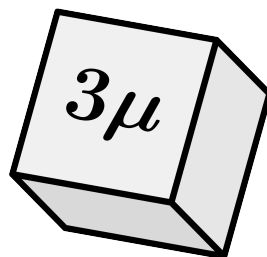


Sborník z 31. semináře

Moderní matematické metody v inženýrství



8.–9. června 2026 • Hradec nad Moravicí

Organizátoři konference


Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Ostrava

 <https://jcmf.vsb.cz/cs/>

Katedra matematických metod v ekonomice, EKF, VŠB – TUO

 <https://www.ekf.vsb.cz/katedra-matematickych-metod-v-ekonomii/>


Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB – TUO

 <https://www.fei.vsb.cz/470/>

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB – TUO

 <https://www.fs.vsb.cz/310/>

Katedra matematiky, FAST, VŠB – TUO

 <https://www.fast.vsb.cz/230/>

Programový a organizační výbor

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

Ing. Pavlína Forstová Kuráňová, Ph.D.

doc. Mgr. Marian Genčev, Ph.D.

Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

prof. RNDr. Radek Kučera, Ph.D.

RNDr. Simona Pulcerová, Ph.D., MBA

RNDr. Petr Volný, Ph.D.

© Katedra matematických metod v ekonomice, EKF, VŠB – TUO

ISBN To be inserted when available.

DOI To be inserted when available.

Úvodní slovo

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

představujeme Vám sborník 31. ročníku semináře Moderní matematické metody v inženýrství 3μ , který se konal ve dnech 8. a 9. června 2026 v Hradci nad Moravicí. Tento seminář, pořádaný ve spolupráci Jednoty českých matematiků a fyziků a pracovišť VŠB – Technické univerzity Ostrava, si za více než tři desetiletí vybudoval pevné místo mezi odbornými setkáními zaměřenými na aplikovanou matematiku, její didaktiku i mezioborové přesahy.

Seminář dlouhodobě vytváří prostor pro sdílení aktuálních vědeckých výsledků, metodických přístupů i zkušeností z praxe. Význam takového setkání v posledních letech dále roste – matematika se stále výrazněji uplatňuje v oblasti modelování, optimalizace, datové analýzy i digitálních technologií a zároveň čelí novým výzvám ve vzdělávání.

Předkládaný sborník obsahuje recenzované příspěvky prezentované v hlavních tematických okruzích semináře. Sekce zaměřená na matematiku a její aplikace přináší jak teoretické studie, tak konkrétní řešení úloh inspirovaných technickou i ekonomickou praxí. Sekce věnovaná výuce matematiky reflektuje aktuální problémy i inovace v pedagogickém procesu, včetně využití digitálních nástrojů a nových přístupů k podpoře studujících. Přirozenou součástí letošního ročníku jsou také reflexe proměn akademického prostředí, včetně nástupu nástrojů umělé inteligence.

Věříme, že zařazené příspěvky přispějí nejen k rozšíření odborných poznatků, ale také k podněcování další spolupráce a diskuse napříč pracovišti i obory. Seminář 3μ si dlouhodobě zakládá na otevřené a kolegiální atmosféře, která umožňuje sdílení zkušeností i vznik nových výzkumných podnětů.

Děkujeme všem autorům příspěvků, recenzentům i členům programového a organizačního výboru za jejich práci při přípravě tohoto sborníku i celého semináře.

V Ostravě, červen 2026.

Obsah

Příspěvek 1 **11**

Navrhování tras obslužných vozidel s využitím sekundární dekompozice (Kozel P.)

1	Úvod	11
2	Formulace problému	12
	2.1 Matematický model	12
	2.2 Ilustrační úloha	13
3	Numerické experimenty	15
4	Závěr	16

Příspěvek 2 **19**

Klasifikace struktur molekulových klastrů pomocí permutačně invariantních metrik (Vítek A.)

1	Úvod	19
2	Metody a výsledky	20
3	Závěr	22

Příspěvek 3 **23**

Výuka pravděpodobnosti s ohledem na inženýrské aplikace (Jekl J., Jánský J.)

1	Úvod	23
2	Teoretický základ pojmů z pravděpodobnosti	24
3	Operace s jevy, úplná pravděpodobnost	25
4	Weibullovo rozdělení	30
5	Závěr	32

Příspěvek 4 **33**

Od řešení k zadání: inverzní konstrukce úloh na limity funkcí (Rucki P.)

1	Úvod	33
2	Teoretické předpoklady	33
3	Limity s celočíselnou hodnotou	35
	3.1 Limity s goniometrickými funkcemi	35
	3.2 Limity s exponenciálními funkcemi	38
	3.3 Limity s hyperbolickými funkcemi	40
	3.4 Limity s logaritmickými funkcemi	41



4	Limity s racionální hodnotou	43
5	Závěr	44

Příspěvek 5 **45****Mřížové body na kružnici** (Riemel T.)

1	Úvod	45
2	Gaussova celá čísla	46
3	Závěr	51

Příspěvek 6 **53****Řešitelnost soustav lineárních rovnic a jiné aplikace projektivního rozšíření reálného aritmetického afinního prostoru** (Jahoda P., Jahodová M.)

1	Úvod	53
2	Projektivní rozšíření aritmetického afinního prostoru	53
3	Soustavy lineárních rovnic	55
3.1	Nadrovina v projektivním rozšíření aritmetického afinního prostoru	56
3.2	Řešitelnost soustav lineárních rovnic	57
3.3	Příklady řešení soustav lineárních rovnic	58
4	Využití při hledání asymptot	60
5	Využití v počítačové grafice	61
6	Závěr	63

Příspěvek 7 **65****Fraktály a GeoGebra** (Volná J., Volný P.)

1	Úvod	65
2	Konstrukce fraktálu 1 – Sierpiňského trojúhelník	66
2.1	Vytvoření fraktálu pomocí klikání	66
2.2	Tvorba fraktálu pomocí nových nástrojů	67
2.3	Jiný pohled na fraktál Sierpiňského trojúhelník	70
3	Konstrukce fraktálu 2 – Strom	71
3.1	Nástroje pro tvorbu nových dvou větví	71
3.2	Rychlejší verze tvorby nástroje „Nové větve“	72
3.3	Tvorba nástroje pro automatickou tvorbu následující úrovně fraktálu strom	73
4	Konstrukce fraktálu 3 – Kochova křivka	74
4.1	Kochova křivka pomocí nového nástroje a příkazu <i>Posloupnost</i>	74
4.2	Kochova vložka s využitím příkazu <i>Iterace</i>	76
5	Závěr	77

Příspěvek 8 **79****Zkušenost s Copilot agentem při tvorbě STACK úloh** (Pátíková Z.)

1	Úvod	79
2	Postup řešení	80
2.1	Copilot agent	80



3	Výhody a nevýhody	82
4	Závěr	82

Příspěvek 9 **85**

Grafická interpretace limity funkce pomocí STACK úloh v Moodle (Polášek V., Sedláček L.)

1	Grafická interpretace limity funkce a dalších pojmů pomocí STACK úloh v systému Moodle	85
2	STACK a GeoGebra	86
3	Ukázky úloh	86
3.1	Úloha 1	86
3.2	Úloha 2	90
3.3	Úloha 3	91
3.4	Úloha 4	94
4	Závěr	95

Příspěvek 10 **97**

Výučba matematiky a jej vnímanie študentmi ekonómie a manažmentu (Medvedová P., Hužvár M., Grausová M.)

1	Úvod	97
2	Základy matematiky a Matematika	98
3	Spätná väzba študentov	99
4	Záver	101

Příspěvek 11 **103**

Studijní úspěšnost studentů technické vysoké školy v úvodních matematických předmětech: srovnání dvou generací po deseti letech (Dlouhá D., Pospíšil L.)

1	Úvod	103
2	Předmět studie	104
3	Explorační analýza výsledků	106
4	Závěr	107

Příspěvek 12 **109**

Zpětná vazba na opakovací workshopy v rámci služby podpory výuky matematiky (Rebenda J.)

1	Úvod	109
2	Struktura opakovacích workshopů a dotazníku zpětné vazby	110
2.1	Opakovací workshopy	110
2.2	Dotazník zpětné vazby a sběr dat	110
3	Analýza dat	111
3.1	Kvantitativní analýza	111
3.2	Kvalitativní analýza	113
4	Závěr	116



Příspěvek 13 **119**

Matematické dovednosti a postoje studentů ekonomických oborů při začátku studia (Pulcerová S., Forstová Kuráňová P.)

1	Úvod	119
2	Metodika	120
3	Charakteristika respondentů	120
4	Matematické dovednosti studentů	120
5	Postoje studentů k matematice	121
6	Rozdíly v postojích podle maturity z matematiky a typu střední školy	122
6.1	Rozdíly podle maturity z matematiky	122
6.2	Rozdíly podle typu střední školy	122
7	Závěr	122

Příspěvek 14 **125**

Změna vnímání matematiky u studentů ekonomických oborů během semestrální výuky (Forstová Kuráňová P., Pulcerová S.)

1	Úvod	125
2	Metodika	126
3	Výsledky	126
3.1	Změna postojů studentů k matematice během semestru	126
3.2	Hodnocení kurzu studenty	127
3.3	Využívané formy podpory při studiu matematiky	128
4	Diskuse	129
5	Závěr	130

Příspěvek 15 **131**

Vývoj počtu studentů na technických vysokých školách v ČR (Moškořová V., Pospíšil L., Dlouhá D.)

1	Úvod	131
2	Metodika	132
3	Výsledky	132
4	Závěr	136



Navrhování tras obslužných vozidel s využitím sekundární dekompozice

Petr Kozel 

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Předložený příspěvek je věnován Route First-Cluster Second přístupu, resp. jeho dekompoziční části, která pro tuto sekundární dekompozici využívá matematický model z oblasti celočíselného lineárního programování. Prezentovaný přístup byl testován na množině benchmarkových i reálných úloh z oblasti svozu komunálního odpadu v konkrétních obcích Moravskoslezského kraje.

Klíčová slova Trasovací úlohy, lineární programování, route first-cluster second, VRP, TSP.


1 Úvod

Navrhování tras vozidel zabezpečujících obsluhu dopravní sítě je frekventovanou úlohou, která je opakovaně řešena v mnoha aplikacích dopravní logistiky. S ohledem na efektivní fungování konkrétního systému je proto žádoucí využívat pro tyto návrhy vhodné kvantitativní nástroje pro podporu rozhodování, umožňující optimalizovat vybrané optimalizační kritérium, například celkovou délku trasy. Realizace návrhu tras obslužných vozidel v podmínkách praxe je komplexním problémem zahrnujícím celou škálu reálných omezení. Může se jednat o omezení týkající se typu dopravní sítě, charakteru dopravního parku, času obsluhy zákazníků a dalších, viz třeba [3].

S charakterem dopravního parku a velikostmi požadavků jednotlivých zákazníků je pak bezprostředně spojeno rozhodnutí o tom, zda pro obslužení těchto požadavků postačí plánovat jednu trasu obslužného vozidla, resp. zda je potřeba navrhnout množinu tras. Je-li kapacita obslužného vozidla Q větší nebo rovna součtu požadavků b_j zákazníků $j \in J$, kde J je množina zákazníků, tedy

$$\sum_{j \in J} b_j \leq Q, \quad (1)$$

pak je předmětem návrhu jedna trasa obslužného vozidla. K návrhu této trasy je pak možné využít některý z množiny vhodných heuristických či exaktních přístupů pro vyhledání tzv. *minimálního Hamiltonova cyklu*. Přehled základních přístupů uvádí například [5]. Za předpokladu, že je předmětem návrhu množina tras, je opět nutné vybrat některý z vhodných přístupů, jejichž kategorizace je uvedena například v [1]. Mezi základní dvě kategorie přístupů pak patří *Cluster First-Route Second*, resp. *Route First-Cluster Second*, které se odlišují pořadím, v němž jsou identifikovány podmnožiny

 Korespondenční autor (petr.kozel@vsb.cz).

zákazníků, které jsou obsluhovány v rámci jedné dílčí trasy. Zatímco v rámci Cluster First-Route Second přístupu jsou nejdříve vytvořeny shluky zákazníků, pro které je následně navrhována množina tras, resp. okružních jízd, v rámci Route First-Cluster Second je primárně vyhledána jedna celistvá trasa, která je teprve sekundárně dekomponována na jednotlivé okružní jízdy. Předložený příspěvek je věnován Route First-Cluster Second přístupu, resp. jeho dekompoziční části, která pro tuto sekundární dekompozici využívá matematický model z oblasti celočíselného lineárního programování. Tento model ve svém článku představili Bouzid, Haddadene, Salhi [2]. Prezentovaný přístup byl testován na množině benchmarkových i reálných úloh z oblasti svozu komunálního odpadu ve vybraných obcích Moravskoslezského kraje. Dosažené výsledky jsou předloženy a shrnuty v sekci 3.

2 Formulace problému

K dispozici je náhradní dopravní síť, která je modelována úplným neorientovaným hranově ohodnoceným grafem $G = (V, H, d)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$ je množina vrcholů, H je množina hran a ohodnocení hran d_{ij} odpovídá vzdálenosti mezi vrcholy $i, j \in V$. V prvním vrcholu grafu se nachází depo, ze kterého vyjíždí a zpět se navrácí obslužné vozidlo s kapacitou Q . Ve vrcholech $j = 2, \dots, n$ jsou situováni zákazníci s jednotkovými požadavky b_j , kde předpokládáme $b_j \leq Q$. Zároveň je k dispozici posloupnost vrcholů odpovídající jedné celistvé trase vyhledané v rámci prvního kroku Route First-Cluster Second přístupu. Tato posloupnost, resp. permutace vrcholů $\pi = (\pi_2, \dots, \pi_n)$, obsahuje právě jednou každý vrchol $j = 2, \dots, n$ a má délku $C(\pi)$. Cílem je navrhnout p tras obslužných vozidel (okružních jízd) T_1, \dots, T_p , kde

$$p = \left\lceil \frac{1}{Q} \sum_{j=2}^n b_j \right\rceil, \quad (2)$$

a to tak, aby platilo, že součet požadavků zákazníků zařazených do jednotlivých tras T_k nepřekročí kapacitu obslužného vozidla, tedy

$$\sum_{j \in T_k} b_j \leq Q, \quad k = 1, \dots, p. \quad (3)$$

K řešení předloženého problému je možné využít matematický model popsany rovnicemi (4)–(11), který je představen v článku [2] se zapracováním kapacitního omezení v podobě dolní hranice K a horní hranice L počtu navštívených vrcholů, resp. počtu obslužených zákazníků, viz [4].

2.1 Matematický model

Matematický model navržený ve [2], [4], který je mírně upraven pro implementaci ve výpočetním prostředí Xpress-IVE, má tvar

$$\min \sum_{j=1}^n w_j \cdot y_j \quad (4)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n y_j = p, \quad (5)$$

$$\sum_{i=j+1}^{j+K-1} z_i \leq (K-1) \cdot (1-y_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\sum_{i=j+K}^{j+L} z_i \geq y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$z_j = y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$z_{n+j} = y_j, \quad j = 1, \dots, L, \quad (9)$$

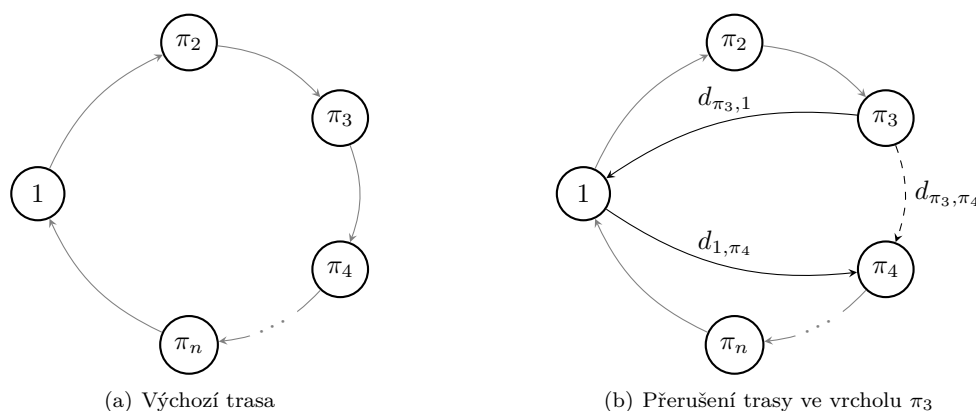
$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n + L, \quad (10)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Účelová funkce $\delta = \sum_{j=1}^n w_j \cdot y_j$ představuje celkovou délku dodatečně vložených úseků, které umožňují rozdělit výchozí celistvou trasu na p okružních jízd. Konstanta w_j je dána vztahem

$$w_j = \begin{cases} d_{\pi_j, 1} + d_{1, \pi_{j+1}} - d_{\pi_j, \pi_{j+1}}, & j = 1, \dots, n-1, \\ 0, & j = n, \end{cases} \quad (12)$$

a vyjadřuje penalizaci, o kterou vzroste délka celistvé trasy $C(\pi)$ vyhledané v prvním kroku Route First-Cluster Second přístupu. Rozhodovací proměnné $y_j \in \{0, 1\}$ modelují rozhodnutí o (ne)přerušení výchozí trasy ve vrcholu j . S ohledem na možnost vytvářet podmnožiny tras i „přes“ hranice počátečního a koncového vrcholu jsou vypočteny penalizace i pro tyto vrcholy. Např. výpočet penalizace w_3 , která bude připočtena k délce výchozí trasy po jejím přerušení ve vrcholu π_3 , je schematicky zachycena na Obr. 1.



Obrázek 1 Schematické zachycení výpočtu penalizace

Podmínka (5) zabezpečuje, že výchozí trasa bude rozdělena právě p -krát. Podmínky (6) a (7) dále zajišťují, že počet navštívených vrcholů mezi dvěma po sobě následujícími přerušeními trasy musí být v intervalu $[K, L]$. Při volbě horní a dolní hranice tohoto intervalu je nutné, aby platilo

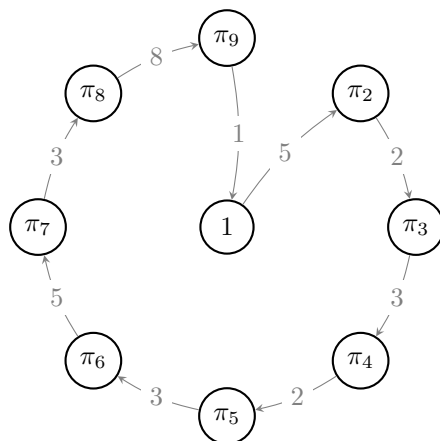
$$p \cdot K \leq n \leq p \cdot L, \quad K, L \in \mathbb{N}, \quad K \geq 2. \quad (13)$$

Podmínky (8) a (9) definují vazbu mezi rozhodovacími a pomocnými proměnnými y_j a z_j . Pomocné proměnné z_j umožňují linearizaci cyklických omezení. Konečně podmínky (10) a (11) jsou obligatorními podmínkami a vymezují definiční obor proměnných.

