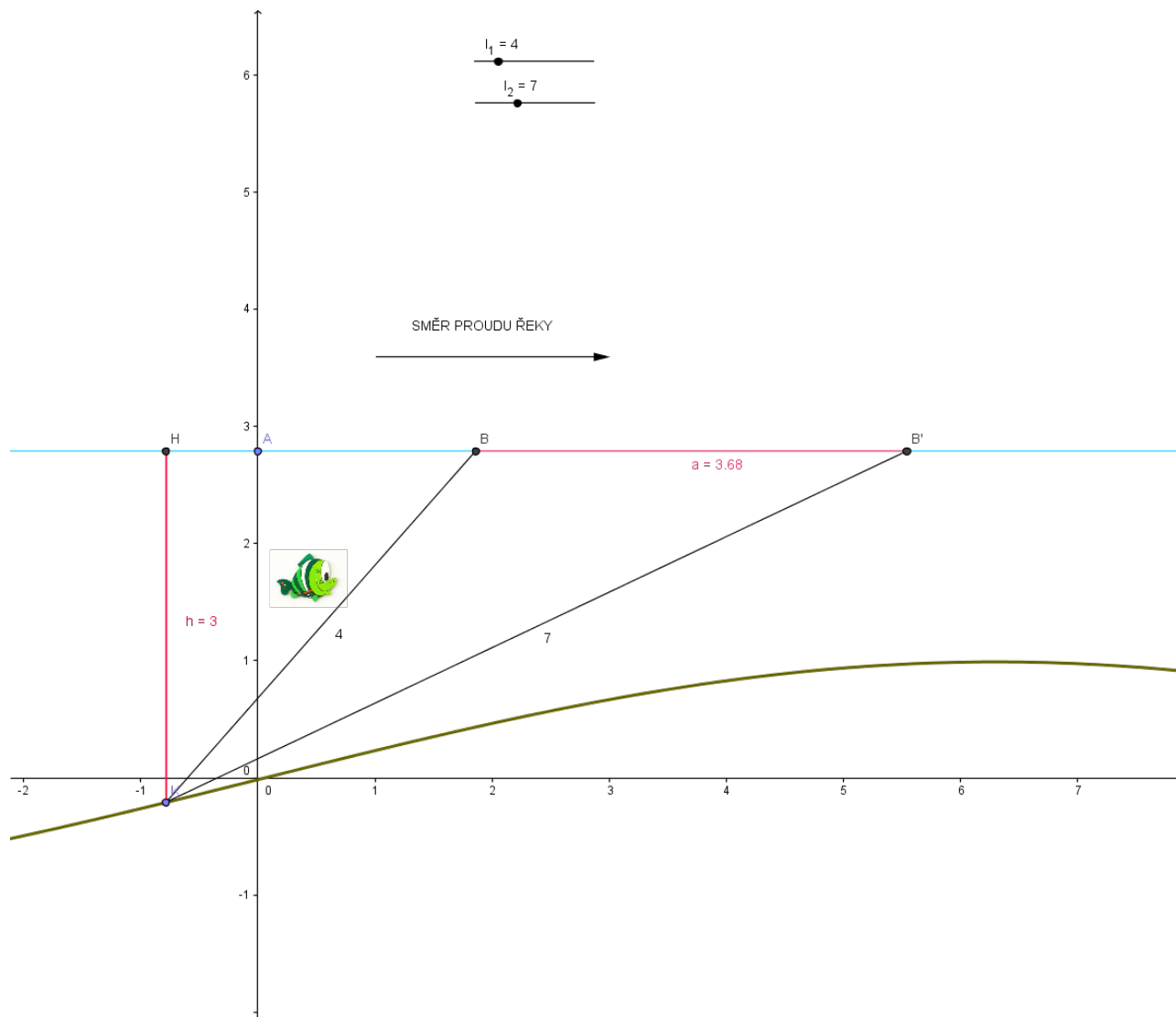
- „Soubor“ → „Export“ → „Dynamický pracovní list jako webová stránka (html)“
- Nebo použijeme klávesovou zkratku *Ctrl + Shift + W*.
- V záložce „Pro pokročilé“ zatrhneme možnost „Zobrazit ikonu pro resetování konstrukce“.
- Potvrdíme tlačítkem „Export“. Otevře se webová stránka obsahující náš výtvar.



Hotovo.

## Příklad 12: Měření hloubky řeky v jejích nedostupných místech












**Zadání:** Z letadla se vhodí do řeky kotva ( $K$ ), k níž jsou na dvou lankách nestejně délky ( $l_1$  a  $l_2$ ) přivázány dvě bóje ( $B_1, B_2$ ). V okamžiku, kdy bóje vyplují na hladinu, se provede letecké snímkování. Změřením na snímku se získá vzdálenost ( $a$ ) obou bójí a z toho se vypočítá hloubka ( $h$ ) řeky v uvedeném místě.



Obrázek 7: Měření hloubky řeky



## Konstrukce

1.		Dno řeky nahradíme funkcí $f(x) = \sin(x/4)$ .
2.		Zobrazíme a nastavíme posuvníky pro hodnoty $l_1$ a $l_2$ .
3.		Na ose $y$ zvolíme bod $A$ .
4.		Sestrojíme hladinu řeky, tj. přímku $a$ , která prochází bodem $A$ a je kolmá k ose $y$ .
5.		Zvolíme kotvu, tj. bod $K$ na funkci $f(x)$ .
6.		Sestrojíme kružnice $k(K, l_1)$ a $l(K, l_2)$ .
7.		Bóje $B$ je bod na hladině ve vzdálenosti $l_1$ od kotvy $K$ .
8.		Bóje $B'$ je bod na hladině ve vzdálenosti $l_2$ od kotvy $K$ .
9.		Zobrazíme název a hodnotu úsečky $a$ , která udává vzdálenost bójí $B$ a $B'$ .
10.		Zobrazíme název a hodnotu úsečky $h = KH$ , která udává výšku $h$ hladiny řeky v místě, kde dopadla kotva, tj. bodem $K$ sestrojíme kolmici $c$ k hladině a určíme jejich průsečík $H$ .
11.		Hotovo.

## Moje poznámky



# Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

## 3 $\mu$ 2012

---

### Upevnění pojmu funkce pomocí slovních úloh

Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

---

Na několika úlohách si ukážeme jak studentům pomoci s lepším pochopením pojmu funkce. V prvním příkladě se dostaneme mezi barevné hady, v druhém pomůžeme hladové ovečce a v posledním spěchajícímu rybáři dostat co nejrychleji domů.

#### Barevní hadi

Uděláme animaci s běhajícími hady. Studentům tento příklad pomáhá uvědomit si, co je definiční obor funkce, jak vypadá bod ležící na graf funkce a také si zkusí sčítání funkcí.

#### Ovce na pastvě

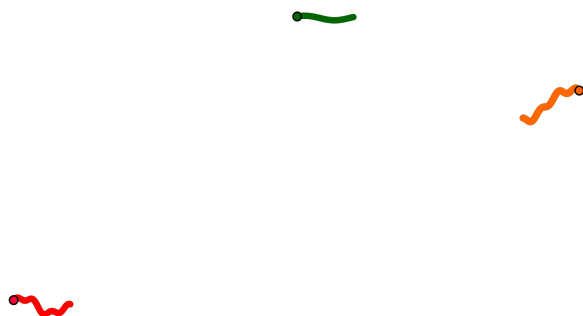
Máme kruhovou zahradu o poloměru 10 m a na její okraj přivážeme ovečku. Chceme určit takovou délku provazu, aby vypásla jen půlku obsahu zahrady.

#### Spěchající rybář


Rybář se nachází na moři v bodě A, který je od nejbližšího bodu na pobřeží B ve vzdálenosti  $d_M$ . Jeho chýše stojí v bodě D ve vnitrozemí, který je od nejbližšího bodu na pobřeží C ve vzdálenosti  $d_P$ . Vzdálenost bodů B a C je  $d$ . Na moři může veslovat rychlostí  $v_M$  a na pevnině jde rychlostí  $v_P$ . Do kterého místa R na pobřeží má veslovat, aby se domů dostal co nejrychleji?

## Příklad 13: Barevní hadi



**Zadání:** Uděláme animaci s běhajícími hady. Studentům tento příklad pomáhá uvědomit si, co je definiční obor funkce, jak vypadá bod ležící na grafu funkce a také si zkusí sčítání funkcí.



### Konstrukce

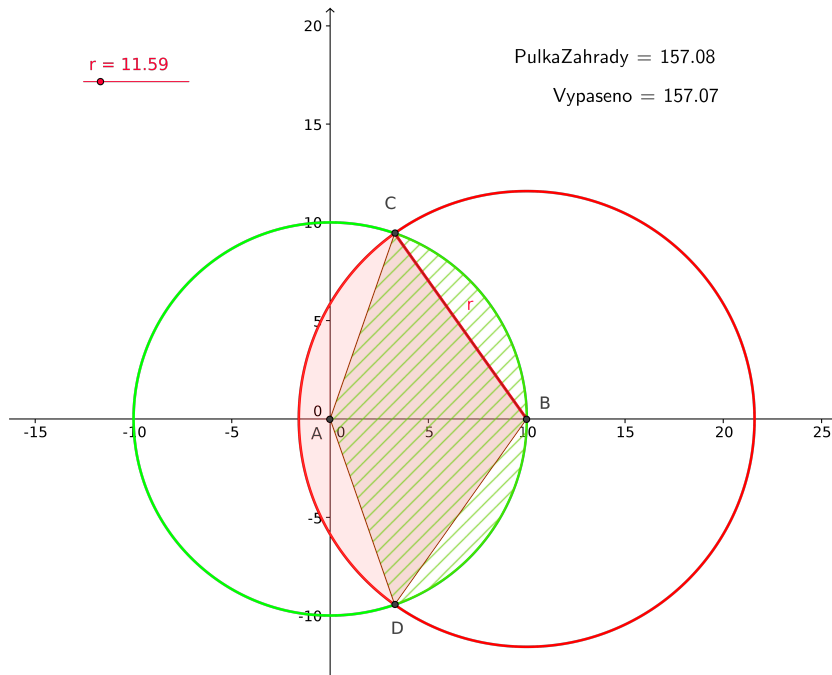
1.		Vytvoříme posuvník $t$ od 0 do 400.
2.	<input data-bbox="162 1333 227 1365" type="text" value="Vstup:"/>	Zadáme prvního hada $\text{had} = \text{Funkce}[\sin(x), t, t+10]$ a můžeme mu změnit barvu a zvětšit tloušťku čáry.
3.	<input data-bbox="162 1459 227 1491" type="text" value="Vstup:"/>	Přidáme mu hlavu jako bod $\text{Hlava} = (t+10, \text{had}(t+10))$ a můžeme ji změnit na červenou a zvětšit velikost nebo i styl bodu.
4.		Nastavíme animaci jen jedním směrem, ve „Vlastnostech“ posuvníku zvolíme „Animace $\Rightarrow$ Rostoucí“.
5.		Animaci spustíme pravým tlačítkem na posuvník – „Animace zapnuta“.