2.2 Ilustrační úloha

Předpokládejme, že máme k dispozici náhradní dopravní síť (model reálné dopravní sítě), která je reprezentována úplným hranově ohodnoceným grafem $G = (V, H, d)$, kde $V = \{1, \dots, 9\}$ představuje množinu vrcholů, H představuje množinu hran úplného grafu a ohodnocení hran d_{ij} odpovídá vzdálenostem mezi vrcholy v reálné dopravní síti. Předpokládejme, že je dále k dispozici permutace vrcholů $\pi = (\pi_2, \dots, \pi_9)$ odpovídající minimálnímu Hamiltonovu cyklu s délkou $C(\pi) = 32$, který byl vyhledán s využitím

exaktního přístupu v rámci prvního kroku Route First-Cluster Second přístupu. Grafická reprezentace této permutace je v diagramu na Obr. 2, kde ohodnocení hran odpovídá vzdálenostem v relacích minimálního Hamiltonova cyklu. Konečně také předpokládejme, že v prvním vrcholu grafu je k dispozici obslužné vozidlo s kapacitou $Q = 3$ a že ve vrcholech $j = 2, \dots, 9$ jsou situováni zákazníci s jednotkovými požadavky. Cílem je s využitím matematického modelu (4)–(11) dekomponovat výchozí vyhledanou trasu odpovídající výše uvedené permutaci vrcholů do p dílčích tras (okružních jízd) tak, aby celková délka dodatečně vložených úseků byla minimální.



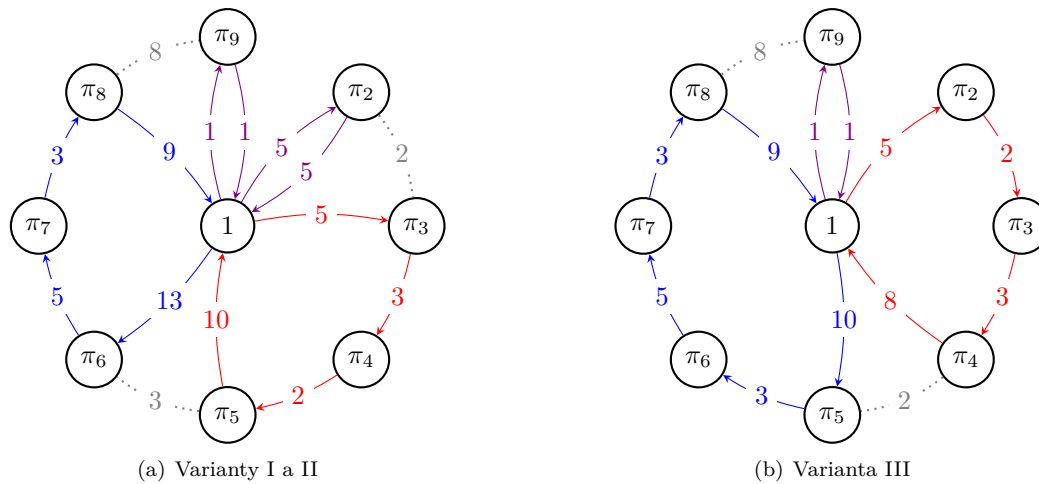
Obrázek 2 Výchozí permutace vrcholů

V prvním kroku řešení je nutné rozhodnout o počtu tras p a o vhodném nastavení hodnot dolní hranice K a horní hranice L , které vymezující minimální a maximální počty navštívených vrcholů v rámci jednotlivých dílčích tras. Počet tras lze stanovit na základě vztahu (2) a pro tuto ilustrační úlohu tedy platí $p = \lceil \frac{8}{3} \rceil$, tj. $p = 3$. Z výše uvedeného plyne, že pro obslužení zákazníků je nutné realizovat minimálně tři obslužné trasy a je zřejmé, že s ohledem na celkový počet požadavků zákazníků nebude některá z obslužných tras zcela vytížena. Je-li tato úloha řešena v reálných podmínkách, je zde určitý prostor pro vymezení odůvodnitelné volnosti dle povahy řešeného problému. Budeme-li předpokládat, že kapacita obslužného vozidla $Q = 3$ je nepřekročitelná, můžeme nastavit horní hranici na $L = 3$ a dolní hranici ponechat na minimální hodnotě $K = 2$. Je-li to z praktického hlediska možné, například v oblasti svozu komunálního odpadu, kdy je sesbíraný odpad průběžně stlačován, můžeme dolní hranici nastavit na $K = 3$ a horní hranici úměrným způsobem navýšit, např. na $L = 4$. Konečně můžeme od kapacity obslužného vozidla vhodným a obhajitelným způsobem odvodit akceptovatelnou dolní a horní mez. V našem případě to mohou být hodnoty $K = 2$ a $L = 4$. Ve všech případech musí být zabezpečeno splnění podmínky (13). Dosažená řešení realizovaná v rámci této ilustrační úlohy jsou shrnuta v Tab. 1 a graficky reprezentována v diagramech na Obr. 3.

Tabulka 1 Parametry a shrnutí dosažených výsledků ilustrační úlohy

varianta	K	L	$C(\pi) + \delta$
I	2	3	32 + 30
II	3	4	32 + 30
III	2	4	32 + 18

V Tab. 1 jsou uvedena dosažená řešení pro varianty I, II a III, které se liší nastavením intervalů $[K, L]$. V tabulce jsou dále shrnuty hodnoty účelových funkcí, odpovídající minimálním celkovým délkám doplňkových úseků δ , které musí být v důsledku tvorby dílčích tras připočteny k ohodnocení minimálního Hamiltonova cyklu $C(\pi)$. Dosažená řešení v jednotlivých variantách jsou graficky vyznačena v diagramech na Obr. 3. Jednotlivé dílčí trasy jsou od sebe barevně odlišeny. Ohodnocení hran opět odpovídá



Obrázek 3 Grafická reprezentace dosažených řešení ilustrační úlohy

vzdálenostem v relacích minimálního Hamiltonova cyklu. Hrany vyznačené tečkovanou čarou odpovídají hranám, které byly z výchozího minimálního Hamiltonova cyklu vyřazeny. Posloupnosti vrcholů v jednotlivých dílčích trasách jsou pak uvedeny v Tab. 2.

Tabulka 2 Posloupnosti vrcholů v dílčích trasách

varianta	trasa T_1	trasa T_2	trasa T_3
I, II	$1 \rightarrow \pi_3 \rightarrow \pi_4 \rightarrow \pi_5 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow \pi_6 \rightarrow \pi_7 \rightarrow \pi_8 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow \pi_9 \rightarrow 1 \rightarrow \pi_2 \rightarrow 1$
III	$1 \rightarrow \pi_2 \rightarrow \pi_3 \rightarrow \pi_4 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow \pi_5 \rightarrow \pi_6 \rightarrow \pi_7 \rightarrow \pi_8 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow \pi_9 \rightarrow 1$

Jak je vidět v Tab. 1 a Tab. 2, řešení odpovídající variantám I a II jsou shodná. Vzhledem ke skutečnosti, že matematický model (4)–(11) umožňuje při tvorbě dílčích tras přechod přes hranici počátečního vrcholu, může se stát, že i tento vrchol je započten jako navštívený vrchol. Situaci je možné vidět u obou třetích tras T_3 . U varianty I a II končí druhá trasa T_2 ve vrcholu π_8 , po jehož obslužení se vozidlo navrácí do depa ve vrcholu 1. Z depa pak vozidlo opět najíždí k obslužení vrcholu π_9 a pokračuje v cestě. Dalším navštíveným vrcholem trasy T_3 je vrchol 1, po kterém následuje vrchol π_2 . Teprve po jeho obslužení se obslužné vozidlo navrácí zpátky do depa ve vrcholu 1. Třetí trasa, čítající tři navštívené vrcholy, je tedy uzavřena přes hranici počátečního vrcholu. Striktně vzato, toto započtení počátečního vrcholu reálně sníží počet obslužených zákazníků o jednoho, nicméně z hlediska reálného použití je tato skutečnost naprosto zanedbatelná. Zcela obdobná situace nastala i u varianty III, kde se po obslužení posledního vrcholu druhé trasy T_2 obslužné vozidlo opět navrácí do depa ve vrcholu 1, ze kterého následně najíždí zpátky na trasu, aby obsloužilo zbývající doposud nenavštívené vrcholy π_9 a vrchol 1. Teprve pak se obslužné vozidlo zpátky „navrací“ do depa. Vrchol 1 zde figuruje jak v roli depa, tak v roli vrcholu, který je nutné navštívit.

3 Numerické experimenty

Prezentovaný přístup využívající sekundární dekompozici s využitím matematického modelu (4)–(11) byl otestován na množině 11 benchmarkových úloh (B1–B11) pro řešení úlohy obchodního cestujícího, viz [6], a na množině 4 reálných úloh (R1–R4) z oblasti svozu komunálního odpadu v konkrétních obcích Moravskoslezského kraje. První krok Route First-Cluster Second přístupu byl pro každou z těchto

úloh vyřešen s využitím heuristické metody, na základě které byla získána výchozí permutace vrcholů $\pi = (\pi_2, \dots, \pi_n)$. Dále byl pro každou z úloh zvolen parametr Q týkající se kapacity obslužného vozidla a dopočten uvažovaný počet obslužných tras p . Dolní a horní hranice počtu navštívených vrcholů byly odvozeny z kapacity obslužného vozidla Q , která byla snížena a zvýšena o 10 %, tedy

$$K = 0,9 \cdot Q,$$

$$L = 1,1 \cdot Q.$$

Parametry úloh B1–B11 jsou shrnuty v Tab. 3, parametry úloh R1–R4 jsou pak shrnuty v Tab. 4. V obou těchto tabulkách jsou rovněž uvedeny dosažené výsledky řešení. Pro každou úlohu je k dispozici

Tabulka 3 Parametry dosažených výsledků numerických experimentů úloh B1–B11

úloha	n	Q	p	K	L	čas	počty vrcholů v dílčích trasách
B1	101	20	5	18	22	0,1	19/22/22/18/20
B2	198	40	5	36	44	0,1	36/40/37/44/41
B3	264	40	7	36	44	0,1	36/36/36/39/36/38/43
B4	318	70	5	63	77	0,1	63/63/65/63/64
B5	417	70	6	63	77	0,5	63/64/72/77/77/64
B6	442	80	6	72	88	0,1	72/72/80/72/74/72
B7	575	90	7	81	99	0,3	84/81/85/81/81/82/81
B8	724	130	6	117	143	0,3	117/117/117/131/125/117
B9	1291	140	10	126	154	0,9	126/126/126/129/126/126/127/134/132/139
B10	1400	150	10	135	165	6	151/136/142/138/136/135/140/143/135/144
B11	5915	600	10	540	660	600	540/544/567/542/647/660/660/553/660/542

informace o počtech vrcholů, resp. o počtech obslužených zákazníků přiřazených do jednotlivých dílčích tras, a hodnota výpočetního času v sekundách. Všechny numerické experimenty byly řešeny s využitím optimalizačního softwaru FICO Xpress 9.7 (64bitová verze, vydání 2025). Výpočty byly realizovány na počítači vybaveném procesorem Intel Core i5-10210U (1,60–2,11 GHz) a 8 GB RAM.

Tabulka 4 Parametry dosažených výsledků numerických experimentů úloh R1–R4

úloha	n	Q	p	K	L	čas	počty vrcholů v dílčích trasách
R1	263	140	2	126	154	0,2	137/126
R2	428	150	3	135	165	0,4	137/143/148
R3	458	160	3	144	176	0,4	164/149/145
R4	1114	160	7	144	176	2,6	144/157/162/152/156/170/173

Jak je z Tab. 3 zřejmé, pro úlohy menšího rozsahu (B1–B10) je hodnota výpočetního času zanedbatelná a pohybuje se pod hranicí jedné sekundy nebo v řádu jednotek sekund. Největší úlohou, která byla v rámci výpočetních experimentů řešena, je úloha B11 čítající 5915 vrcholů. Přestože nalezení řešení této úlohy trvalo 600 s, v rámci strategického rozhodování lze tento výpočetní čas považovat za akceptovatelný. V Tab. 4 jsou uvedeny výsledky numerických experimentů, které byly realizovány v podmínkách svozu komunálního odpadu v konkrétních obcích Moravskoslezského kraje. Úlohy R1–R4 odpovídají čtyřem menším podhorským obcím, ve kterých je svoz komunálního odpadu realizován obslužnými vozidly s kapacitou 16–20 m³. Při zohlednění skutečnosti, že objem jedné nádoby činí 0,12 m³, lze kapacity obslužných vozidel Q , přepočítat na počty nádob, které je vozidlo schopno pojmout.

4 Závěr

Předložený příspěvek byl věnován návrhu obslužných tras vozidel s využitím sekundární dekompozice. K této sekundární dekompozici tvořící druhou část Route First-Cluster Second přístupu byl využit matematický model z oblasti celočíselného lineárního programování, který byl představen v [2]. Prezentovaný



přístup byl ilustrován jak na množině benchmarkových, tak na množině reálných úloh z oblasti svozu komunálního odpadu ve vybraných obcích Moravskoslezského kraje. Cílem předloženého příspěvku bylo ověřit použitelnost matematického modelu představeného v [2] v praxi. Závěrem lze konstatovat, že při přijetí výchozích předpokladů i odpovídajících zjednodušení, která jsou podrobně ve výše uvedeném textu popsána, lze předložený přístup využít v praxi.

Reference

- [1] BODIN, Lawrence D., GOLDEN, Bruce L., ASSAD, Arjang A., BALL, Michael O. Routing and scheduling of vehicles and crews: The state of the art. *Computers & Operations Research*. 1983, vol. 10, no. 2, s. 63–211. Special issue.
- [2] BOUZID, Mouaouia Cherif, HADDADENE, Hacene Aït, SALHI, Said. Splitting a Giant Tour using Integer Linear Programming. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2015, vol. 47, s. 245–252. The 3rd International Conference on Variable Neighborhood Search (VNS'14).
- [3] JANÁČEK, Jaroslav. *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, 2006. ISBN 80-8070-586-0.
- [4] KARA, Imdat, BEKTAS, Tolga. Integer linear programming formulations of multiple salesman problems and its variations. *European Journal of Operational Research*. 2006, vol. 174, s. 1449–1458.
- [5] LAPORTE, Gilbert. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*. 1992, vol. 59, no. 2, s. 231–247.
- [6] REINELT, G. *TSPLIB95* [online] [cit. 2026-05-28]. Dostupné z: <https://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/index.html>.



Klasifikace struktur molekulových klastrů pomocí permutačně invariantních metrik

Aleš Vítek 

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Práce se zabývá porovnáváním a klasifikací atomárních konfigurací molekulárních klastrů. Jsou analyzovány dvě jednoduché a výpočetně efektivní reprezentace struktur: (i) seřazené meziatomové vzdálenosti a (ii) spektra vlastních čísel matice vzdáleností. Metody byly testovány na 2304 konfiguracích klastru $(\text{H}_2\text{O})_{12}$ získaných z parallel tempering Monte Carlo simulací v kanonickém souboru při dvanácti teplotách. Pro kvantifikaci podobnosti byla použita zobecněná L^{16} norma, která potlačuje malé numerické odchylky a zvýrazňuje významné strukturální rozdíly. Obě metody vedou v širokém intervalu prahové hodnoty ke shodné klasifikaci struktur do izomerických skupin. Výsledky zároveň ukazují, že klasifikace je robustní i při využití pouze poloh kyslíkových atomů. Navržené přístupy tak představují praktický nástroj pro analýzu rozsáhlých simulačních dat.

Klíčová slova Vodní klastry, klasifikace struktur, matice vzdáleností, permutační invariance.

1 Úvod

Porovnávání a klasifikace atomárních konfigurací představuje fundamentální problém v oblasti počítačové chemie a statistické fyziky, zejména při analýze rozsáhlých dat generovaných metodami typu Monte Carlo nebo molekulové dynamiky. V případě molekulárních klastrů, jako jsou například vodní klastry, dochází k exponenciálnímu nárůstu počtu stabilních i metastabilních izomerů s rostoucí velikostí systému. Tyto struktury se často liší pouze jemnými geometrickými detaily, což klade vysoké nároky na diskriminační schopnost použitých reprezentací.


Formálně lze atomární konfiguraci chápat jako množinu bodů v \mathbb{R}^3 ,

$$X = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\},$$

kde jednotlivé body odpovídají pozicím atomů. Libovolná reprezentace $\Phi(X)$ používaná pro porovnávání struktur by měla splňovat invariantní vlastnosti vůči globálním izometriím a permutacím identických částic:

$$\Phi(X) = \Phi(RX + \mathbf{t}) = \Phi(\pi X),$$

kde R je rotační operátor, \mathbf{t} translace a π permutace indexů. Zatímco invariance vůči rotacím a translacím je relativně snadno dosažitelná, permutační invariance představuje zásadní problém. Jak ukazují nedávne

 Korespondenční autor (ales.vitek@vsb.cz).

práce [3], mnoho běžně používaných reprezentací není úplných, tj. neplatí implikace $\Phi(X_1) = \Phi(X_2) \Rightarrow X_1 \equiv X_2$ až na symetrii. Reprezentace tak může být degenerovaná.

Jedním z nejjednodušších přístupů je reprezentace pomocí množiny všech mezimolekulárních vzdáleností:

$$d_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad i < j,$$

kde d_{ij} je vzdálenost i -tého a j -tého atomu. Seřazením této množiny vzniká vektor $\{d_1, \dots, d_m\}$, který je invariantní vůči permutacím atomů, kde $m = N(N-1)/2$ je počet meziatomových vzdáleností v N -částicovém systému. Tento přístup je výpočetně efektivní a zachycuje globální geometrickou informaci. Nicméně jeho zásadním nedostatkem je ztráta informace o přiřazení vzdáleností ke konkrétním párům atomů. V důsledku toho mohou existovat neizomorfní konfigurace, které sdílejí identickou množinu vzdáleností, což vede k degeneraci reprezentace. Tento problém je úzce spjat s nejednoznačností řešení distance geometry problem.

Alternativní reprezentaci poskytuje matice vzdáleností $M(X)$ definovaná jako

$$M_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Její spektrum vlastních čísel λ_k je invariantní vůči ortogonálním transformacím i permutacím indexů. Použití spektrálních charakteristik tak představuje kompaktní deskriptor struktury. Nicméně, analogicky ke spektrální teorii grafů, spektrum obecně neurčuje matici jednoznačně – existují tzv. kospektrální objekty. Dvě různé konfigurace tak mohou sdílet identické spektrum matice vzdáleností, což opět vede k degeneraci reprezentace.

Obecnější přístup představují metody založené na konstrukci permutačně invariantních metrik mezi strukturami, například ve formě minimalizace přes všechny permutace:

$$d(X, Y) = \min_{\pi} |X - \pi Y|.$$

Takto definovaná vzdálenost vede k dobře definované metrice na prostoru konfigurací, avšak za cenu vysoké výpočetní složitosti. Jak ukazuje práce [1], praktické použití těchto metod je omezeno především faktoriálním růstem počtu permutací.

Z výše uvedeného vyplývá, že volba reprezentace představuje kompromis mezi (i) invariantností vůči symetriím, (ii) úplností a (iii) výpočetní efektivitou. Jak zdůrazňuje [2], žádná jednoduchá reprezentace typicky nesplňuje všechny tyto požadavky současně.

V tomto příspěvku proto systematicky analyzujeme dvě jednoduché reprezentace: (i) seřazené množiny mezimolekulárních vzdáleností a (ii) spektra vlastních čísel matic vzdáleností. Jejich vlastnosti studujeme na konfiguracích klastru $(\text{H}_2\text{O})_{12}$ generovaných Monte Carlo simulacemi při různých teplotách. Abychom eliminovali vliv termálních fluktuací, jsou všechny konfigurace před porovnáním podrobeny lokální optimalizaci. Zaměřujeme se zejména na schopnost metod rozlišovat strukturální typy, výskyt degenerací a jejich praktickou použitelnost pro automatizovanou klasifikaci.

2 Metody a výsledky

Testování navržených metod bylo provedeno na konfiguracích klastru $(\text{H}_2\text{O})_{12}$ získaných z klasických simulací metodou parallel tempering Monte Carlo v kanonickém (NVT) souboru. Celkově bylo analyzováno 2304 konfigurací odpovídajících dvanácti různým teplotám (tedy 192 konfigurací pro každou teplotu), což zajišťuje reprezentativní pokrytí konfiguračního prostoru včetně struktur odpovídajících různým energetickým minimům.

Pro všechny konfigurace byly nejprve vypočteny vzájemné vzdálenosti mezi atomy, které tvoří základ obou uvažovaných reprezentací. Následně byly aplikovány dva přístupy: (i) reprezentace pomocí seřazeného vektoru všech mezimolekulárních vzdáleností a (ii) reprezentace pomocí spektra vlastních čísel matice vzdáleností. V obou případech byly hodnoty seřazeny vzestupně, čímž byla zajištěna invariance vůči permutacím atomů.

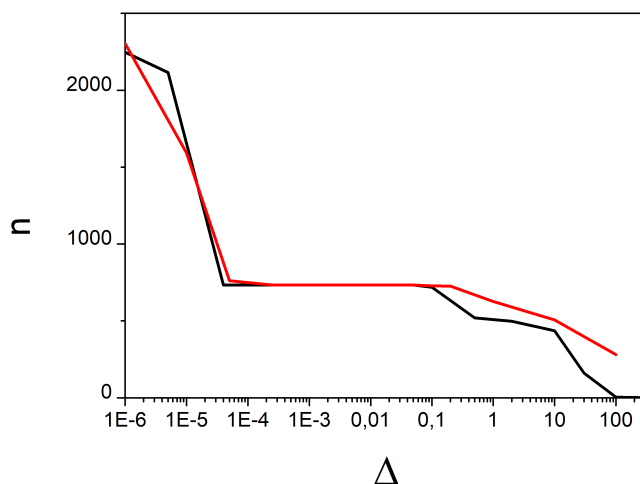
Klasifikace struktur do skupin izomerů probíhala iterativně. První konfigurace byla použita jako referenční reprezentant první skupiny. Pro každou následující konfiguraci byla vypočtena byla použita zobecněná L^{16} norma mezi odpovídajícími reprezentacemi (tj. mezi seřazenými vzdálenostmi nebo vlastními čísly) a reprezentacemi již existujících skupin. Pokud byla tato odchylka menší než zvolená prahová hodnota, byla konfigurace přiřazena do odpovídající skupiny; v opačném případě byla založena nová skupina izomerů. Tento postup byl aplikován postupně na všechny konfigurace, přičemž každá nová struktura byla porovnávána se všemi již existujícími skupinami. Pro přehlednost lze algoritmus shrnout následovně:

- generování konfigurací pomocí parallel tempering Monte Carlo v NVT souboru,
- výpočet všech mezimolekulárních vzdáleností pro každou konfiguraci,
- konstrukce reprezentace (seřazené vzdálenosti nebo spektrum matice vzdáleností),
- inicializace první skupiny izomerů,
- iterativní přiřazování struktur na základě prahové hodnoty L^{16} normy,
- vytvoření nové skupiny v případě nesplnění kritéria podobnosti.

Dalším krokem bylo nastavení prahu přesnosti, kdy jsou struktury ještě stejné a kdy už odlišné. Struktury sice byly lokálně optimalizovány, ovšem optimalizace proběhla numericky a nemusela být zcela přesná. Když se nastavila příliš vysoká přesnost, každý strukturální izomer byl vyhodnocen jedinečně, když se nastavila přesnost příliš nízká, všechny izomery byly vyhodnoceny jako totožné. Nicméně existoval široký interval přesnosti, kdy byly izomery vyhodnoceny identicky. Porovnávané struktury byly sice lokálně optimalizovány, nicméně nemusely být vždy zcela přesně ve svých lokálních minimech, proto bylo vhodné potlačit malé odchylky ve vzdálenostech a současně zvýraznit odchylky velké. Místo sumy čtverců byla nakonec použita L^{16} norma, tedy suma 16. mocnin odchylek,

$$\Delta_{ij} = \left(\frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N(N-1)/2} \left(d_k^{(i)} - d_k^{(j)} \right)^{16} \right)^{\frac{1}{16}},$$

kde Δ_{ij} je míra podobnosti struktury i a j , a $d_k^{(i)}$ je k -tá uspořádaná vzdálenost dvojice atomů v i -té struktuře. Právě pro 16. mocninu vycházel nejširší interval prahu přesnosti, kdy počet skupin izomerů byl konstantní, viz Obr. 1, kdy metoda roztrídila 2304 konfigurací naprosto stejně do 734 skupin tehdy, pokud bylo zvoleno jakožto kritérium shodnosti izomerů v širokém intervalu $\Delta_{ij} \in [0.00004, 0.05]$.



Obrázek 1 Závislost vypočteného počtu skupin strukturálních izomerů n na kritériu přesnosti Δ , černá křivka odpovídá metodě srovnávání seřazených meziatomových vzdáleností, červená křivka odpovídá srovnávání seřazených vlastních čísel matice vzdáleností mezi atomy.

Pro metodu srovnávání vlastních čísel matice vzdáleností byl použit analogický vzorec

$$\Delta_{ij} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\lambda_k^{(i)} - \lambda_k^{(j)} \right)^{16} \right)^{\frac{1}{16}},$$

kde $\lambda_k^{(i)}$ je k -té seřazené vlastní číslo matice vzdáleností struktury i . Nejen, že obě metody daly stejné výsledky, ale dokonce ke stejným výsledkům dospěly oba porovnávací algoritmy, i když se do zkoumání zahrnuly pouze polohy kyslíků a polohy vodíků se vůbec nebraly v úvahu. Rovnovážné struktury klastrů molekul vody totiž mají takovou vlastnost, že k základnímu skeletu kyslíků existuje vždy mnoho možných orientací vodíků a z nich vzniklých vodíkových vazeb. Nicméně jiná orientace vodíků nakonec přispěje k velmi mírné deformaci kyslíkového skeletu a srovnávací algoritmy byly i na základě těchto drobných odlišností ve struktuře kyslíkového skeletu rozpoznata rozřadit struktury naprosto stejně, jako když do algoritmu vstoupily informace o polohách všech atomů, kyslíků i vodíků. Zároveň předběžné výsledky na větších strukturách, konkrétně na klastru 50 molekul vody ukazují, že i zde existuje široký interval prahu přesnosti, ve kterém oba dva algoritmy dávají zcela shodné výsledky, tedy z dané množiny struktur vyčlení stejný počet skupin izomerů a počty v jednotlivých skupinách dávají rovněž oba dva algoritmy stejně a to bez ohledu na to, zda do algoritmu vstupují pouze polohy kyslíků, či polohy všech atomů.

3 Závěr

Výsledkem numerických simulací atomových či molekulových systémů v různých termodynamických podmínkách jsou mimo jiné ohromné počty souřadnic simulovaných systémů. K pochopení strukturních a fázových změn, vyvolaných např. různou teplotou či tlakem, přispěje znalost, které strukturní izomery mají dominantní výskyt při daných podmínkách. Porovnání konfigurací přímo ze simulace možné není, protože v simulaci se vyskytují více či méně zdeformované rovnovážné struktury vlivem nenulové teploty. Po lokální optimalizaci struktur ale srovnání možné je. Byly testovány dvě metody, porovnávání a následné třídění struktur do tříd podle seřazených meziatomových vzdáleností a podle seřazených vlastních čísel matice vzdáleností. Obě metody dávaly pro široký interval prahu přesnosti naprosto shodné výsledky a lze tedy obě metody považovat za prakticky použitelné.

Reference

- [1] DE, Sandip, BARTÓK, Albert P., CSÁNYI, Gábor, CERIOTTI, Michele. Comparing molecules and solids across structural and alchemical space. *Physical Chemistry Chemical Physics* [online]. 2016, vol. 18, no. 20, s. 13754–13769 [cit. 2026-05-27]. Dostupné z DOI: [10.1039/C6CP00415F](https://doi.org/10.1039/C6CP00415F).
- [2] MUSIL, Félix, VEIT, Max, GOSCINSKI, Alexander, FRAUX, Guillaume, WILLATT, Michael J., STRICKER, Markus, JUNGE, Till, CERIOTTI, Michele. Efficient implementation of atom-density representations. *The Journal of Chemical Physics* [online]. 2021, vol. 154, no. 11 [cit. 2026-05-27]. Dostupné z DOI: [10.1063/5.0044689](https://doi.org/10.1063/5.0044689).
- [3] POZDNYAKOV, Sergey N., WILLATT, Michael J., BARTÓK, Albert P., ORTNER, Christoph, CSÁNYI, Gábor, CERIOTTI, Michele. Incompleteness of Atomic Structure Representations. *Physical Review Letters*. 2020, roč. 125, č. 16. ISSN 1079-7114. Dostupné z DOI: [10.1103/physrevlett.125.166001](https://doi.org/10.1103/physrevlett.125.166001).



Výuka pravděpodobnosti s ohledem na inženýrské aplikace

Jan Jekl  Jiří Jánský

Univerzita obrany
Kounicova 65, 662 10 Brno

Abstrakt Práce pedagoga nespočívá jenom v samotném předání znalostí studentům. Důležitou složkou tohoto procesu je motivovat studenty k tomu, aby chtěli znalosti získat. V tomto textu se věnujeme výuce pravděpodobnosti na Univerzitě obrany. Přinášíme motivační úlohy, které mohou studentům představit praktické využití pravděpodobnosti při analýze spolehlivosti letových systémů. Doufáme, že tyto příklady mohou sloužit jako motivace studentů i na dalších technických vysokých školách.

Klíčová slova Pravděpodobnost, výuka, podmíněná pravděpodobnost, Weibullovo rozdělení.


1 Úvod

Na Fakultě vojenských technologií Univerzity obrany se studenti setkávají s učivem pravděpodobnosti primárně ve třech předmětech. Jedná se o předměty:

- Matematika 3, kterou mají dle aktuální akreditace povinnou studenti vojenských magisterských programů *Vojenská geografie a meteorologie*, *Vojenské technologie – elektrotechnické* a *Vojenské technologie – strojní*,
- Matematika 4, kterou mají dle aktuální akreditace povinnou studenti vojenského magisterského programu *Kybernetická bezpečnost*,
- Matematika C, kterou mají dle aktuální akreditace povinnou civilní studenti bakalářských programů *Geografie a meteorologie pro obranu a bezpečnost*, *Letecké a radiotechnické obranné technologie* a *Technologie pro obranu a bezpečnost – strojní*.

Studenti uvedených programů mají povinnost absolvovat jim příslušný předmět, avšak po obsahové stránce se učivo pravděpodobnosti v jednotlivých předmětech od sebe neliší. Ve všech uvedených předmětech učivo pravděpodobnosti tvoří jenom část daného předmětu a jednotlivé předměty se od sebe vzájemně odlišují právě zbytkem učiva.

Učivo pravděpodobnosti je obsahem látky druhého ročníku, kde v prvním ročníku studenti absolvují základní kurzem matematické analýzy a lineární algebry. V předmětech tak lze očekávat základní znalost diferenciálního a integrálního počtu. Znalost tohoto učiva se pak v učivu pravděpodobnosti využívá. Dále se v pravděpodobnosti běžně využívá znalost kombinatoriky, ta je však obsahem učiva prvního ročníku pouze u oboru *Kybernetická bezpečnost*.

 Korespondenční autor (jan.jek12@unob.cz).

Ve výuce pravděpodobnosti se setkáváme s několika překážkami, z nichž některé uvádíme níže.

1. Slovní zadání – Příklady z pravděpodobnosti nejsou nutně složité na výpočet, ale vyžadují analýzu a pochopení zadaného problému. Z naší dlouholeté zkušenosti víme, že právě s takovými příklady studenti nejvíce zápasí.
2. Nedostatečná časová dotace – Výuce pravděpodobnosti je věnováno jenom 6 devadesátiminutových přednášek a 7 až 8 devadesátiminutových cvičení. S ohledem na množství naplánovaného učiva není na cvičeních dostatek času a je tedy kladen větší důraz na domácí přípravu.
3. Přehnané spoléhání se na intuici – Je známo, že v příkladech z pravděpodobnosti lidská intuice často selhává. Nemusí být však vždy jednoduché vysvětlit, proč intuice nefunguje a kdy ji použít lze a kdy nejde.
4. Nedostatečné znalosti dřívějšího učiva – Ačkoliv v učivu pravděpodobnosti používáme jen základní poznatky i s těmito úlohami někdy studenti zápasí. Jedná se jak o kombinatoriku, kterou někteří studenti viděli naposledy na střední škole, tak i o integrální a diferenciální počet, který by měli studenti znát z prvního ročníku.

Z těchto a dalších důvodů volí někteří studenti cestu nejmenšího odporu, tj. zaměří se na zbytek učiva daného předmětu a učivo pravděpodobnosti studenti takzvaně ignorují. Abychom se tomuto problému vyvarovali, tak jsme se pokusili ve výuce pravděpodobnosti zavést motivační příklady s ukázkou praktického využití používaných pojmů. Tyto příklady jsou studentům dostupné ve výuce (pokud to časové možnosti dovolují) a následně plánujeme tyto a další příklady zahrnout do připravované elektronického studijního textu. V následujícím textu přinášíme dva motivační příklady, které pracují s pravděpodobností na pozadí analýzy spolehlivosti letových systémů.

2 Teoretický základ pojmů z pravděpodobnosti

V této části čtenáři připomínáme základní a obecně známé poznatky z pravděpodobnosti, které jsme převzali primárně z textů [1], [2], [3] a [4]. Jedná se však primárně o stručné shrnutí a předpokládáme, že čtenář je s těmito pojmy obeznámen.

Distributivní zákon pro množinové operace Necht A, B, C jsou jevy, potom platí

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \quad (1)$$

Sjednocení jevů Necht A, B jsou jevy, potom platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (2)$$

Disjunktní jevy Necht jevy A, B jsou jevy splňující $A \cap B = \emptyset$. Potom platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (3)$$

Vzájemná nezávislost Řekneme, že jevy A, B jsou nezávislé, pokud platí $P(A|B) = P(A)$ nebo $P(B) = 0$. Navíc víme, že jevy A, B jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$



Vzájemná nezávislost Jevy A_1, \dots, A_k jsou vzájemně nezávislé právě tehdy, když libovolná kombinace jevů A_{k_1}, \dots, A_{k_n} splňuje

$$P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_n}) = P(A_{k_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{k_n}).$$

Sjednocení vzájemně nezávislých jevů Nechtě jevy A, B, C jsou vzájemně nezávislé. Potom jsou také jevy $A \cup B$ a C vzájemně nezávislé a platí

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C).$$

Důkaz. Stačí ukázat, že platí vztah

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C).$$

Přitom díky (2) a ze vzájemné nezávislosti jevů A, B, C víme, že platí

$$\begin{aligned} P(A \cup B) \cdot P(C) &= (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \cdot P(C) \\ &= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \end{aligned}$$

Díky distributivnímu zákonu (1) a ze vztahu (2) dostaneme

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že $A \cap C \cap B \cap C = A \cap B \cap C$ a ze vzájemné nezávislosti jevů A, B, C již platí

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Takto jsme zjistili, že

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ &= P(A \cup B) \cdot P(C). \end{aligned} \quad \square$$

Vzorec úplné pravděpodobnosti Jsou-li H_i jevy po dvou vzájemně disjunktní a platí-li $\bigcup_i H_i = \Omega$, potom

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i). \quad (4)$$

Distribuční funkce Weibullova rozdělení Nechtě X je náhodná veličina řídicí se Weibullovým rozdělením, potom pro její distribuční funkci $F(x)$ platí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

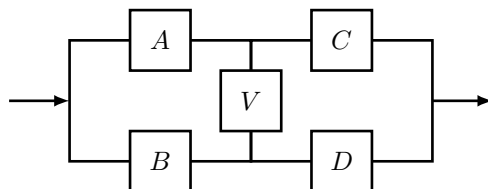
kde α a β jsou kladné parametry.

3 Operace s jevy, úplná pravděpodobnost

Nejprve se zaměříme na příklad, který byl inspirován příkladem ve skriptech [7]. Jedná se o příklad, který lze řešit více způsoby. Příklad spadá do analýzy kritičnosti systému a jeho pochopení ukazují studentům dopady změn v systému propojeném různými vazbami.

Příklad 3.1. Letoun má dvě nádrže paliva s čerpadly a dva motory. Z nádrží se může palivo čerpat jen ven, dovnitř proudit nemůže kvůli zpětnému ventilu. Přecherpávání z nádrží funguje ve dvou režimech.

- Pokud čerpadla v nádržích A , B fungují, tak se jedná o běžný provoz. Při něm se z nádrže A palivo čerpá přímo do motoru C a palivo z nádrže B se čerpá přímo do motoru D . Ventil V umožňující volné proudění paliva mezi nádržemi a motory je zavřený. Přesněji, funkčnost systému na něm nezávisí, protože buď je nefunkční a tedy zavřený, nebo je funkční a zavřený.
- V případě poruchy čerpadla v některé z nádrží, se ventil V otevře a lze přes něj z nádrže A nebo B zásobovat oba motory. Celý systém je schematicky znázorněn na Obrázku 1.



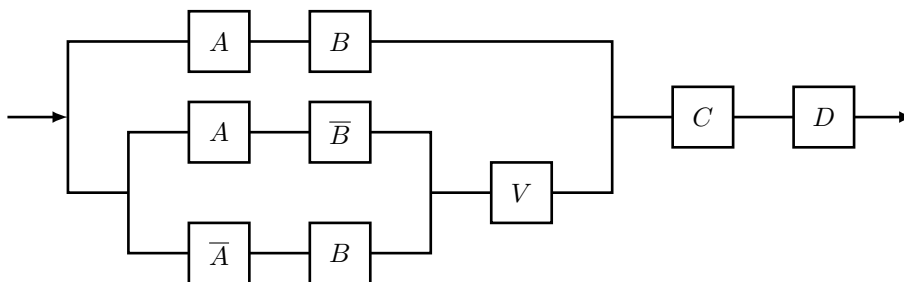
Obrázek 1 Blokový diagram zapojení nádrží A, B , motorů C, D a ventilu V .

Poruchy jednotlivých prvků A, B, C, D, V jsou vzájemně nezávislé. Porucha prvků A, B se projeví ztrátou schopnosti dodávat palivo. Porucha prvků C, D se projeví vypnutím motoru. Porucha ventilu V se projeví tak, že je pořád zavřený. Pravděpodobnost bezporuchovosti je u všech prvků systému stejná, a sice $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(V) = p$. Systém je v použitelném stavu, pokud fungují oba motory.

- Odvoďte vztah pro výpočet pravděpodobnosti použitelného stavu systému pomocí základních úprav jevů a vykreslete graf této pravděpodobnosti v závislosti na p .
- Diskutujte, jak se pravděpodobnost změní, kdyby byl systém v použitelném stavu i pokud by fungoval pouze jeden z motorů.
- Odvoďte vztah pro výpočet pravděpodobnosti použitelného stavu systému pomocí úplné pravděpodobnosti.

Řešení.

- Nejprve rozebereme řešení pouze pomocí analýzy systému a pomocí základních úprav jevů. Uvažujme jevy A, B, C, D, V : dané prvky jsou v bezporuchovém stavu a schematicky nakreslíme blokový diagram použitelnosti systému, viz Obrázek 2.



Obrázek 2 Blokový diagram použitelnosti systému reprezentuje 3 alternativní případy, kdy je systém v bezporuchovém stavu. 1) Obě čerpadla i oba motory fungují. 2) a 3) Jedno čerpadlo funguje a druhé nefunguje a zároveň funguje ventil.