### Postřehy a poznámky

V levém dolním rohu nákresny můžete vidět tlačítka na zastavení  a spuštění animace . Ostatní hady uděláme obdobně. Ponechám na Vaši fantazii.




## Příklad 14: Ovce na pastvě

**Zadání:** Máme kruhovou zahradu o poloměru 10 m a na její okraj přivážeme ovečku. Chceme určit takovou délku provazu, aby vypásla jen půlku obsahu zahrady.



## Konstrukce

1.		Uděláme kružnici se středem v počátku a poloměrem 10. Kružnici se přejmenujeme na c. Barvu změníme na zelenou.
2.		Vložíme posuvník r (poloměr provazu) od 10 do 20 s krokem 0.1. Barvu změníme na červenou.
3.		Vložíme bod na objektu, tedy na kružnici c. Bod se pojmenujeme B.
4.		Uděláme kružnici se středem v bodě B a poloměrem r. Kružnice si pojmenujeme d. Barvu změníme na červenou.
5.		Najdeme průsečíku kružnic. Body si pojmenujeme C, D.
6.		Vytvoříme kruhovou výseč určenou středem A a dvěma body C, D. Body označujeme v pořadí - střed a body na oblouku v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). Výseč přejmenuje VysecZahrada (za použití pravého tlačítka myši). Výseč můžeme zeleně vyšráfovat - „Vlastnosti“ - „Styl“ - „Výplň“.

7.		Vytvoříme kruhovou výseč určenou středem B a dvěma body C D. Body označujeme v pořadí - střed a body na oblouku v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). Výseč přejmenuje <code>VysecOvce</code> (za použití pravého tlačítka myši).
8.		Vytvoříme mnohoúhelník určený body A,D,B,C. Body označujeme v daném pořadí, nakonec klikneme opět na první bod A. Výseč přejmenuje <code>Prunik</code> (za použití pravého tlačítka myši).
9.	<input data-bbox="191 567 243 588" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme obsah vypasené oblasti: <code>Vypaseno=VysecZahrada+VysecOvce-Prunik</code> . Stiskneme <i>Enter</i> . Myší můžeme přetáhnout objekt <code>Vypaseno</code> do <i>Nákresny</i> , a bude se zobrazovat aktuální hodnota.
10.	<input data-bbox="191 766 243 787" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme obsah půlky zahrady: <code>PulkaZahrady=1/2*pi*100</code> . Stiskneme <i>Enter</i> . Myší můžeme přetáhnout objekt <code>PulkaZahrady</code> do <i>Nákresny</i> , a bude se zobrazovat aktuální hodnota.
11.		Změnou hodnoty červeného posuvníku <code>r</code> vidíme změnu hodnot <code>Vypaseno</code> , takto „zkusmo“ prozatím najdeme řešení.

## Postřehy a poznámky

- Není přesně určeno v jakém pořadí se označí průsečíky dvou objektů, v tomto případě dvou kružnic.
- Při definování kruhové výseče určené středem a dvěma body označíme nejprve střed a pak dva body na výseči v kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček.

## Konstrukce pomocí vstupního pole

```

c=Kruznice[(0,0),10]
r=Posuvnik[10,20,0.1]
B=Bod[c]
d=Kruznice[B,r]
Prusecik[c,d]
VysecZahrada=KruhovaVysecDanaUhlem[ A, C, D]
VysecOvce=KruhovaVysecDanaUhlem[B,D, C]
Mnohouhlenik[A,D,B,C,A]
Vypaseno=VysecZahrada+VysecOvce-Prunik
PulkaZahrady=1/2*pi*100

```

## Pro pokročilé

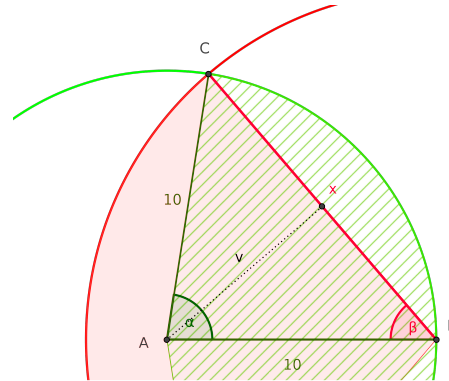
Úlohu jsme popsali geometricky a „zkusmo“ jsme našli řešení. Nyní se na problém podíváme podrobněji. Označme jako  $x$  hledanou délkou provazu.

Podíváme se na trojúhelník  $ABC$  a lehce zjistíme, že platí:

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{x}{20}\right)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{20}\right)$$

$$v = \sqrt{100 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$



Obsahy výsečí a čtyřúhelníka se spočítají:

$$\text{VysecZ}(x) = x^2 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{20}\right) \right) \quad \text{VysecO}(x) = 200 \arcsin\left(\frac{x}{20}\right) \quad \text{Prunik}(x) = x \sqrt{100 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Hledáme  $x \in \langle 10, 20 \rangle$  jako řešení rovnice:

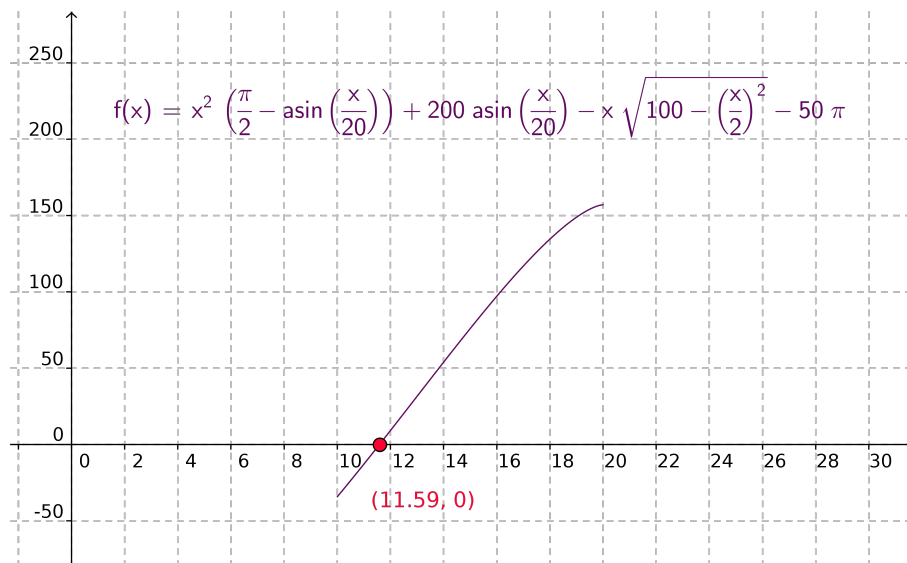
$$x^2 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{20}\right) \right) + 200 \arcsin\left(\frac{x}{20}\right) - x \sqrt{100 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - 50\pi = 0$$

Zadáme funkci do vstupního pole, uděláme restrikcí na daný interval a najdeme její nulový bod:

$$f(x) = x^2 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{20}\right) \right) + 200 \arcsin\left(\frac{x}{20}\right) - x \sqrt{100 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - 50\pi$$

$$f.r = \text{Funkce}[f, 10, 20]$$

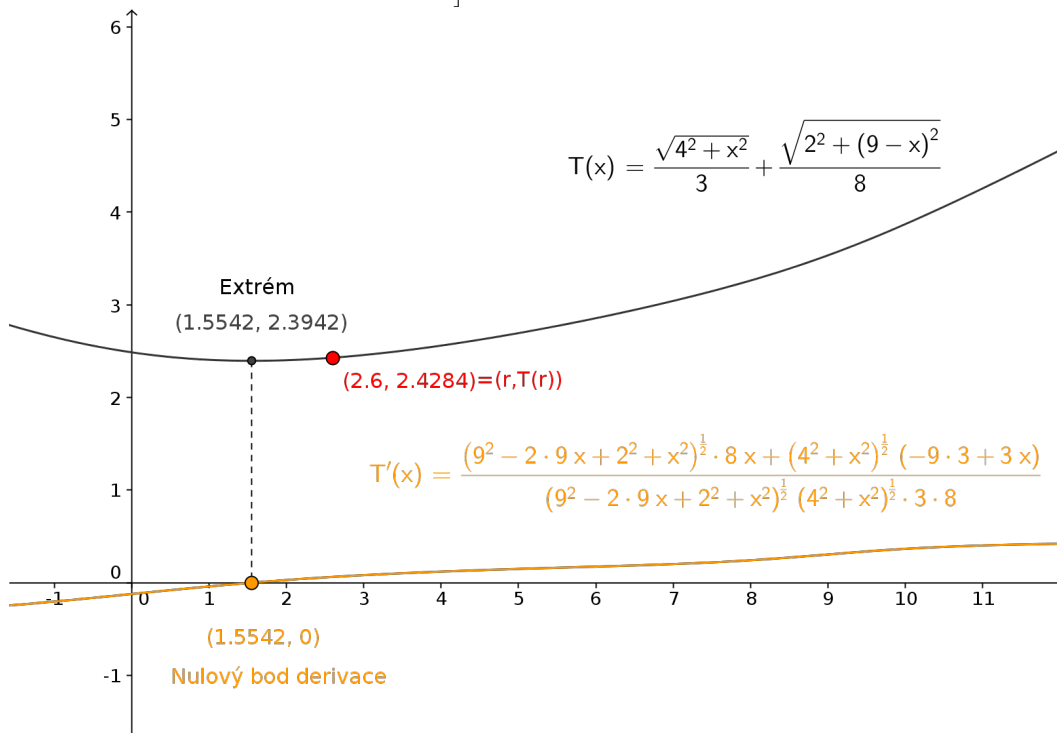
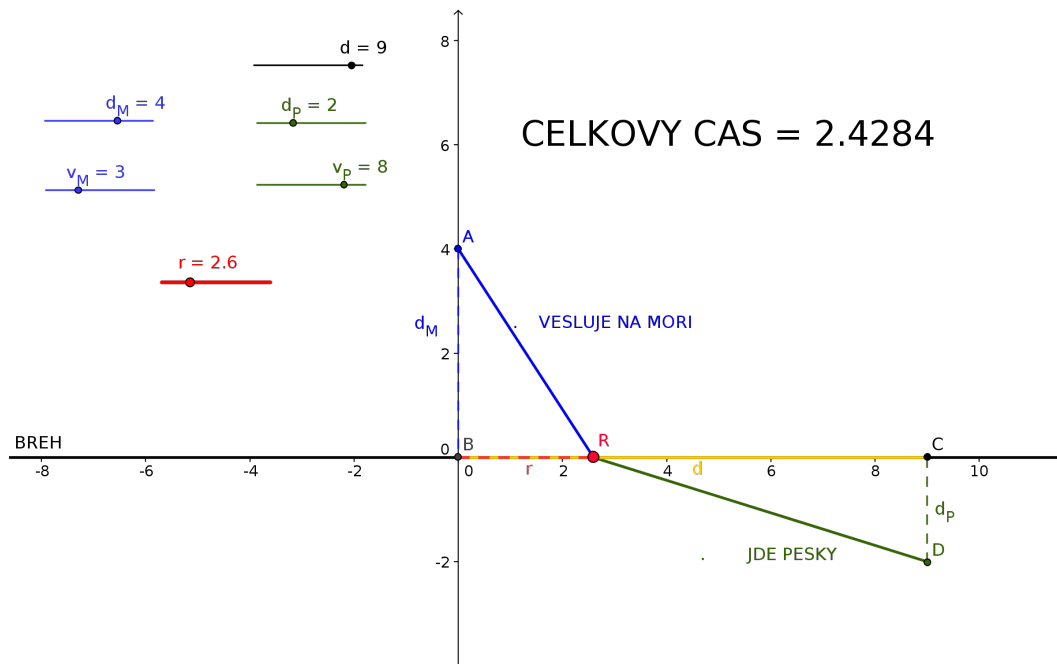
$$\text{NulovyBod}[f.r, 10, 20]$$