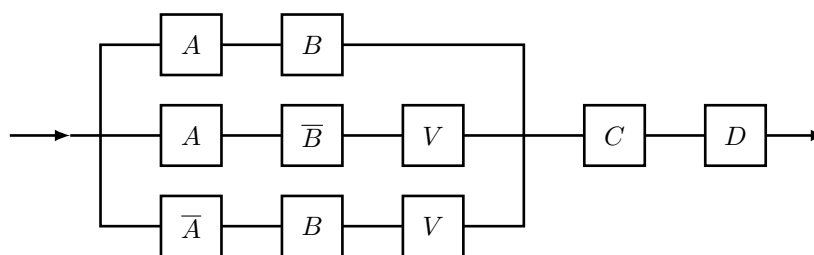
Z Obrázku 2 je patrné, že pravděpodobnost jevu S , že bude systém použitelný, lze vyjádřit takto

$$P(S) = P\left(\left((A \cap B) \cup \left(\left((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right) \cap V\right)\right) \cap C \cap D\right).$$

Uvedenou kombinaci jevů můžeme upravit pomocí distributivního zákona (1) a dostaneme

$$P(S) = P\left(\left((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B} \cap V) \cup (\bar{A} \cap B \cap V)\right) \cap C \cap D\right). \quad (5)$$

Vztah (5) přitom získáme i pomocí analýzy blokového diagramu 2. Stačí si uvědomit, že tento diagram je ekvivalentní blokovému diagramu 3. Z tohoto diagramu již lze vztah (5) snadno odvodit.



Obrázek 3 Blokový diagram použitelnosti systému upravený pro snazší výpočet.

Dle zadání jsou jevy A, B, C, D, V vzájemně nezávislé. Proto víme, že libovolná kombinace jejich průniků tvoří vzájemně nezávislý systém jevů, tj. platí že také jevy $(A \cap B)$, $(A \cap \bar{B} \cap V)$, $(\bar{A} \cap B \cap V)$, C, D jsou vzájemně nezávislé. Díky vztahu (2) tak získáme

$$P(S) = \left((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B} \cap V) \cup (\bar{A} \cap B \cap V)\right) \cdot P(C) \cdot P(D).$$

Je zřejmé, že jevy A a \bar{A} jsou vzájemně disjunktní stejně jako jevy B a \bar{B} . Proto musejí být i průniky $(A \cap B)$ a $(\bar{A} \cap B \cap V)$ vzájemně disjunktní, protože obsahují dvojici A a \bar{A} . Ze stejného důvodu jsou i dvojice $(A \cap B)$, $(A \cap \bar{B} \cap V)$ a $(\bar{A} \cap B \cap V)$, $(A \cap \bar{B} \cap V)$ obě vzájemně disjunktní. Proto můžeme počítat pomocí (3). Máme tedy

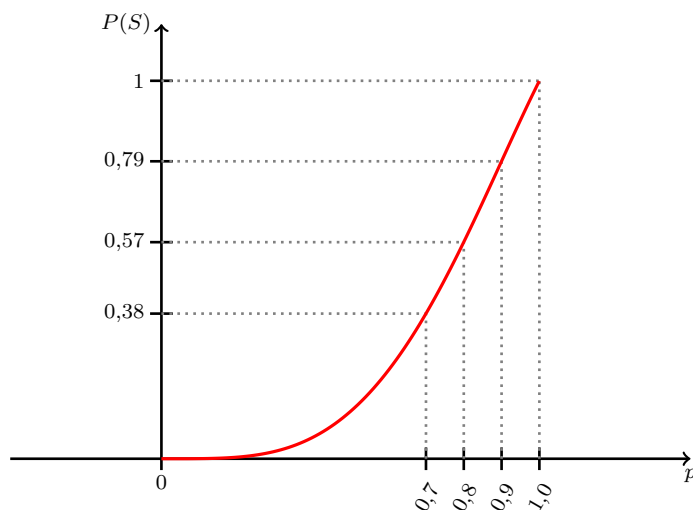
$$P(S) = (P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B} \cap V) + P(\bar{A} \cap B \cap V)) \cdot P(C) \cdot P(D).$$

Nakonec již znovu aplikujeme vzájemnou nezávislost jevů A, B, C, D, V , abychom dostali

$$\begin{aligned} P(S) &= (P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(V) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(V)) \cdot P(C) \cdot P(D) \\ &= (p^2 + p^2 \cdot (1 - p) + p^2 \cdot (1 - p)) \cdot p^2 \\ &= 3p^4 - 2p^5. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost jevu S , že je systém v použitelném stavu je $3p^4 - 2p^5$. Graf pravděpodobnosti $P(S)$ v závislosti na p je vykreslen na Obrázku 4.

Vidíme, že pro malé p , tj $p < 0,2$ je pravděpodobnost $P(S)$ použitelnosti systému prakticky nulová. Strmý růst funkce způsobuje, že pro $p \approx 0,7$ je $P(S) \approx 0,38$, pro $p \approx 0,8$ je $P(S) \approx 0,57$ a až pro $p \approx 0,9$ je $P(S) \approx 0,79$. Dostali jsme, že i malé snížení p má velký dopad na pravděpodobnost použitelnosti systému $P(S)$. To znamená, že snížení spolehlivosti jednotlivých součástí má velký vliv na použitelnost systému.



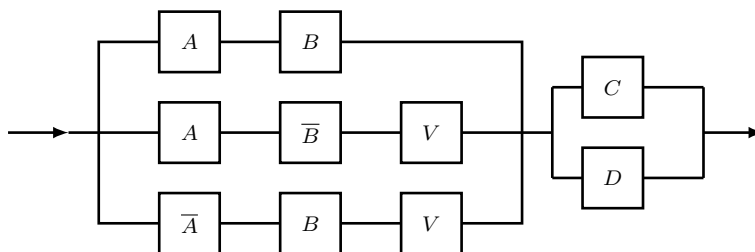
Obrázek 4 Graf pravděpodobnosti $P(S)$ v závislosti na p .

- b) Uvažujme nyní, jak se výpočet změní, pokud by byl systém v použitelném stavu, i kdyby byl funkční jenom jeden motor.

Analýzou upraveného diagramu na Obrázku 5 zjistíme, že pravděpodobnost jevu S se změní následujícím způsobem

$$P(S) = P\left(\left(\left(A \cap B\right) \cup \left(\left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(\bar{A} \cap B\right)\right) \cap V\right)\right) \cap (C \cup D).$$

Přitom lze postupovat stejně jako v části a), abychom dostali



Obrázek 5 Blokový diagram použitelnosti systému upravený pro snazší výpočet.

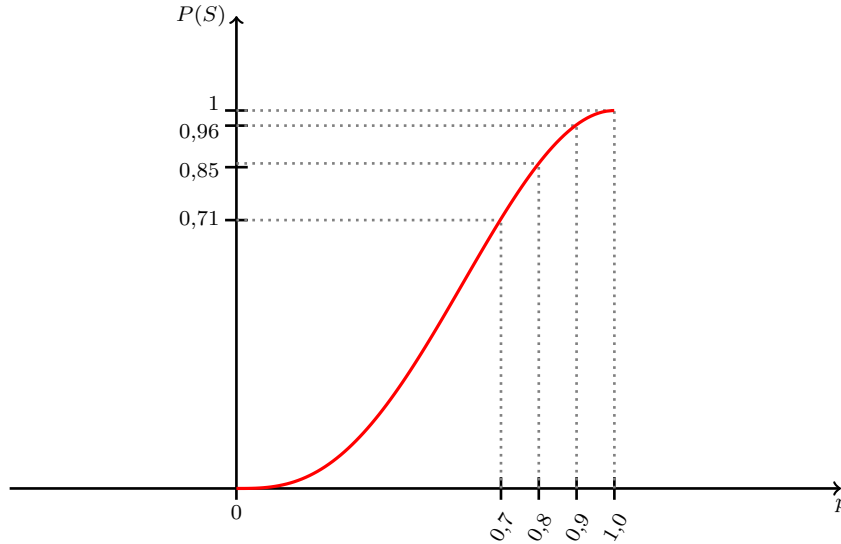
$$P(S) = (P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(V) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(V)) \cdot P(C \cup D).$$

Dále opětovnou aplikací vztahu (2) dostaneme

$$\begin{aligned} P(S) &= (P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(V) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(V)) \times \\ &\quad \times (P(C) + P(D) - P(C \cap D)) \\ &= (p^2 + p^2(1-p) + p^2(1-p)) \cdot (2p - p^2) \\ &= p^3 \cdot (3 - 2p) \cdot (2 - p). \end{aligned}$$

Graf pravděpodobnosti $P(S)$ v závislosti na p je vykreslen na Obrázku 6. Tentokrát je graf $P(S)$ lineárnější a funkce neroste tak strmě jako u grafu 4. Konce grafu 6 jsou navíc zploštělé, co

způsobuje, že pro $p \approx 0,7$ je $P(S) \approx 0,7$, pro $p \approx 0,8$ je $P(S) \approx 0,85$ a pro $p \approx 0,9$ je $P(S) \approx 0,97$. Tentokrát naopak vidíme, že pro p blízké 1 je velikost změny $P(S)$ menší než velikost změny p . To znamená, že snížení spolehlivosti jednotlivých součástek nemá tak velký vliv na použitelnosti systému.



Obrázek 6 Graf pravděpodobnosti $P(S)$ v závislosti na p .

- c) Opět předpokládáme, že je systém v použitelném stavu, pokud fungují oba motory C , D zároveň. Pravděpodobnost jevu S , že systém je v použitelném stavu, lze vyjádřit pomocí vzorce úplné pravděpodobnosti (4) takto

$$P(S) = P(S|V) \cdot P(V) + P(S|\bar{V}) \cdot P(\bar{V}). \quad (6)$$

Připomeňme, že symbolem $P(S|V)$ značíme funkčnost systému za předpokladu, že prvek V je funkční a symbolem $P(S|\bar{V})$ značíme funkčnost systému za předpokladu, že prvek V je nefunkční. Pomocí diagramu na Obrázku 2 lze pravděpodobnost $P(S|V)$ vyjádřit jako

$$P(S|V) = P\left(\left((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right) \cap C \cap D\right),$$

kde analogicky jako v části a) vypočteme

$$P(S|V) = 2p^3 - p^4.$$

Předpokládejme dále, že prvek V je porouchaný, tj. nastal jev \bar{V} . Pak je systém použitelný jenom když nádrž A zásobuje motor C a nádrž B zásobuje motor D , tj. tehdy, když jsou všechny prvky A , B , C , D funkční. Proto víme, že platí

$$P(S|\bar{V}) = P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = p^4.$$

Nyní můžeme dosadit $P(S|V)$ a $P(S|\bar{V})$ do vztahu (6) a dostaneme stejně jako v části a):

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|V) \cdot P(V) + P(S|\bar{V}) \cdot P(\bar{V}) \\ &= (2p^3 - p^4) \cdot p + p^4 \cdot (1 - p) \\ &= 3p^4 - 2p^5. \end{aligned} \quad \square$$

4 Weibullovo rozdělení

Modelujeme-li dobu do poruchy zařízení, pak můžeme očekávat, že tato doba se řídí exponenciálním rozdělením. Exponenciální rozdělení však nemá paměť, a proto s ním nedokážeme modelovat například ty poruchy, kde k poruše dochází únavou materiálu. V inženýrských aplikacích má tedy větší význam takzvané Weibullovo rozdělení, které je zobecněním exponenciálního rozdělení.

I následující příklad byl inspirován příkladem ve skriptech [7], který jsme následně upravili. Příklad ukazuje studentům, jak vyžadovaná spolehlivost ovlivňuje dobu užívání stroje.

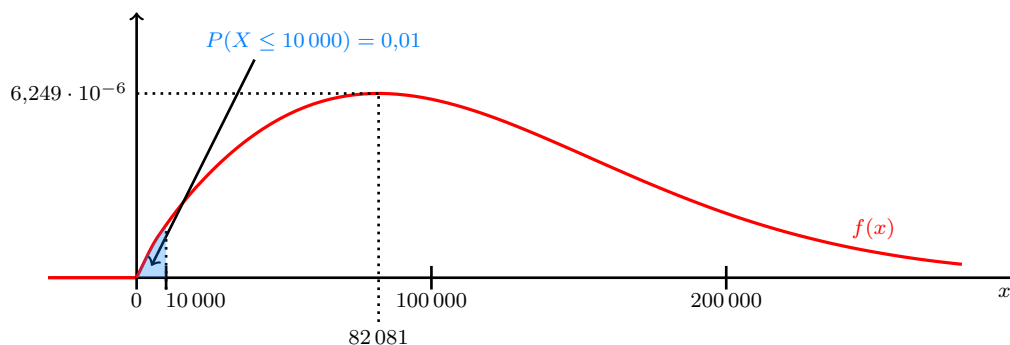
Příklad 4.1. V motoru stíhačky má být použit senzor, u kterého se požaduje, aby pravděpodobnost poruchy senzoru během provozu stíhačky byla maximálně 1 %. Předpokládaná doba provozu stíhačky je 10 000 letových hodin. U senzoru předpokládejte Weibullovo rozdělení doby do poruchy s parametrem $\beta = 1,8$.

- Určete minimální hodnotu parametru α , aby byl požadavek na spolehlivost senzoru splněn.
- Určete maximální dobu provozu T , za kterou pravděpodobnost poruchy senzoru během provozu nepřesáhne 5 %.
- Diskutujte, jak se změní doba T , pokud by byla pravděpodobnost 5 % v bodě b) změněna.

Řešení.

- Uvažujme náhodnou veličinu X : doba do poruchy senzoru. Dle zadání víme, že X se řídí Weibullovým rozdělením $W(\alpha; 1,8)$. Naším cílem je určit hodnotu parametru α , aby pravděpodobnost, že se senzor porouchá během prvních 10 000 hodin byla maximálně 1 %, tj. $P(X < 10^4) \leq 0,01$. Dále víme, že distribuční funkce $F(x)$ Weibullova rozdělení je pro $x \geq 0$ daná jako $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}$ a z definice distribuční funkce také víme, že $F(x) = P(X \leq x)$. Můžeme tedy počítat

$$\begin{aligned} F(10^4) &= 1 - e^{-\left(\frac{10^4}{\alpha}\right)^{1,8}} \leq 0,01 \\ e^{-\left(\frac{10^4}{\alpha}\right)^{1,8}} &\geq 0,99 \\ -\left(\frac{10^4}{\alpha}\right)^{1,8} &\geq \ln 0,99 \\ \frac{10^4}{\alpha} &\leq (-\ln 0,99)^{\frac{1}{1,8}} \\ \alpha &\geq \frac{10^4}{(-\ln 0,99)^{\frac{1}{1,8}}} \approx 128\,795,2. \end{aligned}$$



Obrázek 7 Graf hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ Weibullova rozdělení s parametry $\alpha = 128\,795,2$ a $\beta = 1,8$.

Minimální hodnota parametru α je tedy zhruba 128 795,2. Tuto hodnotu lze nyní použít jako požadovanou minimální normu pro výrobcu.



- b) Chceme určit maximální dobu provozu T , za kterou pravděpodobnost poruchy senzoru během provozu nepřesáhne 5%, tj. hledáme takové T , aby platilo $P(X \leq T) \leq 0,05$. Ze znalosti distribuční funkce Weibullova rozdělení opět můžeme počítat

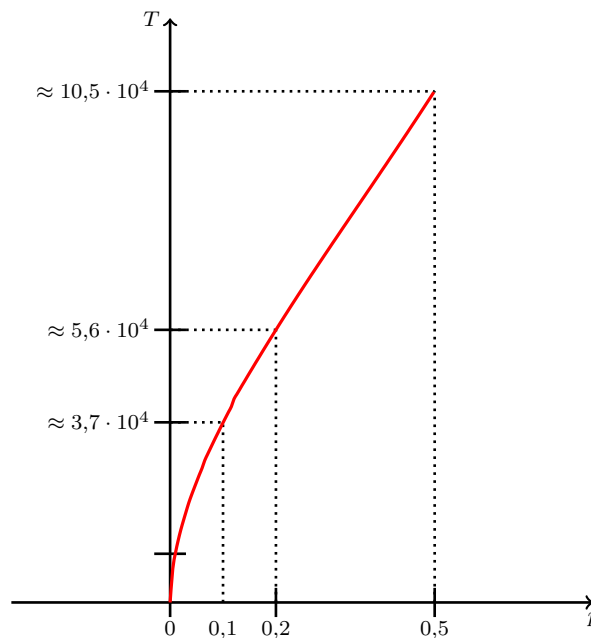
$$\begin{aligned}
 P(X \leq T) &\leq 0,05 \\
 F(T) = 1 - e^{-\left(\frac{T}{128\,795,2}\right)^{1,8}} &\leq 0,05 \\
 e^{-\left(\frac{T}{128\,795,2}\right)^{1,8}} &\geq 0,95 \\
 -\left(\frac{T}{128\,795,2}\right)^{1,8} &\geq \ln 0,95 \\
 \frac{T}{128\,795,2} &\leq (-\ln 0,95)^{\frac{5}{9}} \\
 T &\leq 128\,795,2 (-\ln 0,95)^{\frac{5}{9}} \approx 24\,732,42.
 \end{aligned}$$

Pokud bychom připustili větší pravděpodobnost selhání senzoru a to 5%, pak lze provozovat stíhačku nejvýše 24 732 letových hodin. Je potřeba uvážit kritičnost sledovaného senzoru podobně jako v Příkladě 3.1 a analyzovat celkový dopad této zvýšené pravděpodobnosti na celkovou použitelnost systému obsahujícího senzor.

- c) Pokud bychom uvažovali obecnou maximální pravděpodobnost poruchy senzoru p , která nesmí být překročena, pak maximální doba provozu T se odvodí podobně jako v bodě b) a dostaneme

$$\begin{aligned}
 P(X \leq T) &\leq p \\
 T &\leq 128\,795,2 (-\ln(1 - p))^{\frac{5}{9}}.
 \end{aligned}$$

Tato funkce je vykreslena na Obrázku 8. Vidíme, že hodnota T v závislosti na p prudce roste pro $p = 0,5$ dosahuje T hodnot až 10^5 . □



Obrázek 8 Maximální doba provozu T v závislosti na pravděpodobnosti poruchy p , která nesmí být překročena.

5 Závěr

Studenti s látkou pravděpodobnosti často zápasí a je tedy nezbytné nalézt cestu, jak studenty motivovat ke studiu. Jak již bylo ukázáno v textech [5] a [6], tak motivační příklady mohou být jednou z možných cest k tomuto cíli.

Reference

- [1] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. 3. vyd. Praha: MatfyzPress, 2011. ISBN 978-80-7378-162-0.
- [2] DODSON, Bryan. *The Weibull Analysis Handbook*. 2nd ed. ASQ Quality Press, 2006. ISBN 978-0-87389-667-2.
- [3] KROPÁČ, Jiří. *Úvod do počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 2. vyd. Brno: Vojenská akademie v Brně, 2001. Skriptum; dostupné v knihovně UO pod číslem S-2546.
- [4] LIKEŠ, Jiří, MACHEK, Josef. *Počet pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha: SNTL – Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Matematika pro vysoké školy technické, č. 10.
- [5] RABASOVÁ, Marcela. Zajímavé úlohy z pravděpodobnosti. In: *Sborník z 29. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. Čeladná: VŠB–Technická univerzita Ostrava, 2024. ISBN 978-80-248-4745-0. Dostupné z DOI: [10.31490/9788024847450](https://doi.org/10.31490/9788024847450).
- [6] RABASOVÁ, Marcela. Zajímavé úlohy z pravděpodobnosti II. In: *Sborník z 30. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. Čeladná: VŠB–Technická univerzita Ostrava, 2025. ISBN 978-80-248-4824-2. Dostupné z DOI: [10.31490/9788024848242](https://doi.org/10.31490/9788024848242).
- [7] VINTR, Zdeněk, VALIŠ, David, VINTR, Michal, VINTR, Tomáš. *Sbírka příkladů ze spolehlivosti technických systémů*. Brno: Univerzita obrany, 2022. ISBN 978-80-7582-193-5. Skripta.