## Příklad 15: Spěchající rybář







**Zadání:** Rybář se nachází na moři v bodě  $A$ , který je od nejbližšího bodu na pobřeží  $B$  ve vzdálenosti  $d_M$ . Jeho chýše stojí v bodě  $D$  ve vnitrozemí, který je od nejbližšího bodu na pobřeží  $C$  ve vzdálenosti  $d_P$ . Vzdálenost bodů  $B$  a  $C$  je  $d$ . Na moři může veslovat rychlostí  $v_M$  a na pevnině jde rychlostí  $v_P$ .

Do kterého místa  $R$  na pobřeží má veslovat, aby se domů dostal co nejrychleji?





## Konstrukce

1.		Vložíme posuvníky na vzdálenosti $d_M$ , $d_P$ , $d$ v rozsahu od 0 do 10
2.	<input data-bbox="289 394 354 436" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme postupně body $B=(0,0)$ $A=(0,d_M)$ $C=(d,0)$ $D=(d,-d_P)$
3.		Vytvoříme úsečky AB, BC, CD
4.		Vložíme posuvník na vzdálenost $r$ v rozsahu od 0 do $d$ s krokem 0.01 a změním mu barvu na červenou.
5.	<input data-bbox="289 730 354 772" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme bod $R=(r,0)$ .
6.		Vytvoříme úsečky AR, RD a nakonec úsečku BR, které změním barvu na červenou.
7.	<input data-bbox="289 940 354 982" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme proměnnou počítající délku dráhy na moři $s_M = \sqrt{d_M^2 + r^2}$ (jako kontrolu srovnáme hodnotu $s_M$ s délkou úsečky AR).
8.	<input data-bbox="289 1087 354 1129" type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme proměnnou počítající délku dráhy na pevnině $s_P = \sqrt{d_P^2 + (d-r)^2}$ (jako kontrolu srovnáme hodnotu $s_P$ s délkou úsečky DR).
9.		Vložíme posuvníky na rychlosti veslování na moři a chůze na pevnině $v_M$ , $v_P$ , rozsah si zvolíme pro libovolné kladné hodnoty.
10.	<input data-bbox="289 1360 354 1402" type="text" value="Vstup:"/>	Zadáme do vstupního pole výpočet celkového času $t = s_M/v_M + s_P/v_P$ , myší můžeme přetáhnout z algebraického okna na nákresnu.
11.		Změnou hodnoty červeného posuvníku $r$ vidíme změnu hodnoty času, takto „zkusmo“ prozatím najdeme minimum.

## Postřehy a poznámky

- Počet desetinných míst u zobrazeného textu na nákresně lze změnit ve „Vlastnostech“ – „Text“ – „Zaokrouhlování“.
- Zobrazení délky úseček na nákresně nastavíme ve „Vlastnostech“ – „Základní“ – „Zobrazit popis“ – „Hodnota“.

## Konstrukce pomocí vstupního pole

```

dM=Posuvnik[0,10,0.1]
dP=Posuvnik[0,10,0.1]
d=Posuvnik[0,10,0.1]
B=(0,0)
A=(0,dM)
C=(d,0)
D=(d,-dP)
r=Posuvnik[0,d,0.01]
R=(r,0)
sM=sqrt(dM^2+r^2)
sP=sqrt(dP^2+(d-r)^2)
vM=Posuvnik[5,30,0.1]
vP=Posuvnik[2,10,0.1]
t=sM/vM+sP/vP

```

## Pro pokročilé

Úlohu jsme popsali geometricky a „zkusmo“ jsme našli řešení. Nyní se na problém podíváme podrobněji. Označme jako  $x$  hledanou vzdálenosti (bodů AR) na břehu.

Pak celkový čas  $T$  bude funkcí  $x$  a bude mít předpis:

$$T(x) = \frac{\sqrt{dM^2 + x^2}}{vM} + \frac{\sqrt{dP^2 + (d-x)^2}}{vP}$$

*Hledáme lokální minimum funkce  $T(x)$  na intervalu  $\langle 0, d \rangle$ .*

V GeoGebře zadáme funkci a najdeme jeho extrém. Dále si můžeme spočítat derivaci funkce a najít její nulový bod na příslušném intervalu.

```

T(x)=sqrt(dM^2+x^2)/vM+sqrt(dP^2+(d-x)^2)/vP
Extrem[T,0,d]
Derivace[T]
NulovyBod[T',0,d]

```

## Nákresna 2

V Geogebře můžeme používat dvě nákresny. Druhou zapneme v menu „Zobrazit“- „Nákresna 2“. Objekt se zobrazí na právě aktivní nákresnu (vybereme myší). Výběr nákresny, na které má být objekt zobrazen, je možný ve „Vlastnostech“ - „Pro pokročilé“ - „Umístění“.



# Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

## 3 $\mu$ 2012

---

### Zajímavé animační úlohy

Radka Hamříková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

---

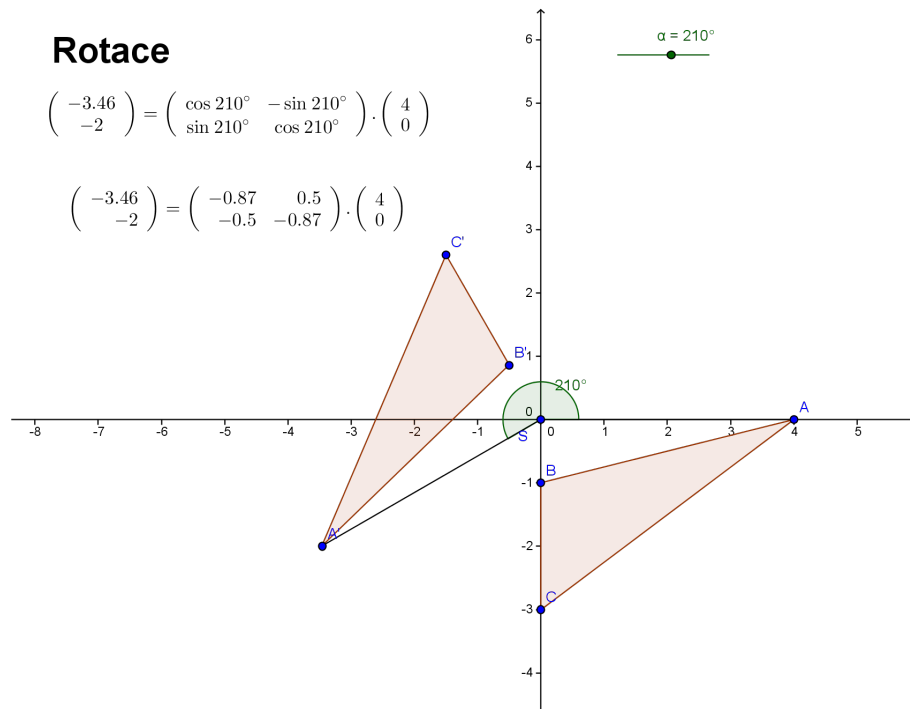
Na rotaci trojúhelníka kolem daného bodu si ukážeme souvislost mezi geometrií a násobením matic a odpovíme na klasickou studentskou připomínku – „A k čemu je to násobení matic dobré?“ Studenti během výuky narazí na problém – vypočítejte délku asteroidy, její plochu nebo objem tělesa, které vznikne rotací asteroidy kolem souřadnicové osy. Téměř nikdo z nich ale netuší, jak asteroida vypadá a jak vzniká.

Nakonec si zahrajeme na designéry. Vytvoříme model hodin s velkou, malou i vteřinovou ručičku, všechny se budou pohybovat dle obvyklých pravidel. Výsledný tvar hodin a barevná úprava je na vás.

## Příklad 16: Rotace a násobení matic

**Zadání:**




Na rotaci trojúhelníka kolem daného bodu si ukážeme souvislost mezi geometrií a násobením matic. Klasická studentská připomínka - ...a k čemu je to násobení matic dobré???





Vytvoříme animovaný gif (html stránku), ve kterém srovnáme rotaci trojúhelníku kolem počátku soustavy souřadnic a výpočet souřadnic otáčeného bodu pomocí součinu dvou matic.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Konstrukce**

1.		zvolíme střed otáčení myši v počátku soustavy souřadnic (bod si přejmenujeme na S) - nebo ho zadáme v souřadnicích do příkazového řádku $S = (0, 0)$
2.		zadáme libovolný trojúhelník (mnohoúhelník) - nebo do příkazového řádku zapíšeme jeho vrcholy a spojíme je
3.		zadáme posuvník jako úhel otáčení $\alpha$

4.		trojúhelník $ABC$ bude rotovat kolem bodu $S$ o úhel $\alpha$ (dostaneme trojúhelník $A'B'C'$ ) - nebo zápis do příkazového řádku Rotace [mnohouhelnik1, $\alpha$ , S]
5.		vyznačení úhlu otáčení mezi body $A$ a $A'$ , jeho velikost je $\alpha$
6.	Vstup: <input type="text"/>	Označíme si souřadnice bodu $A$ jako $a_{1}=x(A)$ a $a_{2}=y(A)$ . Souřadnice otočeného bodu budou $A' = [a'_1, a'_2]$ , vypočítáme je zadáním do příkazového řádku $a'_{1} = a_{1} \cdot \cos(\alpha) - a_{2} \cdot \sin(\alpha)$ $a'_{2} = a_{1} \cdot \sin(\alpha) + a_{2} \cdot \cos(\alpha)$ .
7.	ABC	popis rotace pomocí násobení matic - vložíme text, (podrobnosti viz další strana)
8.		„Soubor“ - „Export - grafický náhled jako animace GIF“

## Popis pomocí - Objekt matice

Nyní vytvoříme pomocí nástroje **Popis**. <sup>ABC</sup>

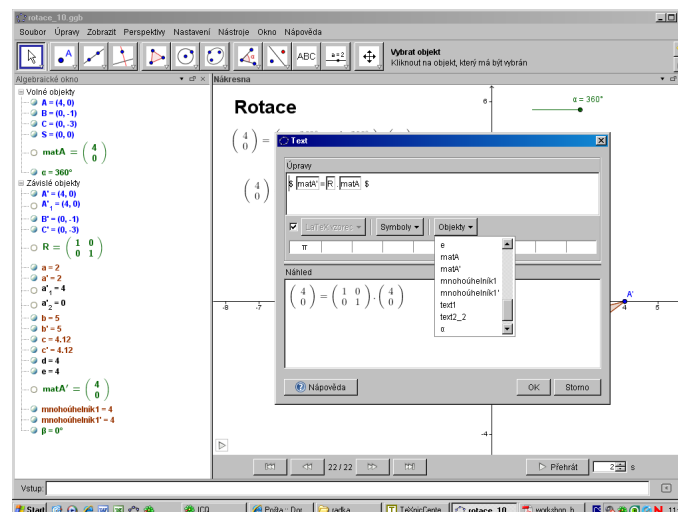
$$\begin{pmatrix} -3.46 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.87 & 0.5 \\ -0.5 & -0.87 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do příkazového řádku napíšeme matice (ty se zadávají do složených závorek):

$$R = \{ \{ \cos(\alpha), -\sin(\alpha) \}, \{ \sin(\alpha), \cos(\alpha) \} \}$$

$$\text{matA} = \{ \{ a_{1} \}, \{ a_{2} \} \}$$

$$\text{matA}' = \{ \{ a'_{1} \}, \{ a'_{2} \} \}$$

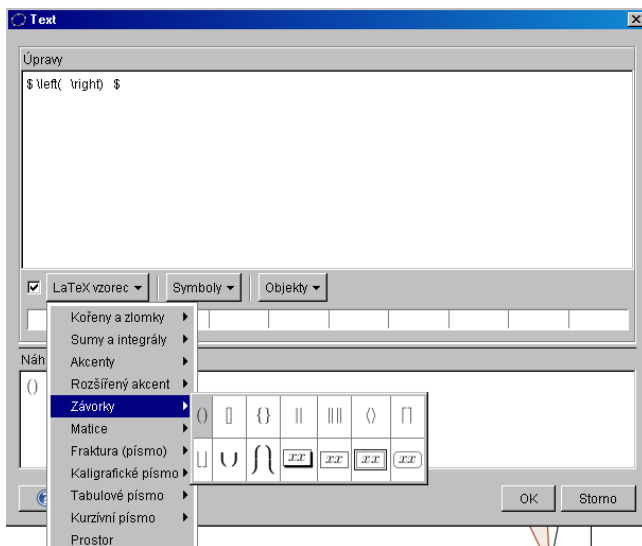


## Pro pokročilé

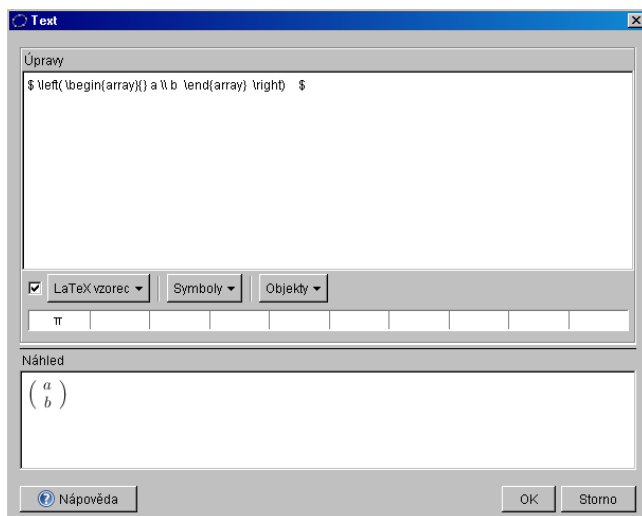
Nyní vytvoříme pomocí nástroje **Popis**.<sup>ABC</sup>

$$\begin{pmatrix} -3.46 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 210^\circ & -\sin 210^\circ \\ \sin 210^\circ & \cos 210^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

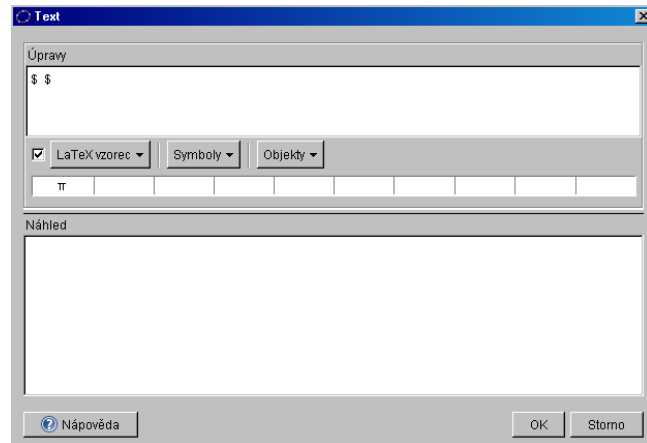
2. Vyberte závorku.



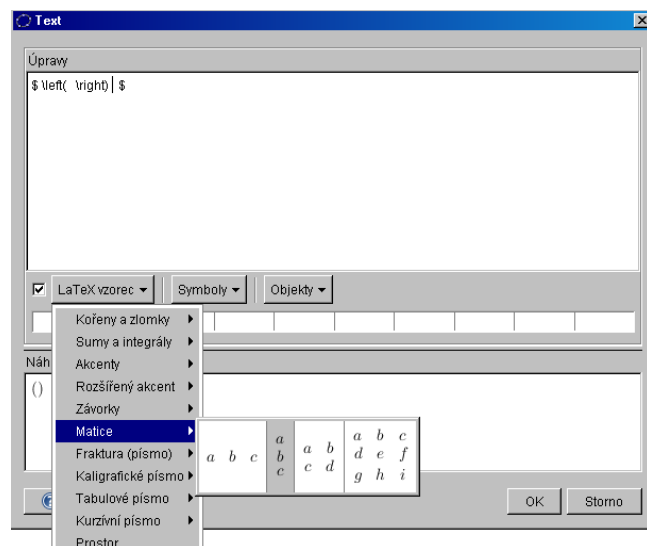
4. Smažeme c.



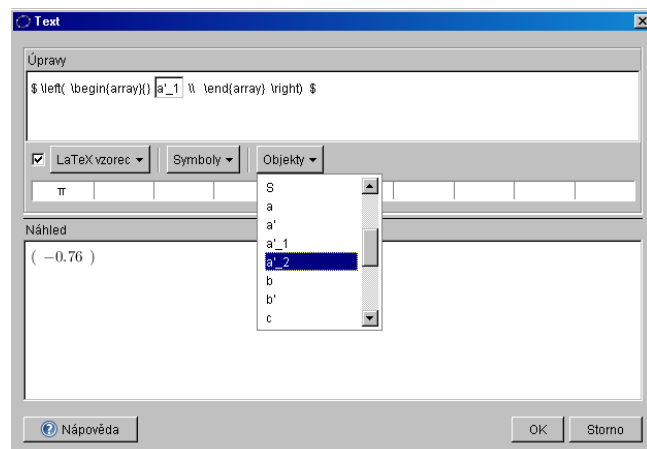
1. Zaškrtněte LaTeX vzorec.



3. Vyberte matici.



5. Hodnoty  $a$  a  $b$  nahradíme objekty  $a'_1$  a  $a'_2$ .



Ostatní matice uděláme obdobně.

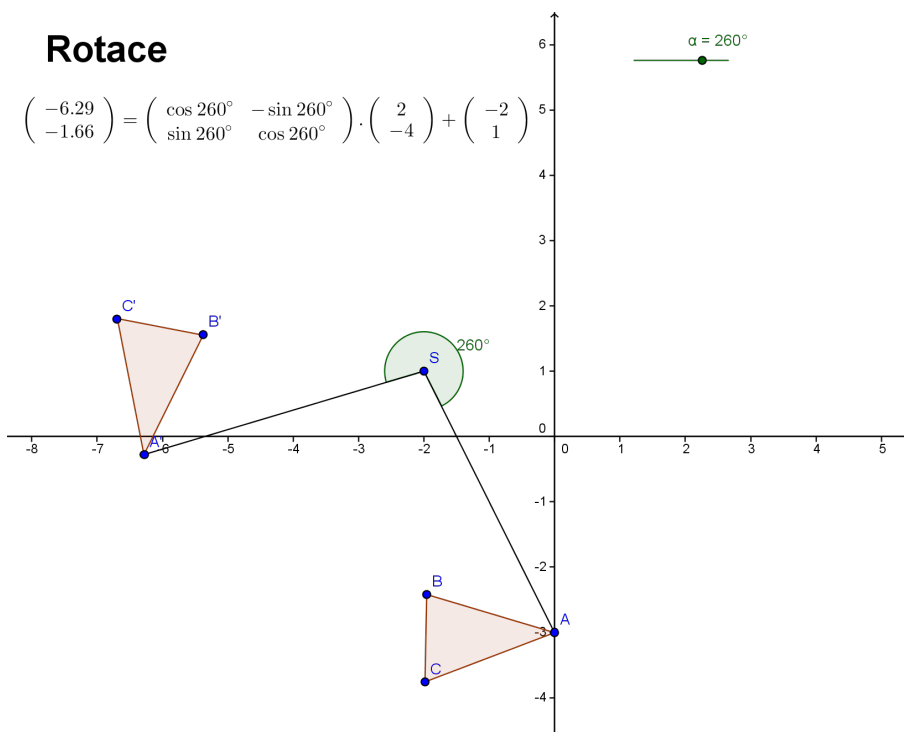
## Úlohy na procvičení

**Zadání:** Animovaný gif, ve kterém srovnáme rotaci trojúhelníku kolem obecného bodu a výpočet souřadnic otáčeného bodu pomocí součinu dvou matic.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - s_1 \\ y - s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

### Rotace

$$\begin{pmatrix} -6.29 \\ -1.66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 260^\circ & -\sin 260^\circ \\ \sin 260^\circ & \cos 260^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Sami si nyní vyzkoušejte, jak upravit předchozí postup, abychom změnili střed rotace.