Od řešení k zadání: inverzní konstrukce úloh na limity funkcí

Pavel Rucki 

VŠB – Technická univerzita Ostrava,
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Příspěvek se zabývá inverzní konstrukcí úloh na limity funkcí, konkrétně úloh vedoucích k použití l'Hospitalova pravidla. Z požadované hodnoty limity funkce a počtu aplikací tohoto pravidla lze prostřednictvím Taylorova rozvoje elementárních funkcí stanovit tvar zadané funkce určené k řešení. Konstrukce takových úloh se redukuje na řešení soustav lineárních rovnic obsahující koeficienty rozvoje, což umožňuje systematickou tvorbu úloh z pohledu pedagoga. Uvedený postup může sloužit jako inspirace pro zařazení do výuky.

Klíčová slova Limita funkce, l'Hospitalovo pravidlo, Taylorův rozvoj.

1 Úvod

Limita funkce reálné proměnné patří v úvodních kurzech matematiky na vysokých školách k náročnějším tématům vyžadujícím po studentech porozumět pojmu limitního přechodu („blížení se“) a umět rozlišit limitu funkce v daném bodě od příslušné funkční hodnoty.

V průběhu výuky si studenti osvojují různé metody výpočtu limit, mezi něž patří vhodné algebraické úpravy, odhady, použití l'Hospitalova pravidla či využití Taylorova rozvoje elementárních funkcí.


Tento příspěvek nebude pojednávat o limitech ani tak z pohledu studenta (jak limitu vypočítat), jako spíše z pohledu vyučujícího a bude nabízet jednu z možností, jak limitu funkce navrhnout tak, aby měla požadované vlastnosti. Podrobněji se budeme zabývat limity, které studenti řeší l'Hospitalovým pravidlem.

Teoretický základ pro výpočet limit a vlastnosti Taylorových rozvoje vychází z klasické literatury, např. [2], přičemž v tomto příspěvku se zaměříme na jejich inverzní aplikaci.

2 Teoretické předpoklady

V tomto příspěvku se omezíme na vlastní limity funkcí ve vlastním bodě a budeme se soustředit především na limity ve tvaru podílu dvou funkcí,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (1)$$

 Korespondenční autor (pavel.rucki@vsb.cz).

Jedná se o typ úloh, který se ve výuce objevuje velmi často a který je typicky řešen pomocí l'Hospitalova pravidla, které slouží jako prostředek výpočtu limity funkce využívající derivace. Umožňuje počítat limity vedoucí na neurčitý tvar $0/0$, resp. ∞/∞ .

Věta 2.1 (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť dále $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce, pro které platí jedna z možností*

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

existuje-li limita na pravé straně.

Použití tohoto pravidla však není náhodné. Jeho aplikace souvisí s asymptotickým chováním funkcí v okolí bodu x_0 , konkrétně s nulovostí derivací čitatele a jmenovatele v bodě x_0 do určitého řádu. Právě tato skutečnost bude z pohledu konstrukce úloh klíčová.

Z didaktického hlediska tyto úlohy vedou k procvičení a automatizaci derivování elementárních funkcí podle základních pravidel, k porozumění asymptotickému chování funkcí a v neposlední řadě k upevnění schopnosti pracovat s ekvivalentními úpravami výrazů a volit vhodnou strategii řešení. Konstrukce úloh by tedy měla tyto aspekty reflektovat.

Na základě těchto úvah budeme dále uvažovat takovou strategii tvorby úloh, která tyto kompetence zohledňuje.

1. Předpisy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ vystupující v konstruovaných limitách typu (1) vytváříme z elementárních funkcí, jež volíme tak, aby jejich derivace měly srovnatelnou složitost jako funkce původní. Tím se vyhneme zbytečnému komplikování výpočtu derivací vyšších řádů. Nepoužíváme proto funkce, jejichž derivace mají složitější tvar, např. podíly, složené funkce, funkce $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ a další cyklometrické funkce. Uvažujeme naopak funkce typu $\sin x$, $\cos x$, x^n , e^x či $\ln(1+x)$.
2. Aby byly při výpočtu limit implicitně procvičovány základní derivační postupy, uvažujeme vedle součtu a rozdílu funkcí také jejich součin a jednoduché složené funkce. Typicky jde o součin lineární a elementární funkce, např. $(Ax+B)\sin x$, dále o elementární funkce s lineárně škálovaným argumentem, např. e^{-x} , nebo o jejich kombinace, např. $(Dx+E)e^{-x}$. Volba těchto tvarů je záměrná. Úlohy, které takto konstruujeme, jsou přizpůsobeny dovednostem, jež mají být jejich řešením rozvíjeny. Konstanty A, B, C, \dots budeme volit jako celá čísla.
3. Při konstrukci limity (1) nejprve stanovíme její požadovanou hodnotu L a počet aplikací l'Hospitalova pravidla. Omezíme se přitom na (konečné) racionální hodnoty, tj. $L \in \mathbb{Q}$. Budeme uvažovat takové úlohy, při jejichž řešení je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít opakovaně, typicky dvakrát až třikrát.

Ukazuje se, že při dvojnásobném či trojnásobném použití l'Hospitalova pravidla je vhodné uvažovat minimálně čtyři, lépe pět konstant A, B, C, D, E , což zaručí dostatečnou volnost volby jejich konkrétních hodnot, a tedy konkrétního tvaru konstruované limity. Ve speciálních případech lze různými volbami těchto konstant získat různé (na první pohled odlišné) úlohy se stejnou výslednou hodnotou limity.

4. Konstanty A, B, C, D, E určíme z lineárních rovnic, které získáme z koeficientů Taylorova rozvoje funkcí $f(x)$ a $g(x)$ tím, že je položíme rovny 0, resp. L , viz dále. Volnost volby těchto konstant úzce souvisí se skutečností, že soustava lineárních rovnic bude mít vzhledem k vyššímu počtu



neznámých vždy nekonečně mnoho řešení. Vhodnou volbou parametrů získáme konkrétní hodnoty konstant A, B, C, D, E .

Z didaktického pohledu je vhodné klást na tyto konstanty dodatečné požadavky.

- Konstanty by neměly být v absolutní hodnotě příliš velké. Budeme požadovat, aby byly v rozsahu $-10 \leq A, B, C, D, E \leq 10$.
- Měly by být nesoudělné, tj. $\gcd(A, B, C, D, E) = 1$, abychom se v prvním kroku výpočtu limity vyhnuli vytknutí jejich společného dělitele.
- Neměly by vést k takovým výrazům, které by umožnily okamžité krácení v podílu $f(x)/g(x)$, a snížily by tak stanovený počet použití l'Hospitalova pravidla.

V následujících částech volíme konkrétní předpisy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ tak, aby hodnoty limit typu (1) byly celočíselné. Poté z nich lze snadným zobecněním konstruovat limity s racionální hodnotou.

3 Limity s celočíselnou hodnotou

Cílem této kapitoly je navrhnout efektivní postup konstrukce úloh na limity typu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k}, \quad k \in \{2, 3\}, \quad (2)$$

kde k odpovídá počtu požadovaných použití l'Hospitalova pravidla. Podrobněji se budeme zabývat funkcí $f(x)$ ve tvaru kombinace funkcí goniometrických, dále funkcí exponenciálních a v závěru kombinací funkce logaritmické a kvadratické. Ukážeme také, že pro naše účely je v určitých situacích vhodnější změnit limitní přechod na $x \rightarrow 1$, tj. konstruovat úlohy na limity typu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^k}, \quad k \in \{2, 3\}, \quad (3)$$

3.1 Limity s goniometrickými funkcemi

Položme

$$f(x) = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x + Ex - D. \quad (4)$$

Důvod, proč členy goniometrické funkce násobíme lineárními členy, je didaktický. Na jedné straně je student nucen použít dvakrát pravidlo pro derivování součinu

$$\begin{aligned} [(Ax + B) \sin x]' &= A \sin x + (Ax + B) \cos x, \\ [(Cx + D) \cos x]' &= C \cos x - (Cx + D) \sin x, \end{aligned}$$

na druhé straně při výpočtu druhé derivace zůstává pracnost výpočtu stejná (opět dva součiny). Pokud bychom v součinech volili polynomy vyššího stupně, každý derivovaný součin by pak generoval dva nové součiny

$$\begin{aligned} [(a_2x^2 + a_1x + a_0) \sin x]' &= (2a_2x + a_1) \sin x + (a_2x^2 + a_1x + a_0) \cos x, \\ [(b_2x^2 + b_1x + b_0) \cos x]' &= (2b_2x + b_1) \cos x - (b_2x^2 + b_1x + b_0) \sin x, \quad (a_2, b_2 \neq 0), \end{aligned}$$

které by student musel zjednodušit vytknutím, pokud by nechtěl výpočet neúměrně komplikovat.

Lineární člen Ex (při volbě $E \neq 0$) rozšiřuje množinu volitelných konstant A, B, C, D, E , což umožňuje větší různorodost konstruovaných úloh při zachování předem stanovené hodnoty limity L .

Z didaktického hlediska je jeho přítomnost klíčová, znemožňuje totiž studentovi aplikovat větu o limitě součtu a rozdělit výpočet na dvě jednodušší části typu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x - D}{x^k} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ex}{x^k} \quad (k \geq 2).$$

Vzhledem k tomu, že pro $E \neq 0$ je druhá limita nevlastní, aritmetika limit neumožňuje tento rozklad použít. To by bylo možné pouze v případě, kdybychom uvažovali vyšší mocninu (např. Ex^2 , bude-li ve jmenovateli x^2).

Konstanta D v předpisu (4) zajišťuje nulovost čitatele v bodě $x = 0$. Tím je zaručeno, že limita (2) vede na neurčitý výraz $0/0$, což je nezbytný předpoklad pro následné použití l'Hospitalova pravidla.

Uvažujme Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ se středem v bodě $x_0 = 0$, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x + Ex - D = \\ &= (Ax + B) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + (Cx + D) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) + Ex - D \\ &= (B + C + E)x + \left(A - \frac{D}{2} \right) x^2 + \left(-\frac{B}{6} - \frac{C}{2} \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned} \quad (5)$$

pro $x \rightarrow 0$. Nechť $L \in \mathbb{Z}$ je hodnota limity (2), tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x + Ex - D}{x^k} = L, \quad k \in \{2, 3\}. \quad (6)$$

Aby bylo možné limitu vypočítat pomocí k -násobné aplikace l'Hospitalova pravidla, je nutné, aby byly koeficienty Taylorova rozvoje funkce $f(x)$ u mocnin x^i nulové pro všechna $i < k$ a koeficient u x^k byl roven L . Označme symbolem $[x^i]f(x)$ koeficient Taylorova rozvoje funkce $f(x)$ u mocniny x^i .

Dvojnásobné použití l'Hospitalova pravidla

Z výše uvedeného plyne, že

$$\begin{aligned} [x]f(x) = 0 &\quad \Rightarrow \quad B + C + E = 0 \\ [x^2]f(x) = L &\quad \Rightarrow \quad A - \frac{D}{2} = L. \end{aligned}$$

Soustava lineárních rovnic má nekonečně mnoho řešení závislých na volbě tří parametrů:

$$A = t, \quad B = -s - u, \quad C = s, \quad D = -2L + 2t, \quad E = u, \quad t, s, u \in \mathbb{Z}.$$

Poznamenejme, že konstanta D bude vždy sudé číslo. Pro ilustraci uvažujme hodnotu limity $L = -3$. Konkrétní volbou parametrů t, s, u dostáváme následující úlohy.

1. Položíme-li $t = 1, s = 2, u = -5$, získáme konstanty $A = 1, B = 3, C = 2, D = 8, E = -5$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 3) \sin x + (2x + 8) \cos x - 5x - 8}{x^2} = -3.$$

2. Zvolíme-li parametr $s = 0$ (tedy $C = 0$), dojde k eliminaci členu $x \cos x$. Například pro $t = -4$ a $u = 7$ dostáváme koeficienty $A = -4, B = -7, C = 0, D = -2, E = 7$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x + 2 - (4x + 7) \sin x - 2 \cos x}{x^2} = -3.$$

3. Volba $t = -1, s = 0, u = 0$, která generuje konstanty $A = -1, B = 0, C = 0, D = 4, E = 0$, vede k eliminaci lineárních členů Cx a Ex i členu $B \sin x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x - x \sin x - 4}{x^2} = -3.$$



Pro fixní hodnotu limity L je počet úloh, které lze tímto způsobem vytvořit, dán počtem celočíselných pětic (A, B, C, D, E) vyhovujících odvozené soustavě. Pokud budeme požadovat, aby tyto konstanty splňovaly podmínky uvedené na straně 35, tj.

$$-10 \leq A, B, C, D, E \leq 10 \quad \text{a} \quad \gcd(A, B, C, D, E) = 1, \quad (7)$$

dostáváme pro každé L řádově stovky unikátních zadání. Speciálně pro hodnotu limity $L = -3$ existuje přesně 2998 vyhovujících pětic. Tento výsledek potvrzuje, že navržená konstrukce poskytuje prakticky nevycerpatelnou databázi úloh.

Trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla

Využijeme opět Taylorův rozvoj (5), nyní však dostáváme soustavu tří lineárních rovnic o pěti neznámých:

$$\begin{aligned} [x]f(x) = 0 &\Rightarrow B + C + E = 0 \\ [x^2]f(x) = 0 &\Rightarrow A - \frac{D}{2} = 0 \\ [x^3]f(x) = L &\Rightarrow -\frac{B}{6} - \frac{C}{2} = L. \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení závislých tentokrát na dvou parametrech:

$$A = t, \quad B = -6L - 3s, \quad C = s, \quad D = 2t, \quad E = 6L + 2s, \quad t, s \in \mathbb{Z}.$$

Aby byla pětice koeficientů nesoudělná, stačí zvolit parametry t a s tak, aby $\gcd(t, s) = 1$. Vzhledem k vazbám $A = t$ a $C = s$ je pak nesoudělnost všech koeficientů zaručena. Požadujeme nyní, aby $L = 4$. Konkrétní volbou parametrů t a s dostáváme následující úlohy.

1. Položíme-li $t = 2$ a $s = -9$, získáme konstanty $A = 2, B = 3, C = -9, D = 4, E = 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + 3) \sin x - (9x - 4) \cos x + 6x - 4}{x^3} = 4.$$

2. Zvolíme-li $t = 1$ a $s = -8$, dostaneme $A = 1, B = 0, C = -8, D = 2, E = 8$, a člen $B \sin x$ tak v limitě nebude obsažen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - (8x - 2) \cos x + 8x - 2}{x^3} = 4.$$

3. Volíme-li nyní parametry $t = 0$ a $s = -7$, které vytvářejí konstanty $A = 0, B = -3, C = -7, D = 0, E = 10$, získáme úlohu na limitu, jež je následkem chybějících členů $Ax \sin x$ a $D \cos x$ ještě v jednodušším tvaru:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3 \sin x - 7x \cos x}{x^3} = 4.$$

Ve srovnání s případem, kdy jsme požadovali použít l'Hospitalovo pravidlo pouze dvakrát, volíme nyní pouze dva parametry t a s , což snižuje počet pětic A, B, C, D, E splňujících podmínky (7). Pro limitu $L = 4$ získáváme 31 úloh. Volíme-li $L = -3$ jako minule, pak dostáváme 46 úloh.

Všimněme si jedné zvláštnosti. Zaměníme-li v limitě (6) pro $k = 3$ lineární člen Ex za kvadratický Ex^2 , dostaneme prostřednictvím příslušného Taylorova rozvoje soustavu:

$$\begin{aligned} B + C &= 0 \\ A - \frac{D}{2} + E &= 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{B}{6} - \frac{C}{2} = L.$$

První a třetí rovnice tvoří soustavu jednoznačně řešitelnou: $B = 3L$, $C = -3L$. Konstanty B a C jsou tak fixně dány hodnotou limity L a nelze je nijak ovlivnit volbou parametrů řešících rovnici druhou. Možnost generovat rozmanité sady koeficientů A, B, C, D, E je v tomto případě výrazně omezená, což potvrzuje vhodnost původní volby lineárního členu Ex .

3.2 Limity s exponenciálními funkcemi

V této části definujeme funkci f předpisem

$$f(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx + E)e^{-x} - C - E. \quad (8)$$

Nyní v součinech používáme jak kvadratický, tak i lineární člen. Důvodem je skutečnost, že derivace obou součinů obsahuje tutéž exponenciální složku, kterou lze po zderivování vytknout a v postupu efektivně pokračovat:

$$\begin{aligned} [(Ax^2 + Bx + C)e^x]' &= (Ax^2 + (2A + B)x + B + C)e^x, \\ [(Dx + E)e^{-x}]' &= (-Dx + D - E)e^{-x}. \end{aligned}$$

Exponenciály volíme také proto, že jednoduchou úpravou lze limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx + E)e^{-x} - C - E}{x^k} = L, \quad k \in \{2, 3\}, \quad (9)$$

transformovat na tvar obsahující hyperbolické funkce $\sinh x$ a $\cosh x$, což ukážeme v další části. Podobně jako v předchozí části je nulovost funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ zaručena konstantním členem $-C - E$, l'Hospitalovo pravidlo lze tedy použít.

Uvažujme Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ se středem v bodě $x_0 = 0$, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= (Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx + E)e^{-x} - C - E \\ &= (Ax^2 + Bx + C) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + (Dx + E) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - C - E \\ &= (B + C + D - E)x + \left(A + B + \frac{C}{2} - D + \frac{E}{2} \right) x^2 + \left(A + \frac{B}{2} + \frac{C}{6} + \frac{D}{2} - \frac{E}{6} \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned} \quad (10)$$

pro $x \rightarrow 0$. I nyní budeme požadovat, aby pro příslušné koeficienty Taylorova rozvoje platilo $[x^i]f(x) = 0$ pro $i < k$ a $[x^k]f(x) = L$.

Dvojnásobné použití l'Hospitalova pravidla

Z výše uvedeného plyne, že

$$\begin{aligned} [x]f(x) = 0 &\Rightarrow B + C + D - E = 0 \\ [x^2]f(x) = L &\Rightarrow A + B + \frac{C}{2} - D + \frac{E}{2} = L. \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení závislých na volbě tří parametrů $t, s, u \in \mathbb{Z}$:

$$A = t, \quad B = 2L - 2t + 3s - 2u, \quad C = -2L + 2t - 4s + 3u, \quad D = s, \quad E = u. \quad (11)$$

Zvolme hodnotu limity $L = -7$. V tomto případě existuje 1514 pětic A, B, C, D, E splňujících podmínky (7). Pro ilustraci uvádíme tři různé typy úloh.