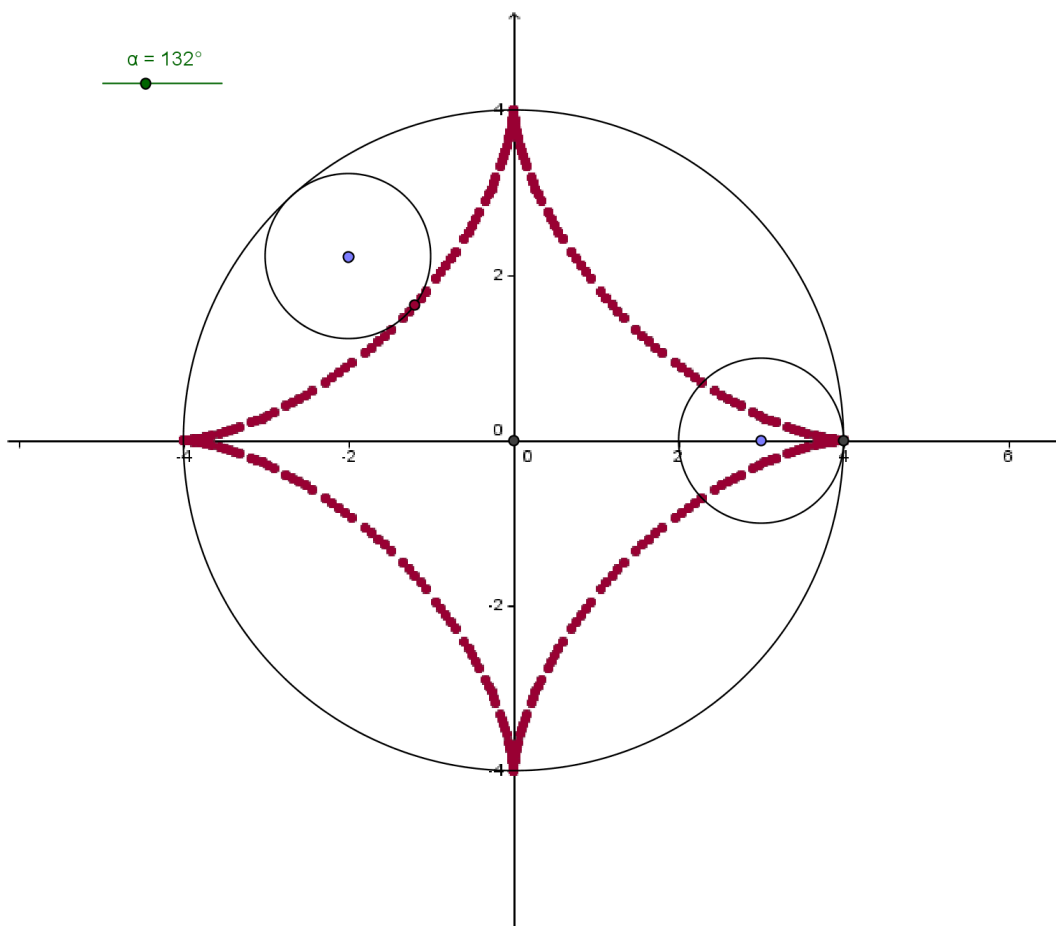
## Příklad 17: Asteroida v geometrických aplikacích určitého integrálu

**Zadání:** *Studenti během výuky narazí na problém - vypočítejte délku asteroidy, její plochu nebo objem tělesa, které vznikne rotací asteroidy kolem souřadnicové osy. Téměř nikdo z nich ale netuší, jak asteroida vypadá a jak vzniká. Proto vznikla tato úloha.*

*Než se pustíme do GeoGebry, připomeneme si pojmy hypocykloida a asteroida jako její speciální případ.*

*Na konci si pak ukážeme, jaké další tvary lze pomocí stejného postupu vykreslovat, mnozí z vás si jistě vzpomenou na Inspiro, které jsme měli jako děti doma.*

*Vytvořte animovaný gif, ve kterém vznikne asteroida.*





## Hypocykloida

Bod kružnice, která se kotálí beze skluzu po vnitřní straně pevné kružnice, opisuje hypocykloidu.

$a$  - poloměr vnější kružnice

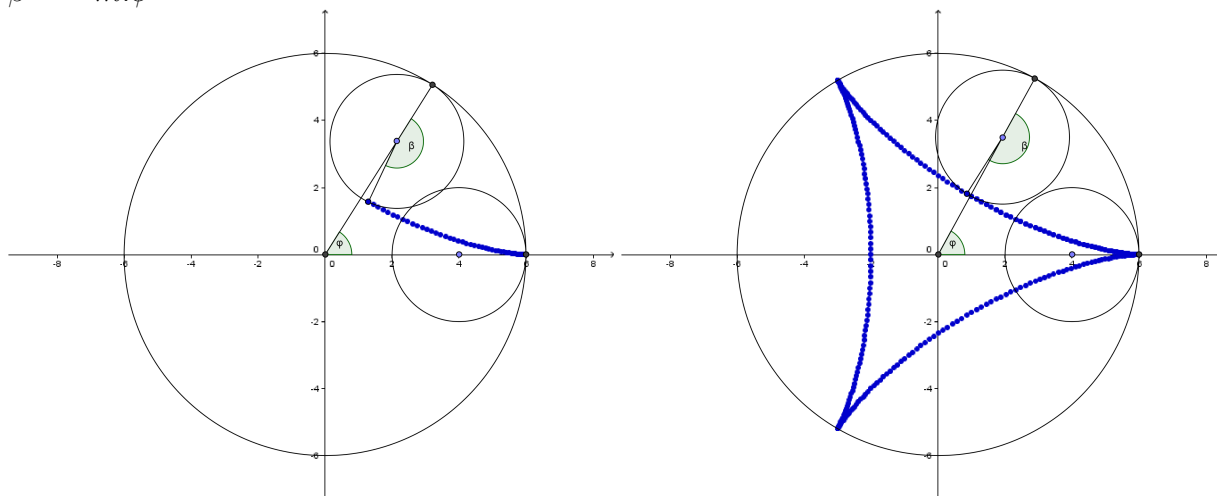
$b$  - poloměr vnitřní kružnice

$\beta$  - úhel odvalení

$\phi$  - úhel otočení

$m = \frac{a}{b}$  - je-li  $m$  celé číslo, skládá se křivka z  $m$  souvislých oblouků, jinak se oblouky protínají.

$\beta = -m \cdot \phi$



## Asteroida

Platí-li u hypocykloidy  $a = 4 \cdot b$ , jedná se o asteroidu.

$a = 4$  - poloměr vnější kružnice








$b = 1$  - poloměr vnitřní kružnice

$m = \frac{a}{b} = 4$

$\phi = \alpha$  - úhel otočení

$\beta = -4\alpha$  - úhel odvalení

## Konstrukce

1.		vnější kružnice $c$ je dána středem a poloměrem - zvolíme střed kružnice tlačítkem - nebo ho zadáme v souřadnicích do příkazového řádku $A = (0, 0)$
2.		kružnice bude dána středem $A$ a poloměrem 4 - nebo do příkazového řádku $Kružnice[A, 4]$
3.		zadáme střed vnitřní kružnice do příkazového řádku $S = (3, 0)$
4.		vnitřní kružnice bude dána středem $S$ a poloměrem 1 - nebo do příkazového řádku $Kružnice[S, 1]$
5.		úhel otáčení $\alpha$ posuvník jako úhel
6.		najdeme průsečík $B$ obou kružnic - označíme myší vnější i vnitřní kružnici
7.		vnitřní kružnice rotuje kolem bodu $A$ o úhel $\alpha$ (proti směru hodinových ručiček) do příkazového řádku $Rotace[d, \alpha, A]$ - rotuje také její střed $S \rightarrow S'$ a bod $B \rightarrow B'$
8.		bod $B'$ vnitřní kružnice rotuje kolem bodu $S'$ o úhel $-4\alpha$ (ve směru hodinových ručiček) - do příkazového řádku $Rotace[B', -4*\alpha, S']$
9.		u bodu $B''$ zapneme stopu a spustíme animaci - vykreslí se nám asteroida
10.		„Soubor“ - „Export - grafický náhled jako animace GIF“.

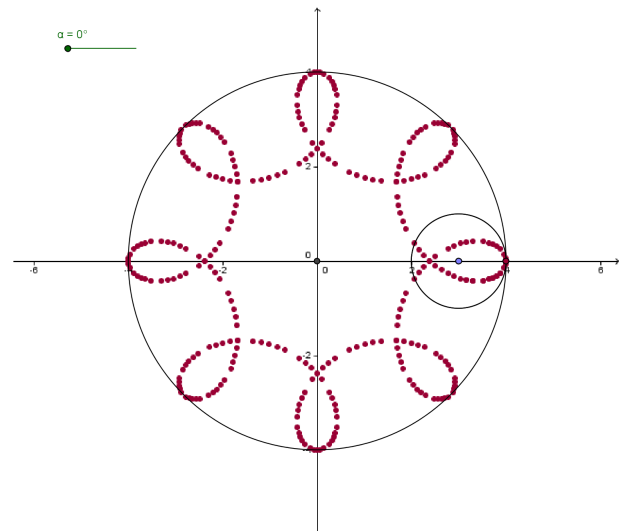
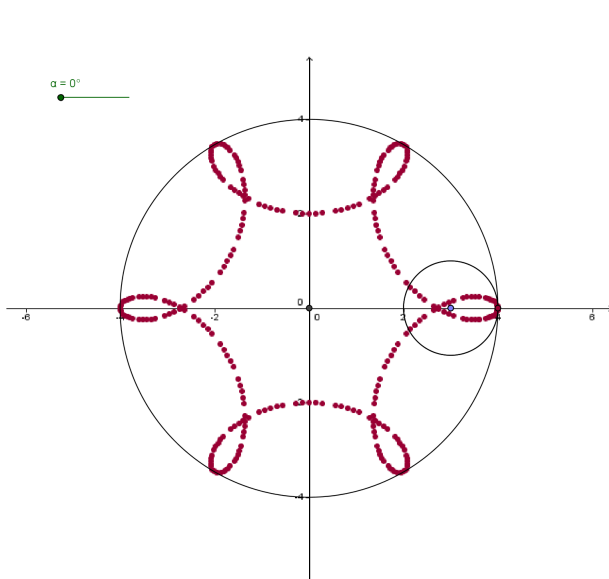
## Inspiro

Zachováme poměr poloměrů, ale budeme si hrát s úhly.