1. Pro $t = -9$, $s = 3$, $u = 6$, získáme konstanty $A = -9$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-9x^2 + x + 2)e^x + (3x + 6)e^{-x} - 8}{x^2} = -7.$$

2. Pro $t = 0$ je $A = 0$. Kvadratický mnohočlen se redukuje na lineární. Volíme-li dále $s = 5$ a $u = 0$, dostáváme konstanty $B = 1$, $C = -6$, $D = 5$, $E = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 6)e^x + 5xe^{-x} + 6}{x^2} = -7.$$

3. Pro $s = u = 0$ je $D = E = 0$. Tato volba zcela eliminuje celý exponenciální člen e^{-x} . Volíme-li např. $t = -5$, dostáváme konstanty $A = -5$, $B = -4$, $C = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 - 4x - 5x^2)e^x - 4}{x^2} = -7.$$

Trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla

Využitím Taylorova rozvoje (10) dostáváme soustavu tří lineárních rovnic o pěti neznámých:

$$\begin{aligned} [x]f(x) = 0 &\Rightarrow B + C + D - E = 0 \\ [x^2]f(x) = 0 &\Rightarrow A + B + \frac{C}{2} - D + \frac{E}{2} = 0 \\ [x^3]f(x) = L &\Rightarrow A + \frac{B}{2} + \frac{C}{6} + \frac{D}{2} - \frac{E}{6} = L. \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech:

$$A = 3L - 4t + 2s, \quad B = -6L + 11t - 6s, \quad C = 6L - 12t + 7s, \quad D = t, \quad E = s, \quad t, s \in \mathbb{Z}.$$

Položme nyní $L = 2$. Konkrétní volbou parametrů t a s dostáváme následující úlohy.

1. Pro $t = -1$ a $s = -3$ získáme konstanty $A = 4$, $B = -5$, $C = 3$, $D = -1$, $E = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x^2 - 5x + 3)e^x - (x + 3)e^{-x}}{x^3} = 2.$$

2. Pro $t = 2$ a $s = 1$ dostaneme $A = 0$, $B = 4$, $C = -5$, $D = 2$, $E = 1$, a kvadratický člen x^2 u exponenciály e^x tak v limitě nebude:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x - 5)e^x + (2x + 1)e^{-x} + 4}{x^3} = 2.$$

3. Pro $t = 0$ a $s = -1$ obdržíme konstanty $A = 4$, $B = -6$, $C = 5$, $D = 0$, $E = -1$. Tato volba redukuje lineární člen u exponenciály e^{-x} na konstantu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x^2 - 6x + 5)e^x - e^{-x} - 4}{x^3} = 2.$$

Pro limitu $L = 2$ existuje celkem 20 pětic A, B, C, D, E splňujících podmínky (7).

3.3 Limity s hyperbolickými funkcemi

Limity s exponenciálními funkcemi z předchozí části lze snadno transformovat na tvar, v němž se vyskytují hyperbolické funkce $\sinh x$ a $\cosh x$. Protože platí

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad \text{a} \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x},$$

můžeme limitu (9) upravit na tvar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(U_1 x^2 + V_1 x + W_1) \sinh x + (U_2 x^2 + V_2 x + W_2) \cosh x - W_2}{x^k}, \quad k \in \{2, 3\}, \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned} U_1 &= A, & U_2 &= A, \\ V_1 &= B - D, & V_2 &= B + D, \\ W_1 &= C - E, & W_2 &= C + E. \end{aligned} \quad (13)$$

Pro názornost vezměme některé z předchozích limit a transformujme je na tvar (12).

1. V limitě

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-9x^2 + x + 2)e^x + (3x + 6)e^{-x} - 8}{x^2} = -7$$

volíme $A = -9$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 6$. Transformačními vztahy (13) získáme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-9x^2 - 2x - 4) \sinh x + (-9x^2 + 4x + 8) \cosh x - 8}{x^2} = -7.$$

2. Analogicky můžeme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x - 5)e^x + (2x + 1)e^{-x} + 4}{x^3} = 2$$

transformovat na tvar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 6) \sinh x + (6x - 4) \cosh x + 4}{x^3} = 2.$$

Můžeme si všimnout, že v poslední limitě jsou všechny konstanty sudé, a tudíž lze před limitu vytknout číslo 2. Tato skutečnost nastává vždy, když konstanta A (tzn. také U_1 a U_2) je sudá, nezávisle na tom, zda používáme l'Hospitalovo pravidlo dvakrát nebo třikrát. Uvažujme pro jednoduchost jen případ dvojího použití l'Hospitalova pravidla. Vyjádříme-li totiž hodnoty všech šesti konstant U_i, V_i, W_i pomocí parametrů t, s, u nacházejících se v řešení příslušné soustavy lineárních rovnic (11), je patrné, že všechny konstanty budou sudé, bude-li t sudé:

$$\begin{aligned} U_1 &= t, & U_2 &= t, \\ V_1 &= 2L - 2t + 2s - 2u, & V_2 &= 2L - 2t + 4s - 2u, \\ W_1 &= -2L + 2t - 4s + 2u, & W_2 &= -2L + 2t - 4s + 4u, \quad t, s, u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tomu se můžeme vyhnout, bude-li t liché, nebo alespoň jeden z parametřů s, u bude ve tvaru součtu celého čísla a $\frac{1}{2}$, tj.

$$s, u \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} := \left\{ n + \frac{1}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pak lze snadno ukázat, že alespoň jedna z šesti konstant U_i, V_i, W_i bude lichá. Volme např. $L = 2$, $t = 2$, $s = 1$, $u = \frac{3}{2}$. Dostáváme tak limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 - x - 1) \sinh x + (2x^2 + x + 2) \cosh x - 2}{x^2} = 2.$$

V případě trojího použití l'Hospitalova pravidla lze postupovat analogicky.



3.4 Limity s logaritmickými funkcemi

Ve všech předchozích částech jsme se při vytváření úloh opírali o Taylorův rozvoj součinu polynomu a funkce goniometrické, resp. exponenciální, se středem v bodě $x_0 = 0$. Pokud bychom místo nich použili v součinu funkci logaritmickou $\ln(1+x)$, získali bychom při derivování zlomky, které by měly při dalším derivování výrazně komplikovanější strukturu.

$$[(Ax^2 + Bx + C) \ln(1+x)]' = (2Ax + B) \ln(1+x) + \frac{Ax^2 + Bx + C}{1+x},$$

$$[(Ax^2 + Bx + C) \ln(1+x)]'' = 2A \ln(1+x) + \frac{2Ax + B}{1+x} + \frac{Ax^2 + 2Ax + B - C}{(1+x)^2} \quad \text{apod.}$$

Tento přístup není didakticky žádoucí, protože při úpravě limity hrozí totiž velké riziko chyb při výpočtu derivací a jejich dalších úprav.

Tuto nesnáz lze jednoduše eliminovat transformací limitního přechodu pro $x \rightarrow 1$. V součinech se tak objeví funkce $\ln x$, jejíž derivace $\frac{1}{x}$ podstatně zjednodušuje úpravu limity, a to i po několikanásobném použití l'Hospitalova pravidla, jak je vidět níže:

$$[(Ax^2 + Bx + C) \ln x]' = (2Ax + B) \ln x + Ax + B + Cx^{-1},$$

$$[(Ax^2 + Bx + C) \ln x]'' = 2A \ln x + 2A + Bx^{-1} + A - Cx^{-2} \quad \text{apod.}$$

Položíme tedy

$$f(x) = (Ax^2 + Bx + C) \ln x + Dx^2 + Ex - D - E. \quad (14)$$

Nechť dále označuje L hodnotu limity (3), tj.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(Ax^2 + Bx + C) \ln x + Dx^2 + Ex - D - E}{(x-1)^k} = L, \quad k \in \{2, 3\}. \quad (15)$$

Nyní využijeme Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ se středem v bodě $x_0 = 1$, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= (A(x-1)^2 + (2A+B)(x-1) + A+B+C) \left(x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3) \right) \\ &\quad + D(x-1)^2 + (2D+E)(x-1) \\ &= (A+B+C+2D+E)(x-1) + \left(\frac{3A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + D \right) (x-1)^2 + \left(\frac{A}{3} - \frac{B}{6} + \frac{C}{3} \right) (x-1)^3 \\ &\quad + o((x-1)^3) \end{aligned} \quad (16)$$

pro $x \rightarrow 1$. Podobně jako v předchozích částech budeme požadovat, aby pro příslušné koeficienty Taylorova rozvoje platilo $[(x-1)^i]f(x) = 0$ pro $i < k$ a $[(x-1)^k]f(x) = L$.

Dvojnásobné použití l'Hospitalova pravidla

Z Taylorova rozvoje (16) plyne, že

$$\begin{aligned} [(x-1)]f(x) = 0 &\quad \Rightarrow \quad A + B + C + 2D + E = 0 \\ [(x-1)^2]f(x) = L &\quad \Rightarrow \quad \frac{3A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + D = L. \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení závislých na volbě tří parametrů $t, s, u \in \mathbb{Z}$:

$$A = t, \quad B = s, \quad C = -2L + 3t + s + 2u, \quad D = u, \quad E = 2L - 4t - 2s - 4u. \quad (17)$$

Zvolme hodnotu limity $L = -4$. Pro konkrétní hodnoty parametrů t, s, u dostáváme následující úlohy.

1. Pro $t = 1, s = 2, u = -5$ získáme konstanty $A = 1, B = 2, C = 3, D = -5, E = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x + 3) \ln x - 5x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x + 1} = -4.$$

2. Pro $t = 0$ je $A = 0$ a kvadratický mnohočlen stojící před logaritmem se redukuje na lineární. Volíme-li dále $s = 1$ a $u = -3$, dostáváme konstanty $B = 1, C = 3, D = -3, E = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3) \ln x - 3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = -4.$$

3. Pro $t = 3, s = -10, u = 0$ dostáváme konstanty $A = 3, B = -10, C = 7, D = 0, E = 0$. V čitateli se tak bude nacházet pouze součin kvadratického polynomu a logaritmu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 10x + 7) \ln x}{x^2 - 2x + 1} = -4.$$

Pro limitu $L = -4$ existuje celkem 1491 pětice A, B, C, D, E splňujících podmínky (7).

Trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla

Z Taylorova rozvoje (16) sestavíme nyní soustavu tří lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} [(x-1)]f(x) = 0 &\Rightarrow A + B + C + 2D + E = 0 \\ [(x-1)^2]f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{3A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + D = 0 \\ [(x-1)^3]f(x) = L &\Rightarrow \frac{A}{3} - \frac{B}{6} + \frac{C}{3} = L. \end{aligned}$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení závislých na volbě dvou parametrů $t, s \in \mathbb{Z}$.

$$A = t, \quad B = 6L - 8t - 4s, \quad C = 6L - 5t - 2s, \quad D = s, \quad E = -12L + 12t + 4s. \quad (18)$$

Pro hodnotu limity $L = 5$ a konkrétní hodnoty parametrů t a s dostáváme následující úlohy:

1. Pro $t = 7$ a $s = -5$ obdržíme konstanty $A = 7, B = -6, C = 5, D = -5, E = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(7x^2 - 6x + 5) \ln x - 5x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 5.$$

2. Pro $t = 8$ a $s = -9$ dostáváme konstanty $A = 8, B = 2, C = 8, D = -9, E = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(8x^2 + 2x + 8) \ln x - 9x^2 + 9}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 5.$$

Pro limitu $L = 5$ existuje pouze 12 pětice A, B, C, D, E splňujících podmínky (7). Nízký počet je způsoben vyššími násobky limity L a parametrů t a s ve vyjádření konstant (18), což zužuje výběr konstant A, B, C, D, E tak, aby byly v absolutní hodnotě nejvýše rovny 10. Dalším důvodem je skutečnost, že konstanta E musí být dělitelná čtyřmi, tj. $E \in \{-8, -4, 0, 4, 8\}$. Podobně lze ukázat, že konstanta B nabývá hodnot buď z množiny $\{-8, -4, 0, 4, 8\}$, je-li L liché, nebo z množiny $\{-10, -6, -2, 2, 6, 10\}$, je-li L sudé. Pětice konstant A, B, C, D, E splňujících podmínky (7) existuje, bude-li $|L| \leq 7$. Celkem jich je 202.



4 Limity s racionální hodnotou

V předchozí části jsme ukázali postup, kterým můžeme generovat úlohy na limity prostřednictvím Taylorova rozvoje vhodných funkcí s tím, že hodnota limity je celé číslo. Elementární úpravou lze z takovýchto limit sestavit obecnější limity, jejichž hodnota je číslo racionální.

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce, pro které platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^k} = L_2, \quad L_1, L_2 \in \mathbb{Z}, \quad L_2 \neq 0, \quad k \in \{2, 3\}.$$

Využitím elementárních vlastností limit lze ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} \cdot \frac{x^k}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Vezměme a zkombinujeme některé z dříve uvedených limit do obecnějšího tvaru

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x + 2 - (4x + 7) \sin x - 2 \cos x}{x^2} &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 - 4x - 5x^2) e^x - 4}{x^2} &= -7 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x + 2 - (4x + 7) \sin x - 2 \cos x}{(4 - 4x - 5x^2) e^x - 4} = \frac{3}{7}.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 6) \sinh x + (6x - 4) \cosh x + 4}{x^3} &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3 \sin x - 7x \cos x}{x^3} &= 4 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 6) \sinh x + (6x - 4) \cosh x + 4}{10x - 3 \sin x - 7x \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Podobně lze postupovat i při zobecnění limit typu (3), např.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 10x + 7) \ln x}{x^2 - 2x + 1} &= -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 5) \ln x + x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} &= 5 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 10x + 7) \ln x}{(3x - 5) \ln x + x^2 - 1} = -\frac{4}{5}.$$

Druhá možnost, jak lze úlohy tohoto typu konstruovat, je využít parametrického řešení soustav lineárních rovnic odvozených dříve, v nichž je možné vhodnou volbou racionální hodnoty limity L dodržet požadavek na celočíselnost koeficientů A, B, C, D, E .

Vezměme např. limitu typu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(Ax^2 + Bx + C) e^x + (Dx + E) e^{-x} - C - E}{x^2} = L.$$

V případě dvojího použití l'Hospitalova pravidla lze snadno ukázat, že koeficienty, které jsou ve tvaru

$$A = t, \quad B = 2L - 2t + 3s - 2u, \quad C = -2L + 2t - 4s + 3u, \quad D = s, \quad E = u, \quad t, s, u \in \mathbb{Z},$$

budou celočíselné, bude-li $L \in \mathbb{Z}$, tak i v případě, že $L \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Konkrétně volíme-li $L = -\frac{5}{2}$, $t = 0$, $s = 7$, $u = 8$, budou koeficienty ve tvaru $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 7$, $E = 8$ a limita má tvar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + (7x + 8) e^{-x} - 9}{x^2} = -\frac{5}{2}.$$

Pokud bychom použili třikrát l'Hospitalovo pravidlo při výpočtu limity

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(Ax^2 + Bx + C) \ln x + Dx^2 + Ex - D - E}{(x - 1)^3} = L,$$

kde

$$A = t, \quad B = 6L - 8t - 4s, \quad C = 6L - 5t - 2s, \quad D = s, \quad E = -12L + 12t + 4s, \quad t, s \in \mathbb{Z},$$

lze limitu L uvažovat také ve tvaru racionálního čísla vyjádřeného zlomkem, jehož jmenovatel dělí číslo šest, tj.

$$L \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad L \in \mathbb{Z} \pm \frac{1}{3}, \quad L \in \mathbb{Z} \pm \frac{1}{6}.$$

Limita L je tedy ve tvaru součtu, resp. rozdílu, libovolného celého čísla a uvedeného zlomku. Např. pro hodnoty $L = \frac{8}{3}$, $t = 3$, $s = -2$ dostáváme $A = 3$, $B = 0$, $C = 5$, $D = -2$, $E = -4$ a limita má tvar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 5) \ln x - 2x^2 - 4x + 6}{(x - 1)^3} = \frac{8}{3}.$$

5 Závěr

V příspěvku je představena systematická metodika inverzní konstrukce úloh na limity funkcí určených pro řešení l'Hospitalovým pravidlem. Ukázali jsme, že využití Taylorova rozvoje elementárních funkcí umožňuje pedagogovi přesně kontrolovat nejen výslednou hodnotu limity, ale i náročnost výpočtu z pohledu počtu aplikací l'Hospitalova pravidla a složitosti algebraických úprav derivací.

Klíčovým poznatkem je skutečnost, že vhodnou volbou parametrů soustavy lineárních podmínek lze generovat rozsáhlé množství vzájemně odlišných úloh s celočíselnými koeficienty v předem stanoveném rozsahu, což přináší podstatnou výhodu pro tvorbu různorodých testů se srovnatelnou obtížností. Transformací limitních přechodů (např. pro $x \rightarrow 1$ u logaritmických funkcí) lze navíc efektivně eliminovat algebraické komplikace, které by jinak odváděly pozornost studenta od podstaty procvičované látky.

Popsaný algoritmus je univerzální a lze jej dále rozšiřovat o další typy funkcí či využít k automatizaci generování testů prostřednictvím výpočetního softwaru. Předložený postup může sloužit jako praktická pomůcka pro učitele matematické analýzy i jako námět pro hlubší studium Taylorových polynomů a jejich role při výpočtu limit.

Reference

- [1] GENČEV, Marian, RUCKI, Pavel. *Cvičebnice z matematiky nejen pro ekonomy I*. 1. vyd. Ostrava: VŠB–TU Ostrava, 2017. Series of textbooks.
- [2] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I*. 7. vyd. Praha: Academia, 1984. Nezměněné vydání.

Mřížové body na kružnici

Tomáš Riemel 

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Příspěvek se zabývá studiem mřížových bodů ležících na kružnici se středem v počátku, jejichž souřadnice jsou celočíselné. Tato úloha je ekvivalentní řešení kvadratické diofantovské rovnice tvaru $x^2 + y^2 = n$. V úvodu jsou představeny základní přístupy k hledání řešení pro malá nezáporná čísla n , zejména pomocí odhadů a symetrií řešení. Hlavní část práce je věnována využití Gaussových celých čísel, která poskytují efektivní nástroj pro systematické generování všech řešení dané rovnice. Pomocí rozkladu čísla n v oboru Gaussových celých čísel lze popsat strukturu řešení a určit jejich počet. Metoda je ilustrována na konkrétních příkladech, včetně úloh inspirovaných matematickou olympiádou, kde je ukázán postup nalezení všech celočíselných řešení i jejich geometrická interpretace. Důraz je kladen na propojení algebraického a geometrického pohledu na problém. Příspěvek tak ukazuje, jak lze pomocí komplexních čísel elegantně řešit úlohy elementární teorie čísel a současně rozvíjet matematické myšlení studentů.

Klíčová slova Diofantovské rovnice, mřížové body.

1 Úvod

V tomto článku se zaměříme na rovnice o více neznámých řešené v oboru celých čísel, tzv. diofantovské rovnice. Konkrétně budeme studovat kvadratickou diofantovskou rovnici

$$x^2 + y^2 = n, \quad (1)$$


kde x, y jsou celočíselné neznámé a n je dané celé nezáporné číslo. Z geometrického hlediska tato rovnice popisuje všechny *mřížové body* (tj. body s celočíselnými souřadnicemi), které leží na kružnici se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a poloměrem \sqrt{n} .

Cílem tohoto příspěvku je představit tzv. *Gaussova celá čísla*, přičemž se předpokládají základní znalosti z oblasti komplexních čísel.

Pro malá nezáporná čísla n lze při řešení dané úlohy využít metodu odhadů a nerovností, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.1. V oboru celých čísel řešte rovnici

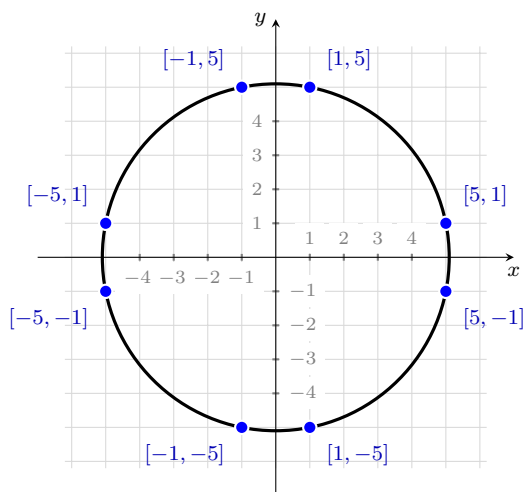
$$x^2 + y^2 = 26.$$

 Korespondenční autor (tomas.riemel@vsb.cz).

Řešení. Je-li dvojice (m, n) řešením dané rovnice, pak díky symetrii jsou řešeními také dvojice vzniklé záměnou souřadnic a změnou znaménka, tj. (n, m) , $(-m, n)$, $(m, -n)$, $(-m, -n)$, $(-n, m)$, $(n, -m)$ a $(-n, -m)$. Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme $x^2 \leq y^2$. Pak platí

$$0 \leq 2x^2 \leq x^2 + y^2 = 26,$$

odkud plyne $x^2 \leq 13$. Možné hodnoty x^2 jsou tedy 0, 1, 4, 9, a tedy $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Dosazením těchto hodnot do rovnice dostaneme postupně $y^2 = 26$, $y^2 = 25$, $y^2 = 22$, $y^2 = 17$. Celočíslné řešení nastává pouze v případě $y^2 = 25$, tedy $y = \pm 5$.



Obrázek 1 Mřížové body na kružnici $x^2 + y^2 = 26$

Závěr. Daná rovnice má právě 8 řešení,

$$(x, y) \in \{(\pm 1, \pm 5), (\pm 5, \pm 1)\}.$$

□

Z uvedeného postupu je patrné, že pro větší hodnoty n není metoda založená na odhadech a nerovnostech příliš efektivní, což vede k potřebě obecnějších metod řešení.

2 Gaussova celá čísla

Definice 2.1. *Komplexní čísla $\alpha = x + yi$, kde x, y jsou celá čísla, se nazývají Gaussova celá čísla.*

Množina všech Gaussových celých čísel, která se označuje $\mathbb{Z}[i]$, je rozšířením množiny celých čísel, tedy $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i]$.

Definice 2.2. *Gaussovo celé číslo α , pro které existuje $\tau \in \mathbb{Z}[i]$ splňující $\alpha \cdot \tau = 1$, nazveme jednotkou.*

Definice 2.3. *Norma $N(\alpha)$ Gaussova celého čísla $\alpha = x + yi$ je definována předpisem*

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha|^2 = x^2 + y^2,$$

kde $\bar{\alpha} = x - yi$ je komplexně sdružené číslo s α .

Norma Gaussova celého čísla je analogií s pojmem absolutní hodnota celého čísla a má přitom následující vlastnosti.

- Pro libovolná dvě Gaussova celá čísla α, β platí $N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.
- Gaussovo celé číslo α je jednotka právě tehdy, když $N(\alpha) = 1$, přičemž v $\mathbb{Z}[i]$ jsou jednotkami pouze ± 1 a $\pm i$.



Lemma 2.1. *Je-li zbytek při dělení přirozeného čísla n čtyřmi roven 3, pak rovnice $x^2 + y^2 = n$ nemá řešení v oboru celých čísel.*

Z uvedeného lemmatu automaticky neplyne, že rovnice $x^2 + y^2 = n$ má vždy celočíselné řešení pro n , jenž po dělení čtyřmi dává zbytek 0, 1 nebo 2.

Důkaz. Libovolné nezáporné celé číslo p , které je dělitelné 2, lze zapsat ve tvaru $p = 2l$, kde l je vhodné nezáporné celé číslo. Proto $p^2 = (2l)^2 = 4l^2$ je dělitelné čtyřmi. Podobně každé liché přirozené číslo q lze zapsat ve tvaru $q = 2r + 1$, kde r je vhodné nezáporné celé číslo. Pak $q^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1$ dává po dělení čtyřmi zbytek 1. Výraz $x^2 + y^2$ tedy může nabývat po dělení čtyřmi pouze zbytků 0, 1 a 2, nikoliv však 3. Tím je důkaz ukončen. \square

Z Lemmatu 2.1 plyne, že například diofantovská rovnice $x^2 + y^2 = 2027$ nemá žádné celočíselné řešení, neboť 2027 dává při dělení čtyřmi zbytek 3.

Věta 2.1. *Přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin celých čísel $n = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{Z}$, právě tehdy, když n je normou Gaussova celého čísla $n = N(x + yi)$.*

Podle Věty 2.1 lze problém o součtu druhých mocnin celých čísel přeformulovat na úlohu o hledání všech Gaussových celých čísel α splňujících vlastnost $N(\alpha) = n$. Z aritmetiky přirozených čísel je známo, že každé přirozené číslo $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel. Stručnou odpověď na otázku, která prvočísla jsou normami Gaussových celých čísel, poskytuje následující lemma.

Lemma 2.2. *Platí následující tvrzení.*

- $N(1 \pm i) = 2$.
- Pro každé prvočíslu p dávající po dělení čtyřmi zbytek 1 lze nalézt Gaussovo celé číslo α splňující $N(\alpha) = p$.
- Pro žádné prvočíslu p dávající zbytek 3 po dělení čtyřmi neexistuje žádné Gaussovo celé číslo β splňující $N(\beta) = p$.

Dále si je možné všimnout, že komplexně sdružená Gaussova celá čísla mají vždy stejnou normu a zároveň pro každé prvočíslu p platí $N(p) = p^2$.

Definice 2.4. *Gaussovo celé číslo $\alpha = x + yi$ nazveme Gaussovým prvočíslem, pokud platí následující podmínka: jestliže $\alpha = \tau \cdot \psi$, kde $\tau, \psi \in \mathbb{Z}[i]$, pak buď τ , nebo ψ je jednotka.*

Jinak řečeno, Gaussova prvočísla jsou právě ta Gaussova celá čísla, která nelze v $\mathbb{Z}[i]$ netriviálně rozložit na součin dvou Gaussových celých čísel.

Některá prvočísla se v oboru $\mathbb{Z}[i]$ dají rozložit, zatímco jiná nikoli. Například prvočíslu 5 lze zapsat ve tvaru $5 = (2 + i)(2 - i)$, takže není Gaussovým prvočíslem. Naproti tomu prvočíslu 3 je v $\mathbb{Z}[i]$ nerozložitelné, a tedy Gaussovým prvočíslem je. Obdobně jako v klasické aritmetice platí, že každé nenulové Gaussovo celé číslo, které není jednotkou, lze jednoznačně (až na pořadí činitelů, násobení jednotkami a záměnu za komplexně sdružená čísla) rozložit na součin Gaussových prvočísel.

Věta 2.2 (L. Euler). *Číslo ve tvaru $4l + 1$, kde l je přirozené číslo, je prvočíslem právě tehdy, když jej lze jednoznačně vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin nesoudělných přirozených čísel.*

Následující věta dává vyčerpávající odpověď na otázku řešitelnosti a celkového počtu řešení původního problému (1).

Věta 2.3. *Platí následující tvrzení.*

- Přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin celých čísel ($n = x^2 + y^2$) právě tehdy, když prvočíselný rozklad čísla n lze vyjádřit ve tvaru

$$n = 2^a \cdot p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k} \cdot r_1^{2c_1} \cdots r_l^{2c_l},$$

kde a, b_i, c_j jsou nezáporná celá čísla, každé p_i dává zbytek 1 po dělení čtyřmi a každé r_j dává zbytek 3 po dělení čtyřmi.

b) Necht $t = (b_1 + 1) \cdots (b_k + 1)$. Pak je počet všech různých vyjádření čísla n ve tvaru součtu dvou druhých mocnin celých čísel s ohledem na pořadí prvků a znaménka roven $4t$. Bez ohledu na pořadí prvků a znaménka je tento počet roven $\frac{1}{2}t$ pro t sudé a $\frac{1}{2}(t + 1)$ pro t liché.

Jiné řešení Příkladu 1.1. Platí $26 = 2 \cdot 13$ a $2 = N(1 \pm i)$ a prvočíslo 13 dává po dělení čtyřmi zbytek 1, přičemž $13 = N(2 \pm 3i)$. Tedy

$$\begin{aligned} 26 &= 2 \cdot 13 = N(k(1 \pm i)(2 \pm 3i)) \\ &= N(x + yi) = x^2 + y^2, \end{aligned}$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[i]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm i$. Musíme tedy vyřešit všechny rovnice $x + yi = k(1 \pm i)(2 \pm 3i)$. Z Věty 2.3 plyne, že daná úloha má celkem 8 řešení. Bez ohledu na pořadí prvků a znaménka lze obdržet dle Věty 2.3 pouze 1 možnost. Stačí uvažovat o řešení jediné rovnice, např.

$$x + yi = (1 + i)(2 + 3i) = -1 + 5i,$$

odkud $x = -1$, $y = 5$. Ostatní řešení získáme záměnou x, y a znamének. \square

Z řešení následujícího příkladu je zřejmé výhodnější použití Gaussových celých čísel ve srovnání s metodou nerovností a odhadů.

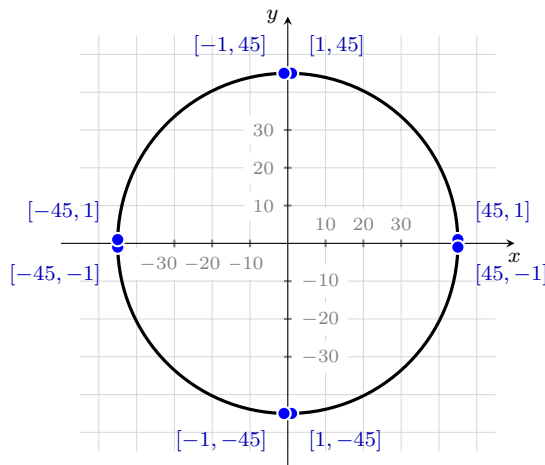
Příklad 2.1. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2026.$$

Řešení. Nejprve sestavíme prvočíselný rozklad čísla 2026, tj. $2026 = 2 \cdot 1013$. Z Lemmatu 2.2 plyne, že existuje Gaussovo celé číslo, pro které je prvočíslo 1013 normou. Např. $1013 = N(23 \pm 22i)$. Platí tedy

$$\begin{aligned} 2026 &= 2 \cdot 1013 = N(k(1 \pm i)(23 \pm 22i)) \\ &= N(x + yi) = x^2 + y^2, \end{aligned}$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[i]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm i$. Hledáme proto řešení všech rovnic $x + yi = k(1 \pm i)(23 \pm 22i)$. Daná úloha má podle Věty 2.3 právě 8 řešení. Stačí přitom řešit pouze rovnici $x + yi = (1 + i)(23 + 22i) = 1 + 45i$, odtud $x = 1$ a $y = 45$. Zbývající řešení lze získat záměnou x, y a znamének.



Obrázek 2 Mřížové body na kružnici $x^2 + y^2 = 2026$

Závěr. Všechna řešení dané úlohy jsou $(x, y) \in \{(\pm 1, \pm 45), (\pm 45, \pm 1)\}$. \square

Následující příklad lze po užití substituce řešit opět metodou Gaussových celých čísel.

Příklad 2.2. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2026(x - y).$$

Řešení. Ze zadání je patrné, že levá strana rovnice je součtem dvou celých nezáporných čísel, tedy i pravá strana musí být celé nezáporné číslo. Jelikož 2026 je přirozené číslo, musí platit $x \geq y$. Dále si lze všimnout, že uspořádaná dvojice $(x, y) = (0, 0)$ je řešením úlohy. Po snadné úpravě obdržíme daná rovnice ve tvaru

$$(x - 1013)^2 + (y + 1013)^2 = 2052338.$$

Užitím substituce $u = x - 1013$, $v = y + 1013$ lze po úpravě získat modifikovanou úlohu v rovnici (1):

$$u^2 + v^2 = 2052338,$$

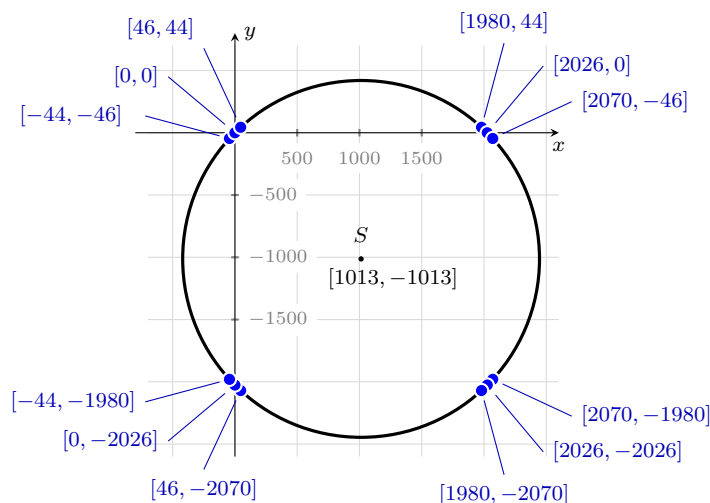
kde $2052338 = 2 \cdot 1013^2$. Platí $2 = N(1 \pm i)$. Podle Lemmatu 2.2 existuje Gaussovo celé číslo, jehož norma je rovna 1013. Např. $1013 = N(23 \pm 22i)$. Proto

$$\begin{aligned} 2052338 &= N(k(1 \pm i)(23 \pm 22i)^2) \\ &= N(u + vi) = u^2 + v^2, \end{aligned}$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[i]$. Na základě Věty 2.3 má úloha celkem $4 \cdot 3 = 12$ celočíselných řešení, přičemž bez ohledu na pořadí prvků a znaménka stačí vyřešit následující dvě rovnice o neznámých u a v :

- $u + vi = (1 + i)(23 + 22i)^2 = -967 + 1057i$,
- $u + vi = (1 + i)(23 + 22i)(23 - 22i) = 45 + 45i$.

Další řešení získáme záměnou složek u, v a změnou znamének. Obdržíme tak celkem 12 řešení ve tvaru $(u, v) \in \{(\pm 413, \pm 1357), (\pm 1013, \pm 1013), (\pm 1357, \pm 413)\}$. Dosazením do vztahů $u = x - 1013$, $v = y + 1013$ lze získat řešení původní úlohy. Řešením úlohy jsou z grafického hlediska mřížové body na kružnici, která nemá střed v počátku, viz Obr. 3.



Obrázek 3 Mřížové body na kružnici $x^2 + y^2 = 2026(x - y)$

Závěr: Úloha má právě 12 řešení, a to dvojice

$$(x, y) \in \{(-44, -1980), (-44, -46), (0, -2026), (0, 0), (46, -2070), (46, 44), (1980, -2070), (1980, 44), (2026, -2026), (2026, 0), (2070, -1980), (2070, -46)\}. \quad \square$$

Následující úloha je z 55. ročníku Matematické olympiády (MO) a lze ji řešit pomocí metody Gaussových celých čísel.

Příklad 2.3 (MO 55-A-I-6). Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

Řešení. Pro nalezení řešení lze využít metodu Gaussových celých čísel, díky níž tuto úlohu vyřešíme v oboru celých čísel. Po snadné úpravě je možné danou rovnici přepsat do tvaru

$$(2x - 2005)^2 + (2y + 2005)^2 = 8040050.$$

Zavedením substituce $u = 2x - 2005$, $v = 2y + 2005$ získáme modifikovanou úlohu (1):

$$u^2 + v^2 = 8040050.$$

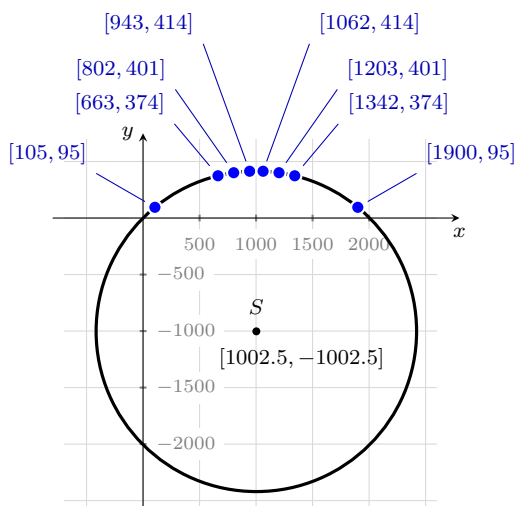
Z pohledu analytické geometrie lze původní zadání úlohy převést na hledání všech mřížových bodů, které leží v prvním kvadrantu, nikoliv ani na jedné ze souřadnicových os a současně náležící kružnici se středem v bodě $[2005/2, -2005/2]$ a poloměrem $\sqrt{4020025/2}$.

V dalším kroku vytvoříme prvočíselný rozklad čísla $8040050 = 2 \cdot 5^2 \cdot 401^2$. Platí $2 = N(1 \pm i)$. Jelikož obě prvočísla 5 a 401 dávají po dělení čtyřmi zbytek 1, pak dle Lemmatu 2.2 existují Gaussova celá čísla, pro která jsou tato čísla normami. Např. $5 = N(2 \pm i)$, $401 = N(20 \pm i)$. Platí tedy

$$8040050 = N(k(1 \pm i)(2 \pm i)^2(20 \pm i)^2) = N(u + vi) = u^2 + v^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[i]$. Analogicky s předchozími příklady (dle Věty 2.3) stačí vyřešit pouze následujících pět možností:

- $u + vi = (1 + i)(2 + i)^2(20 + i)^2 = -679 + 2753i$,
- $u + vi = (1 + i)(2 + i)(2 - i)(20 + i)^2 = 1795 + 2195i$,
- $u + vi = (1 + i)(2 + i)^2(20 + i)(20 - i) = -401 + 2807i$,
- $u + vi = (1 + i)(2 + i)(2 - i)(20 + i)(20 - i) = 2005 + 2005i$,
- $u + vi = (1 + i)(2 - i)^2(20 + i)^2 = 2833 - 119i$.



Obrázek 4 Mřížové body (x, y) splňující MO 55-A-I-6

Další řešení lze získat záměnou u, v a změnou znamének. Obdržíme tak celkem 36 řešení

$$(u, v) \in \{(\pm 119, \pm 2\,833), (\pm 401, \pm 2\,807), (\pm 679, \pm 2\,753),$$

$$(\pm 1\,795, \pm 2\,195), (\pm 2\,005, \pm 2\,005), (\pm 2\,833, \pm 119),$$

$$(\pm 2\,807, \pm 401), (\pm 2\,753, \pm 679), (\pm 2\,195, \pm 1\,795)\}.$$

Dosazením do vztahů $u = 2x - 2\,005$, $v = 2y + 2\,005$ získáme celkem 36 celočíselných řešení, přičemž právě 8 z nich leží v oboru přirozených čísel.

Závěr: Existuje právě 8 řešení dané úlohy ve tvaru uspořádaných dvojic

$$(x, y) \in \{(105, 95), (663, 374), (802, 401), (943, 414),$$

$$(1\,062, 414), (1\,203, 401), (1\,342, 374), (1\,900, 95)\}.$$

□

Následující neřešený příklad lze řešit analogicky jako v Příkladu 2.2.