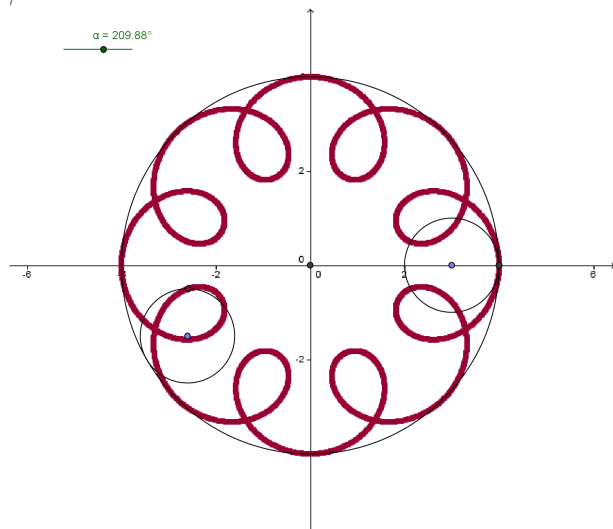
$$m = 4$$

$$\beta = -6\alpha$$

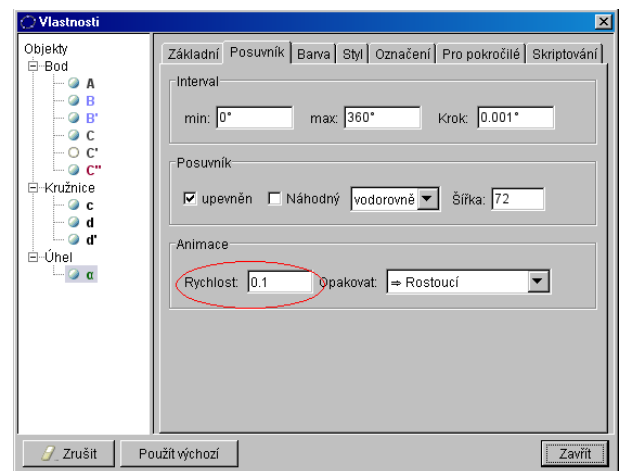
$$\beta = 8\alpha$$



$$\beta = -8\alpha$$



Aby křivka byla spojitá, je vhodné ve vlastnostech změnit rychlost.

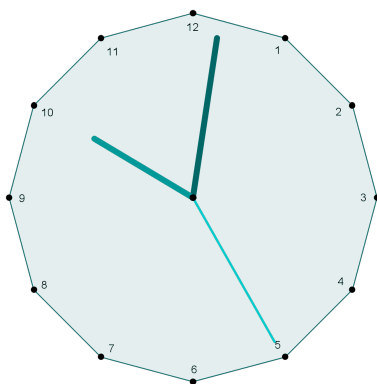
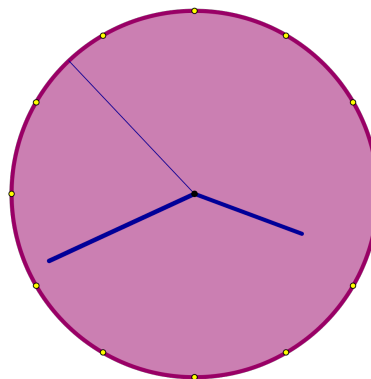


## Literatura






BARTSCH, Hans - Jochen. Matematické vzorce. 3. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1971.












## Příklad 18: Hodiny

**Zadání:** Nakonec si zahrajeme na designéry. Vytvoříme model hodin s velkou, malou i vteřinovou ručičku, všechny se budou pohybovat dle obvyklých pravidel. Výsledný tvar hodin a barevná úprava je na vás. Hodiny, budou měřit skutečný čas.

 $\beta = 300.71^\circ$ 

 $\beta = 110.44^\circ$ 


## Konstrukce

1.		střed hodin - zvolíme střed kružnice - nebo ho zadáme do příkazového řádku v souřadnicích $A = (0, 0)$
2.		kružnice bude dána středem $A$ a poloměrem $6$ - nebo do příkazového řádku <code>Kružnice[A, 6]</code>
3.	<input data-bbox="170 1354 219 1375" type="text" value="Vstup:"/>	svislá osa hodin, zadáme do příkazového řádku <code>x=0</code>
4.		průsečíky osy a kružnice - dostaneme 12 a 6 na hodinách
5.		otočíme jeden vrchol o úhel $30^\circ$ - nebo do příkazového řádku <code>Rotace[B, 30°, A]</code> - máme dva sousední vrcholy dvanáctiúhelníka
6.		pravidelný dvanáctiúhelník nám vyznačí díly na hodinách

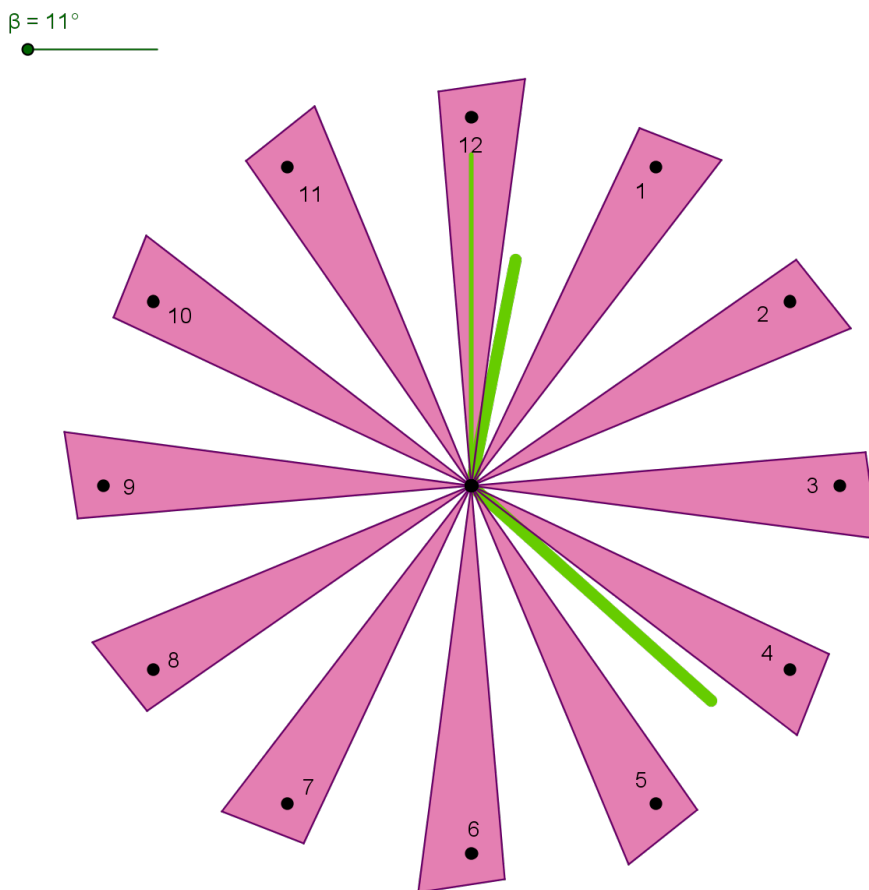
7.		kružnice pro velkou ručičku je dána středem $A$ a poloměrem 5 nebo zadáme do příkazového řádku <code>Kružnice[A, 5]</code>
8.		kružnice pro malou ručičku je dána středem $A$ a poloměrem 4 nebo zadáme do příkazového řádku <code>Kružnice[A, 4]</code>
9.		kružnice pro vteřinovou ručičku je dána středem $A$ a poloměrem 5.5 nebo zadáme do příkazového řádku <code>Kružnice[A, 5.5]</code>
10.		najdeme průsečíky osy hodin s jednotlivými kružnicemi
11.		velká ručička spojí střed hodin s bodem na příslušné kružnici, ve vlastnostech upravíme její barvu a tloušťku
12.		malá ručička spojí střed hodin s bodem na příslušné kružnici, ve vlastnostech upravíme její barvu a tloušťku
13.		vteřinová ručička spojí střed hodin s bodem na příslušné kružnici, ve vlastnostech upravíme její barvu a tloušťku
14.		posuvník $\beta$ úhel bude v rozmezí $0^\circ - 360^\circ$
15.		rotace malé ručičky o úhel $\beta$ - nebo do příkazového řádku <code>Rotace[malarucicka, <math>\beta</math>, A]</code>
16.		rotace velké ručičky o úhel $12\beta$ - nebo do příkazového řádku <code>Rotace[velkarucicka, <math>12*\beta</math>, A]</code>
17.		rotace vteřinové ručičky o úhel $720\beta$ - nebo do příkazového řádku <code>Rotace[vterinovarucicka, <math>720*\beta</math>, A]</code>
18.	ABC	popíšeme hodiny
19.		provedeme finální úpravu hodin pomocí „Zobrazit objekt“
20.		„Soubor“ - „Export - grafický náhled jako animace GIF“.

## Nastavení rychlosti pohybu

	Malá ručička	Velká ručička	Vteřinová ručička
Krok původní	$1^\circ$	$12^\circ$	$720^\circ$
Krok nový	$1/120 = 0.0083333^\circ$		$6^\circ$

Rychlost animace znamená 1 proběhnutí posuvníku  $0^\circ - 360^\circ$ , obvykle toto trvá asi 10 sekund. Záleží na počítači, jak je rychlý. V mém případě animace trvala 14.7 sekundy. Hodiny v reálném čase potřebují 43200 sekund - tomu odpovídá rychlost 0.00034. Pokud máte k dispozici stopky (na mobilu), zkuste si stanovit vlastní rychlost.

## Výsledný tvar hodin a barevná úprava.





# Využití GeoGebry ve výuce matematiky a geometrie

## 3 $\mu$ 2012

---

### Demonstrace vybraných pojmů z matematické analýzy

Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB - TU Ostrava

---

Naším cílem bude vyrobit dynamické webové stránky obsahující applety, pomocí kterých můžeme studentům demonstrovat některé vybrané pojmy z matematické analýzy. Jedná se o Riemannův určitý integrál a směrové pole diferenciální rovnice.

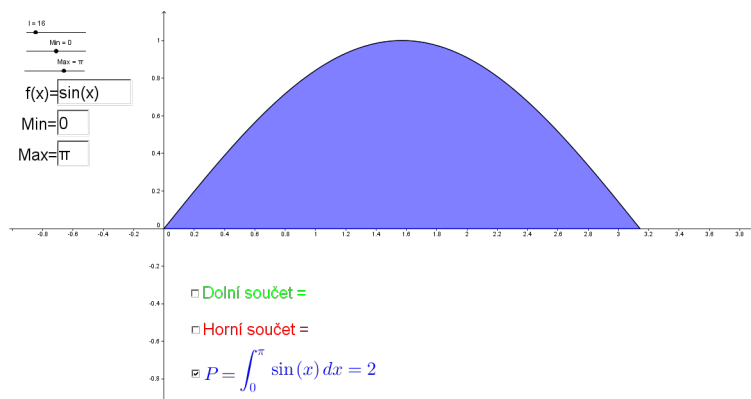
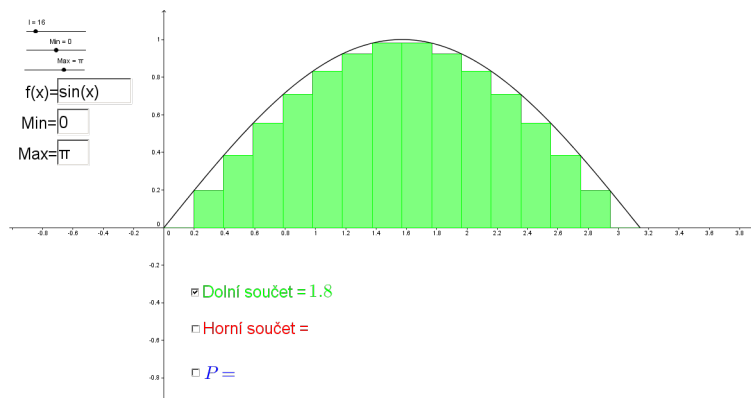
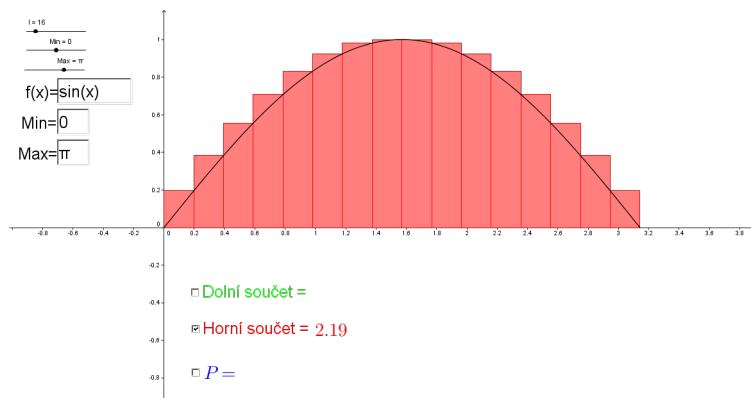
- Riemannův určitý integrál
  - horní a dolní součet funkce
  - dělení a zjemnění intervalu
  - určitý integrál jako limita horních a dolních součtů
  - geometrický význam určitého integálu
- Směrové pole diferenciální rovnice
  - vytvoření směrového pole v GeoGebře
  - možnosti GeoGebry z hlediska řešení diferenciálních rovnic
  - integrální křivka diferenciální rovnice

Zdroje:

1. [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
2. <http://mathplotter.lawrenceville.org/mathplotter/mathPage/slopeField.htm>

## Příklad 19: Riemannův určitý integrál

**Zadání:** Sestavte applet pro výpočet dolního, (resp. horního) součtu Riemannova určitého integrálu a porovnejte jejich hodnoty s hodnotou integrálu.






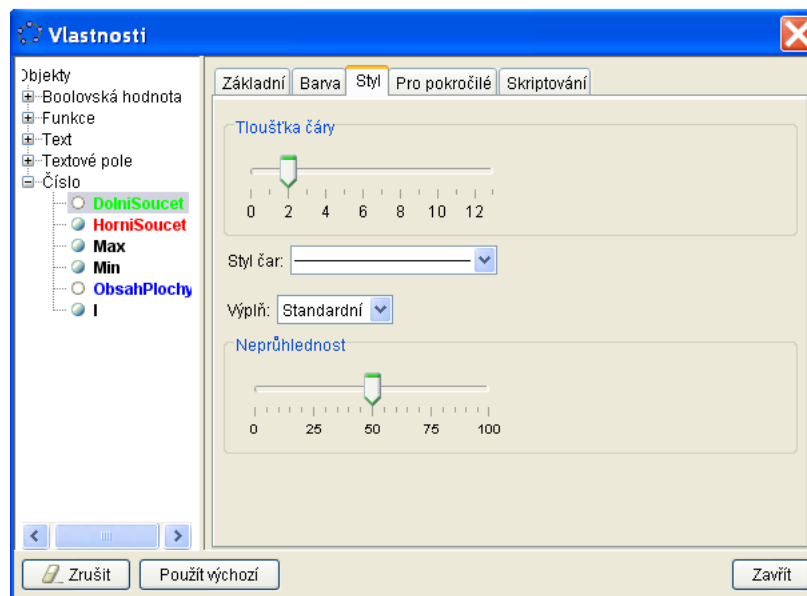
### Poznámka


Při tvorbě appletu se omezíme pouze na nezáporné funkce jedné proměnné.



## Konstrukce

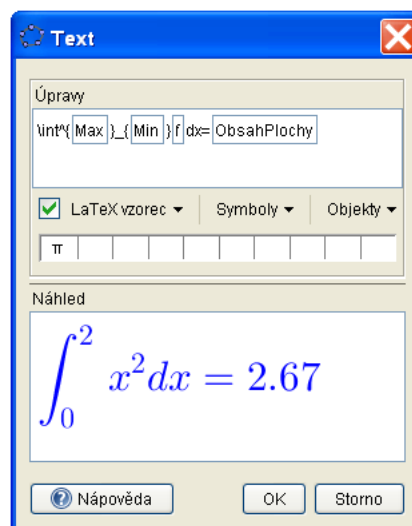
1.		Vložíme posuvník Min (dolní mez) od -10 do 10 s krokem 0.1, nastavíme hodnotu 0.
2.		Vložíme posuvník Max (horní mez) od -10 do 10 s krokem 0.1, nastavíme hodnotu 2.
3.		Vložíme posuvník i (dělení intervalu) od 1 do 100 s krokem 1, nastavíme hodnotu 1.
4.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme testovací funkci, např. $f(x) = x^2$ . Funkci skryjeme.
5.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme funkci $g(x) = \text{Funkce}[f, \text{Min}, \text{Max}]$ , tím omezíme definiční obor funkce $f$ na interval $\langle \text{Min}, \text{Max} \rangle$ .
6.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme příkaz $\text{DolniSoucet} = \text{DolniSoucet}[f, \text{Min}, \text{Max}, i]$ , změníme barvu na zelenou a neprůhlednost na hodnotu 50.
7.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme příkaz $\text{HorniSoucet} = \text{HorniSoucet}[f, \text{Min}, \text{Max}, i]$ , změníme barvu na červenou a neprůhlednost na hodnotu 50.
8.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme příkaz $\text{ObsahPlochy} = \text{Integral}[f, \text{Min}, \text{Max}]$ , změníme barvu na modrou a neprůhlednost na hodnotu 50.



9.	$a = 1$	Vložíme textové pole pro zadání funkce $f$ . Do pole „Popis“ zadáme $f(x) = a$ v poli „Propojený objekt“ vybereme $f(x) = x^2$ . Ve vlastnostech objektu změňíme délku textového pole (Styl) např. na 5 a velikost textu (Text) na střední.
10.	$a = 1$	Analogicky vložíme textová pole pro zadání hodnoty $Min$ a $Max$ , délku textového pole volíme rovnu 2, velikost textu střední.
11.	<input checked="" type="checkbox"/> 	Vložíme zaškrťovací políčko pro zobrazení / skrytí objektu, pole „Popis“ necháme prázdné (GeoGebra si objekt označí automaticky symbolem $a$ ). V poli „Vybrat objekty v konstrukci nebo ze seznamu“ vybereme DolniSoucet. Ve vlastnostech objektu skryjeme popis objektu.
12.	ABC	Vložíme text, do pole „Úpravy“ napíšeme např. Dolní součet =, velikost textu střední, barva zelená. Text přesuneme myší ke tlačítku.
13.	ABC	Vložíme text, v záložce „Objekty“ vybereme DolniSoucet, velikost textu střední, barva zelená. Ve vlastnostech objektu (Pro pokročilé) do pole „Podmínky zobrazení objektu“ zapíšeme $a$ , tím spojíme text s tlačítkem. Analogicky vyrobíme tlačítko pro horní součet a obsah plochy.

## Postřehy a poznámky

- Při vytváření popisku u tlačítka pro obsah plochy využijeme tzv. vazbu s objektem, do pole „Úpravy“ vkládáme formuli jako vzoreček v texovské konvenci, proměnné ve vzorci, tj.  $Min$ ,  $Max$  a  $f$  vkládáme jako objekty.



- Chceme-li, aby text zůstal na místě i v případě oddálení či přiblížení nákresny, je nutné ve vlastnostech potvrdit volbu „Absolutní souřadnice“.

- **Pro pokročilé**

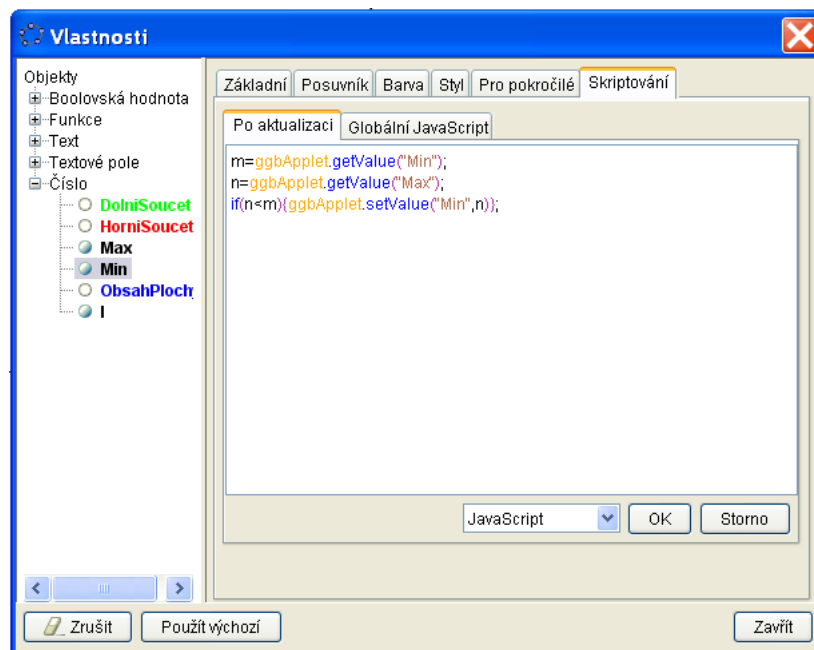
Pokud nastavíme hodnotu  $Min$  větší než  $Max$ , pak nebude definovaná funkce  $g$ . Toto lze ošetřit následujícím způsobem:

Otevřeme vlastnosti posuvníku  $Min$  (Skriptování), do pole „Po aktualizaci“ při nastavení na JavaScript vložíme

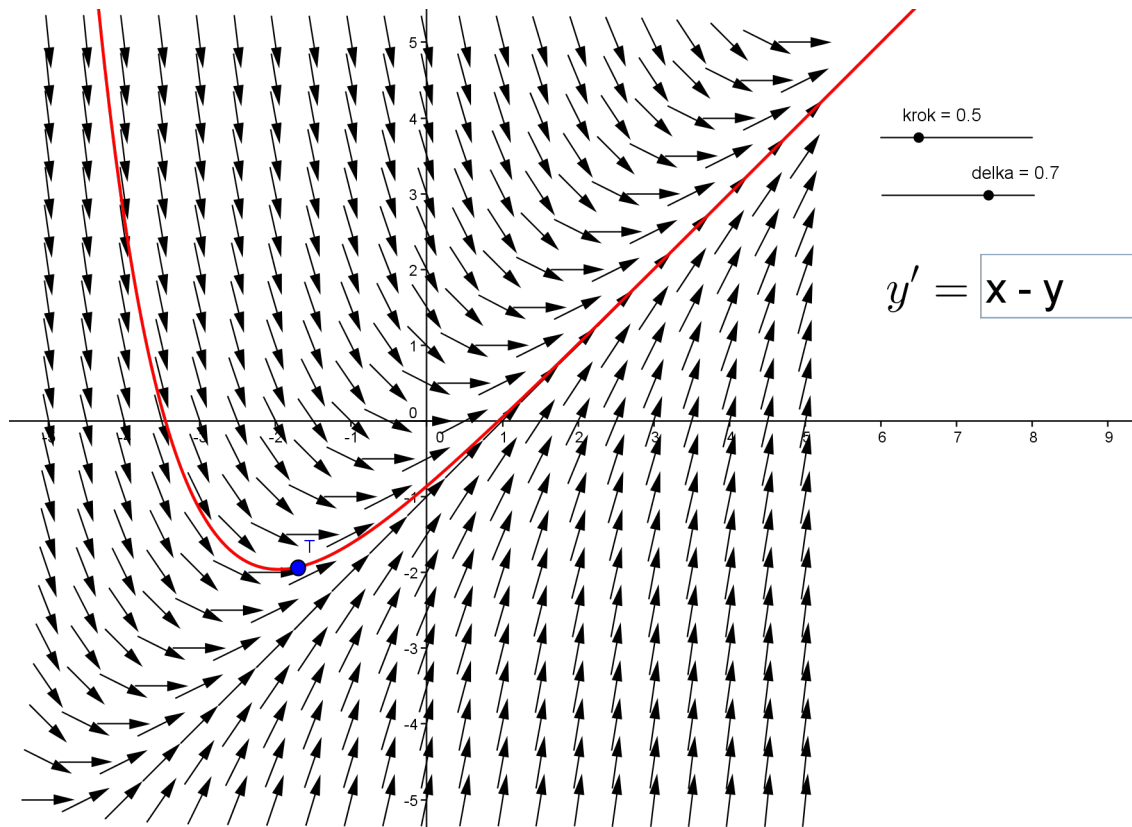
```
m=ggbApplet.getValue("Min");  
n=ggbApplet.getValue("Max");  
if(n<m){ggbApplet.setValue("Min",n)};
```

resp. pro  $Max$

```
m=ggbApplet.getValue("Min");  
n=ggbApplet.getValue("Max");  
if(n<m){ggbApplet.setValue("Max",m)};
```



## Příklad 20: Směrové pole diferenciální rovnice

**Poznámka**

Sestavíme applet pro směrové pole obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu  $y' = f(x, y)$ . GeoGebra takový typ rovnice řeší zatím pouze numericky metodou Runge-Kutta. Pomocí GeoGebry lze také numericky řešit jistý typ diferenciálních rovnic druhého řádu.

Při konstrukci směrového pole využijeme příkaz

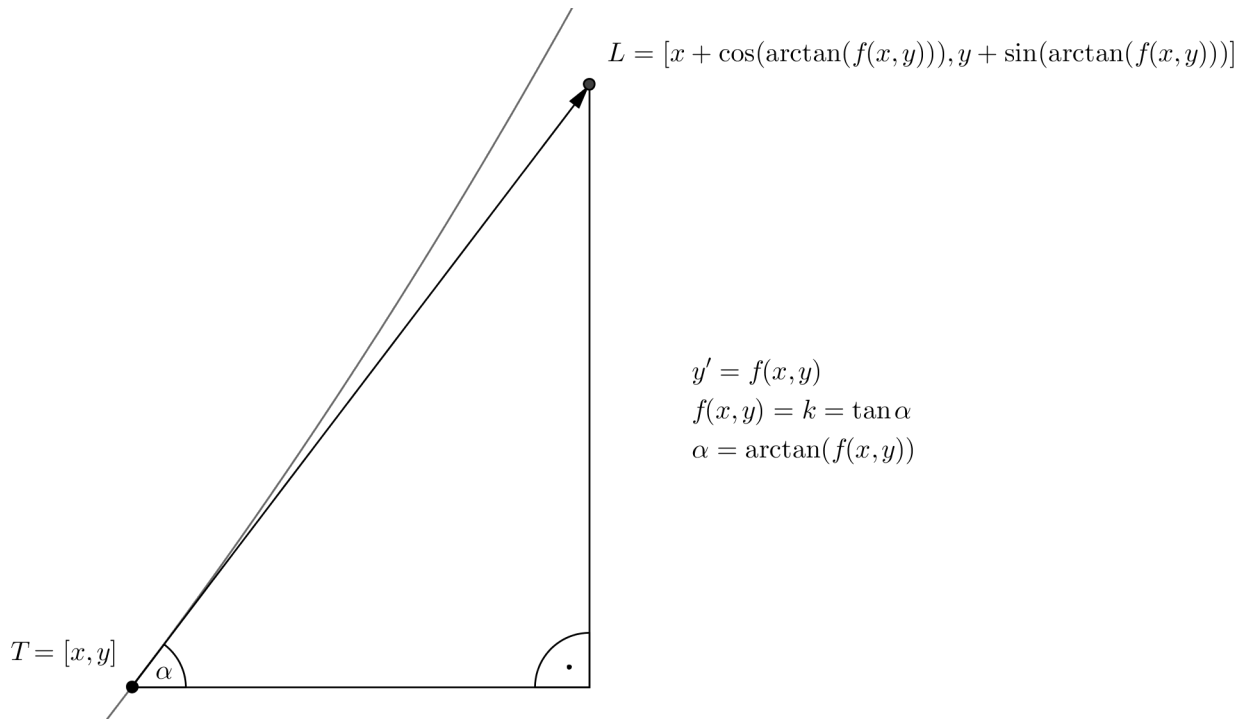
Posloupnost [<Výraz>, <Proměnná>, <Počáteční hodnota>, <Koncová hodnota>, <Krok>]

Při konstrukci integrální křivky využijeme příkaz

VyresitODE [<f(x, y)>, <Start x>, <Start y>, <Konec x>, <Krok>]





Na následujícím obrázku je naznačeno, jak se bude při konstrukci směrového pole postupovat. Diferenciální rovnice  $y' = f(x, y)$  má na pravé straně funkci  $f$ , která v konkrétním bodě  $T = [x, y]$  dává číslo, které má význam směrnice  $k$  tečny sestavené k integrální křivce v bodě  $T$ . Naším úkolem bude určit souřadnice bodů  $T$  a  $L$ , což jsou krajní body úsečky  $TL$  délky 1, resp. určující

body tečného vektoru  $TL$  délky rovné 1. Pro každé konkrétní  $T$  dostaneme konkrétní tečný vektor v tomto bodě. Pomocí příkazu Posloupnost... pak vytvoříme příslušné směrové pole.



## Konstrukce

1.		Vložíme posuvník <code>delka</code> od 0 do 1 s krokem 0.1, nastavíme hodnotu 0.7. Tento parametr ovlivňuje délku tečného vektoru.
2.		Vložíme posuvník <code>krok</code> od 0 do 2 s krokem 0.1, nastavíme hodnotu 0.5. Tento krok ovlivňuje hustotu směrového pole
3.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme postupně následující hodnoty, které určí rozsah směrového pole na osách $x, y$ : např. <code>xmax=5, xmin=-5, ymax=5, ymin=-5</code> .
4.	<input type="text" value="Vstup:"/>	Do vstupního pole zadáme pravou stranu diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ , např. <code>f(x, y) = x - y</code> .

5.		Vytvoříme směrové pole. Do vstupního pole zadáme příkaz <code>Pole=Posloupnost[Posloupnost[Vektor[(m,n),(m+delka*cos(atan(f(m,n))),n+delka*sin(atan(f(m,n))))],m,xmin,xmax,krok],n,ymin,ymax,krok]</code> , změníme barvu pole na černou.
6.		Vložíme textové pole pro zadání funkce $f(x, y)$ . Do pole „Popis“ zadáme $f(x, y) = a$ v poli „Propojený objekt“ vybereme $f(x, y) = x - y$ . Změníme délku textového pole na 5 a velikost textu na střední.
7.		Vložíme bod $T$ .
8.		Vyřešíme diferenciální rovnici $y' = x - y$ . Do vstupního pole zadáme příkaz <code>VyresitODE[f(x,y),x(T),y(T),10,0.01]</code> , změníme barvu na červenou. <b>Zadáme</b> <code>VyresitODE[f(x,y),x(T),y(T),-10,0.01]</code> , tím vytvoříme zbývající část integrální křivky.

## Postřehy a poznámky

- Proměnné v příkazu `Posloupnost` je třeba označit jinak, než  $x$ , a  $y$ , např. použijeme  $m$ ,  $n$ .
- Hodnoty, které vymezují směrové pole, můžeme zadat pomocí posuvníků.
- Zkuste vytvořit soustavu integrálních křivek (využijeme vlastnost Stopa).

# Obsah

<b>První krůčky s GeoGebrou</b> . . . . .	III
Příklad 10: Kružnice vepsaná . . . . .	IV
Příklad 11: Kvadratická funkce . . . . .	VIII
Příklad 12: Měření hloubky řeky v jejích nedostupných místech. . . . .	XII
<b>Upevnění pojmu funkce pomocí slovních úloh</b> . . . . .	XV
Příklad 13: Barevní hadi . . . . .	XVI
Příklad 14: Ovce na pastvě . . . . .	XVII
Příklad 15: Spěchající rybář . . . . .	XX
<b>Zajímavé animační úlohy</b> . . . . .	XXIII
Příklad 16: Rotace a násobení matic . . . . .	XXIV
Příklad 17: Asteroida v geometrických aplikacích určitého integrálu . . . . .	XXVIII
Příklad 18: Hodiny . . . . .	XXXII
<b>Demonstrace vybraných pojmů z matematické analýzy</b> . . . . .	XXXV
Příklad 19: Riemannův určitý integrál . . . . .	XXXVI
Příklad 20: Směrové pole diferenciální rovnice . . . . .	XL

Název:	Sborník z 21. semináře <b>Moderní matematické metody v inženýrství</b>
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2012, I. vydání
Počet stran:	198
Vydala:	VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Katedra:	matematiky a deskriptivní geometrie
Náklad:	60 ks

Neprodejné

ISBN 978-80-248-2883-1