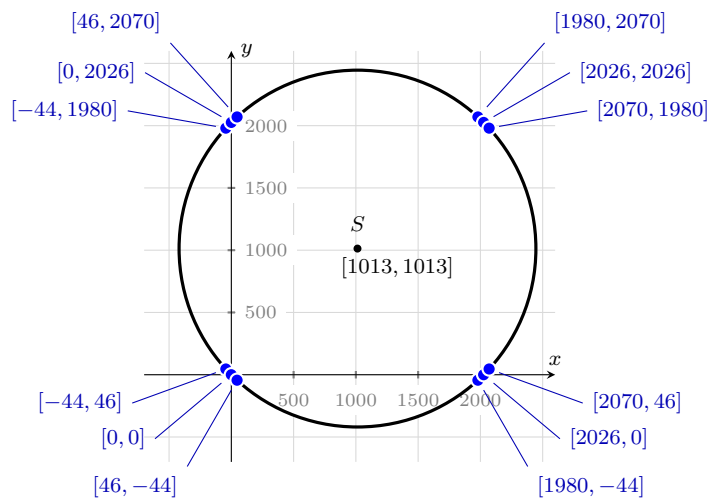
Příklad 2.4. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2\,026(x + y).$$

Závěr. Úloha má právě 12 řešení, a to dvojice

$$(x, y) \in \{(-44, 46), (-44, 1\,980), (0, 0), (0, 2\,026), (46, -44), (46, 2\,070), (1\,980, -44),$$

$$(1\,980, 2\,070), (2\,026, 0), (2\,026, 2\,026), (2\,070, 46), (2\,070, 1\,980)\}.$$



Obrázek 5 Mřížové body splňující $x^2 + y^2 = 2\,026(x + y)$

3 Závěr

V příspěvku byly představeny metody řešení rovnice $x^2 + y^2 = n$ v oboru celých čísel s důrazem na geometrickou interpretaci pomocí mřížových bodů na kružnici. Bylo ukázáno, že pro menší hodnoty n lze řešení nalézt elementárními metodami, zatímco obecnější a systematictější přístup poskytují Gaussova celá čísla. Na konkrétních příkladech bylo demonstrováno, jak rozklad v tomto oboru vede k efektivnímu určení všech řešení i jejich počtu. Uvedené postupy zároveň ilustrují hlubší souvislosti mezi teorií čísel a komplexními čísly. Problematika tak nabízí vhodné prostředí pro rozvoj matematické intuice i pro využití ve výuce.

Reference

- [1] ANDREESCU, Titu, ANDRICA, Dorin, CUCUREZEANU, Ion. *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach*. 1. vyd. Boston, MA: Birkhäuser, 2010. ISBN 978-0-8176-4548-9. Dostupné z DOI: [10.1007/978-0-8176-4549-6](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4549-6).
- [2] CONRAD, Keith. *The Gaussian Integers* [online] [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf>.
- [3] RIEMEL, Tomáš. O jedné diofantovské rovnici. *Matematika–Fyzika–Informatika* [online]. 2023, roč. 32, č. 3, s. 174–183 [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/747>.
- [4] RIEMEL, Tomáš. *Diofantovské rovnice v matematických soutěžích*. Olomouc, 2024. Dostupné také z: https://library.upol.cz/ar1-upol/cs/detail-upol_us_cat.17-0418841-Diofantovske-rovnice-v-matematickych-soutezich/. Disertační práce. Univerzita Palackého, Katedra algebry a geometrie.



Řešitelnost soustav lineárních rovnic a jiné aplikace projektivního rozšíření reálného aritmetického afinního prostoru

Pavel Jahoda  Monika Jahodová

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt V současnosti se studenti FEI VŠB–TUO v základních kurzech matematiky s projektivním rozšířením afinního prostoru nesetkávají. V mnoha případech by však znalosti týkající se projektivního rozšíření dokázaly přinést na řešení úlohy zajímavý nový pohled, než jaký získáme řešením obvyklou cestou. Výhodou řešení problémů v projektivním rozšíření je také elegancie zápisu. V tomto článku je s využitím konkrétních příkladů porovnáváno řešení vybraných úloh „obvyklou“ cestou s řešením využívajícím projektivní rozšíření afinního prostoru.

Klíčová slova Soustavy lineárních rovnic, afinní prostor, projektivní prostor.


1 Úvod

Probrat a vysvětlit pojmy jako projektivní prostor a projektivní rozšíření afinního prostoru by ve výuce základních kurzů bylo časově velmi náročné a pro studenty oborů, které nejsou zaměřeny na matematiku, možná i zbytečné. Poměrně snadno a velmi intuitivně (přesto korektně!) je možné studenty seznámit se speciálním případem, kdy jde o projektivní rozšíření aritmetického afinního prostoru. Nejlépe konkrétně afinního prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, nebo $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, -)$, neboť v těchto afinních prostorech jsou zvyklí pracovat už od střední školy.

Nejprve zopakujeme základní pojmy a popíšeme samotnou konstrukci projektivního rozšíření. Dále se budeme věnovat řešení soustav lineárních rovnic v projektivním rozšíření aritmetického afinního prostoru obecně i v konkrétních případech. Poté, opět na konkrétních příkladech ukážeme možnost aplikace projektivního rozšíření afinního prostoru i v jiných oblastech.

2 Projektivní rozšíření aritmetického afinního prostoru

Připomeňme alespoň definici afinního prostoru, aritmetického afinního prostoru a projektivního prostoru. Se základními informacemi o afinních prostorech je možné se podrobněji seznámit například v [1] nebo [3], resp. o projektivních prostorech v [2] nebo [4].

 Korespondenční autor (pavel.jahoda@vsb.cz).

Definice 2.1 (Afinní prostor). *Uspořádanou trojici $\mathbb{A}^n = (\mathcal{B}, \mathbb{V}^n, -)$ nazveme n -dimenzionálním afinním prostorem nad tělesem $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ právě tehdy, když*

- 1) \mathcal{B} je neprázdná množina
- 2) $\mathbb{V}^n = (V, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze n nad tělesem $(\mathbb{T}, +, \cdot)$.
- 3) $- : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto V$ je zobrazení splňující
 - a) $\forall X \in \mathcal{B} \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad \exists! Y \in \mathcal{B} : Y - X = \mathbf{u}$,
 - b) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{B} : Z - X = (Z - Y) + (Y - X)$.

Vektorový prostor $\mathbb{V}^n = (V, +, \cdot)$ nazýváme zaměřením afinního prostoru \mathbb{A}^n , nebo také n -směrem afinního prostoru \mathbb{A}^n .

Příklad 2.1. *Zvolme:*

$\mathcal{B} = \mathbb{T}^n = \{[x_1, \dots, x_n] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}\}$... množina bodů
 $\mathbb{V}^n = (\mathbb{T}^n, +, \cdot)$ je aritmetický vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{T}, +, \cdot)$, kde
 $\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}\}$... množina vektorů
 (Abychom odlišili body od vektorů používáme jiné závorky.)

Zobrazení $- : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto V$ definujeme předpisem

$$[y_1, \dots, y_n] - [x_1, \dots, x_n] = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n).$$

Potom $(\mathcal{B}, \mathbb{V}^n, -) = (\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$ je afinní prostor nad tělesem $(\mathbb{T}, +, \cdot)$. Nazýváme jej n -dimenzionálním aritmetickým afinním prostorem nad tělesem $(\mathbb{T}, +, \cdot)$.

Definice 2.2 (Projektivní prostor). *Projektivním prostorem dimenze n nazveme každou uspořádanou trojici $\mathbb{P}^n = (P, \mathbb{V}^{n+1}, \pi)$, kde*

- 1) P je neprázdná množina (množina bodů projektivního prostoru).
- 2) $\mathbb{V}^{n+1} = (V, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze $n + 1 \in \mathbb{N}$ nad tělesem $(\mathbb{T}, +, \cdot)$.
- 3) $\pi : V - \{\mathbf{o}\} \mapsto P$ je surjektivní zobrazení takové, že

$$\pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y} \rangle,$$

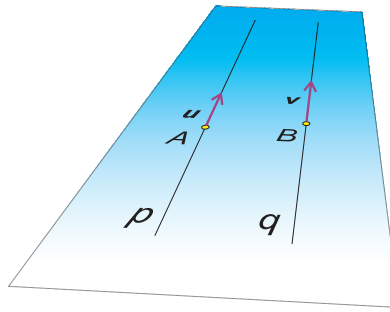
kde $\langle \mathbf{x} \rangle = \{k \cdot \mathbf{x} \mid k \in \mathbb{T}\}$ je lineární obal vektoru \mathbf{x} .

Motivací pro konstrukci projektivního rozšíření afinního prostoru (pro jednoduchost uvažujme aritmetický afinní prostor) je intuitivní představa, že se rovnoběžné nadroviny afinního prostoru, například dvě rovnoběžné přímky p a q v rovině, protínají někde „v nekonečnu“.

Pokud chceme tyto představy korektně formalizovat, můžeme vyjít z úvahy, že zmiňované rovnoběžky mohou být dány každá svým bodem a směrovým vektorem. Tyto směrové vektory nemusí být stejné, ale jeden je násobek druhého – náleží do stejného jednosměru (jejich lineárního obalu) $\langle \mathbf{v} \rangle$. Jako společný bod rovnoběžek p a q bychom tedy mohli prohlásit jednosměr $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Tím bychom ale vytvořili „nehomogenní“ strukturu. K bodům afinního prostoru (říkejme jim vlastní body) – uspořádaným n -ticím, bychom přidali body (říkejme jim nevlastní body) – lineární obaly vektorů. Jak tuto nehomogenitu obejít? Chceme vytvořit prostor (projektivní), který by jako své body obsahoval jak vlastní tak nevlastní body a přitom by šlo z matematického pohledu o objekty stejného druhu!

Na Obrázku 1 je schematicky znázorněna konstrukce projektivního rozšíření aritmetického afinního prostoru $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, -)$. Tento postup je možné použít zcela analogicky pro konstrukci projektivního rozšíření aritmetického afinního prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$.



Bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{T}^n$ můžeme vzájemně jednoznačně přiřadit $\langle (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \rangle$, tj. lineární obal vektoru $(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{T}^{n+1}$. Tedy existuje bijektivní korespondence mezi množinou bodů afinního prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$ a množinou jednosměrů $\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) \rangle$, kde $\xi_0 \neq 0$.

Všimněme si, že každá uspořádaná $(n+1)$ -tice $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0)$, kde $\xi_0 \neq 0$, jednoznačně určuje lineární obal $\langle (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \rangle$ do něž patří a tedy i bod $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) = \xi_0 \cdot \left(\underbrace{\frac{\xi_1}{\xi_0}}_{x_1}, \underbrace{\frac{\xi_2}{\xi_0}}_{x_2}, \dots, \underbrace{\frac{\xi_n}{\xi_0}}_{x_n}, 1 \right) \in \langle (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \rangle.$$

Uspořádanou $(n+1)$ -tici $(\xi_0 x_1, \xi_0 x_2, \dots, \xi_0 x_n, \xi_0)$, kde $\xi_0 \neq 0$, nazveme homogenními souřadnicemi bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{T}^n$ (ale domluvme se, že také jednosměru $\langle (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \rangle$).

Obdobně každému jednosměru $\langle (v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle \subseteq \mathbb{T}^n - \langle (0, 0, \dots, 0) \rangle$ můžeme vzájemně jednoznačně přiřadit $\langle (v_1, v_2, \dots, v_n, 0) \rangle$, tj. lineární obal vektoru $(v_1, v_2, \dots, v_n, 0) \in \mathbb{T}^{n+1}$. Existuje tedy bijektivní korespondence mezi množinou jednosměrů patřících do množiny $\mathbb{T}^n - \langle (0, 0, \dots, 0) \rangle$ a množinou jednosměrů $\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) \rangle \neq \langle (0, 0, \dots, 0) \rangle$.

Všimněme si, že každá uspořádaná $(n+1)$ -tice $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0) \neq (0, 0, \dots, 0)$ jednoznačně určuje jednosměr $\langle (v_1, v_2, \dots, v_n, 0) \rangle \subseteq \mathbb{T}^n - \langle (0, 0, \dots, 0) \rangle$, do něž patří:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n, 0) \in \langle (v_1, v_2, \dots, v_n, 0) \rangle.$$

Uspořádanou $(n+1)$ -tici $(cv_1, cv_2, \dots, cv_n, 0)$, kde $c \neq 0$, nazveme homogenními souřadnicemi jednosměru $\langle (v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle \subseteq \mathbb{T}^n - \langle (0, 0, \dots, 0) \rangle$ (ale také jednosměru $\langle (v_1, v_2, \dots, v_n, 0) \rangle$). Množina bodů projektivního rozšíření aritmetického afinního prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$ je tedy

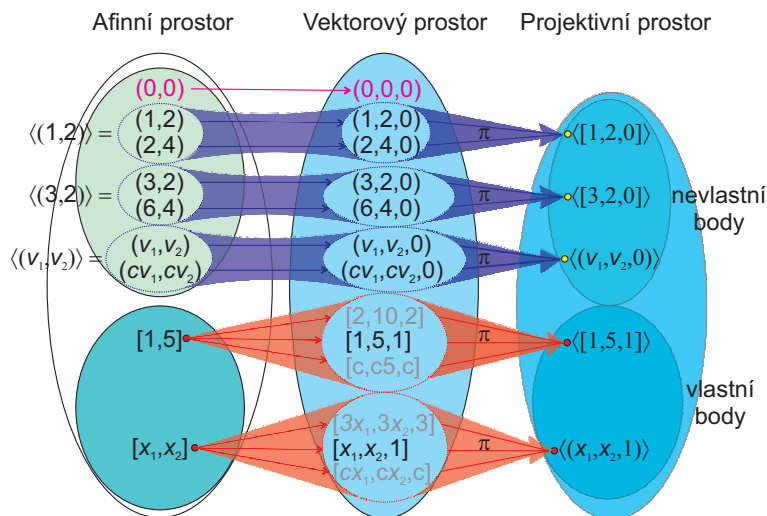
$$P_n = \{ \langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) \rangle \mid (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) \in \mathbb{T}^{n+1} - \{(0, 0, \dots, 0)\} \}.$$

V případě $\xi_0 \neq 0$ je $\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0) \rangle$ vlastním bodem projektivního rozšíření a představuje bod afinního prostoru $X = [\xi_1/\xi_0, \xi_2/\xi_0, \dots, \xi_n/\xi_0] \in \mathbb{T}^n$. Pokud naopak $\xi_0 = 0$, je $\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0) \rangle$ nevlastním bodem projektivního rozšíření a představuje jednosměr $\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \rangle \subseteq \mathbb{T}^n$.

3 Soustavy lineárních rovnic

Řešitelnost soustav lineárních rovnic je základním problémem lineární algebry a analytické geometrie. V afinním prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$ nad tělesem \mathbb{T} soustavy o n neznámých popisují průnik nadrovin.

Projektivní rozšíření afinního prostoru vznikne jeho „obohacením“ o nevlastní body. Díky tomu nám řešení soustav v projektivním rozšíření, s minimálním úsilím navíc, dává více informací než jejich řešení v afinním prostoru. Tento přístup a jeho geometrická interpretace jsou zajímavé hlavně u soustav, které řešení v afinním prostoru nemají, ale v projektivním rozšíření tohoto prostoru ano. Soustavy lineárních rovnic se v rámci předmětu lineární algebra řeší již v prvním ročníku. Mohlo by proto jít o první oblast, kde by se studenti mohli setkat s projektivním rozšířením afinního prostoru.



Obrázek 1 Afinní prostor sestává z množiny vektorů \mathbb{R}^2 a množiny bodů \mathbb{R}^2 . Množinu vektorů je možné rozdělit na sjednocení jednosměrů. Každá uspořádaná trojice $(\xi_0 x_1, \xi_0 x_2, \xi_0)$, kde $\xi_0 \neq 0$, z vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ představuje homogenní souřadnice bodu $X = [x_1, x_2]$ a každá uspořádaná trojice $(v_1, v_2, 0) \neq (0, 0, 0)$ z vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ představuje homogenní souřadnice jednosměru $\langle (v_1, v_2) \rangle$.

Nejprve ukážeme jak přejít při řešení soustav lineárních rovnic do projektivního rozšíření obecně. Poté na konkrétních příkladech ukážeme srovnání obvyklého postupu řešení soustav lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou a postupu řešení v projektivním rozšíření.

Věříme, že zařazení těchto příkladů buď do výuky lineární algebry, nebo do nějakého předmětu zaměřeného na geometrii, by pro studenty studijního programu „Výpočetní a aplikovaná matematika“ bylo vítaným obohacením poskytujícím větší přehled o řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

3.1 Nadrovina v projektivním rozšíření aritmetického afinního prostoru

Uvažujme nadrovinu ϱ aritmetického afinního prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$, která je dána svou obecnou rovnicí

$$\varrho: \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0. \quad (1)$$

Rovnice (1) je splněna právě tehdy, když pro každé $\xi_0 \neq 0$ platí

$$\varrho: \quad a_1 \xi_0 x_1 + a_2 \xi_0 x_2 + \dots + a_n \xi_0 x_n + a_{n+1} \xi_0 = 0.$$

Znamená to, že bod $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{T}^n$ náleží nadrovině ϱ právě tehdy, když jeho homogenní souřadnice $(\xi_0 x_1, \xi_0 x_2, \dots, \xi_0 x_n, \xi_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0)$ vyhovují rovnici

$$\varrho: \quad a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n + a_{n+1} \xi_0 = 0. \quad (2)$$

Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{T}^n$ náleží do zaměření nadroviny ϱ právě tehdy, když

$$\varrho: \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0, \quad (3)$$

neboť (a_1, a_2, \dots, a_n) je normálovým vektorem nadroviny ϱ .

Pokud platí (3), pak také všechny vektory patřící do lineárního obalu $\langle\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle\rangle$ náleží do zaměření nadroviny ϱ . Znamená to, že nevlastní bod $\langle\langle v_1, v_2, \dots, v_n, 0 \rangle\rangle$ náleží nadrovině ϱ právě tehdy, když jeho homogenní souřadnice $(v_1, v_2, \dots, v_n, 0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0)$ vyhovují rovnici

$$\varrho: \quad a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n + a_{n+1}\xi_0 = 0. \quad (4)$$

Z (2) a (4) plyne, že bod (ať už vlastní či nevlastní) projektivního rozšíření aritmetického afinního prostoru s homogenními souřadnicemi $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_0)$ náleží nadrovině ϱ právě tehdy, když platí

$$\varrho: \quad a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n + a_{n+1}\xi_0 = 0. \quad (5)$$

Rovnici (5) nazveme obecnou rovnicí nadroviny ϱ v projektivním rozšíření aritmetického afinního prostoru.

3.2 Řešitelnost soustav lineárních rovnic

Hledáme $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{T}^n$, které je řešením soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

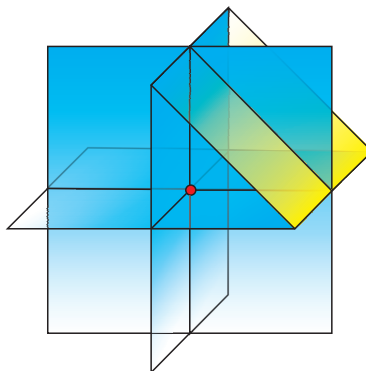
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (6)$$

Každá z rovnic soustavy (6) je obecnou rovnicí nadroviny v afinním prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$. Z geometrického hlediska nejde o nic jiného než o hledání společných bodů těchto nadrovin – označme je $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$. Jak je dobře známo, řešení soustavy (6) existovat může, ale nemusí.

Přejdeme-li do projektivního rozšíření afinního prostoru $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, -)$, nabudou rovnice (6) tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n - b_1\xi_0 &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n - b_2\xi_0 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \dots + a_{mn}\xi_n - b_m\xi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Řešením této soustavy budou homogenní souřadnice všech vlastních bodů splňujících (6) – jsou to ta řešení, kde $\xi_0 \neq 0$ – ale také homogenní souřadnice všech nevlastních bodů, které leží v průseku zaměření nadrovin $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ – jsou to ta řešení, kde $\xi_0 = 0$.



Obrázek 2 Zaměření rovin $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ a ϱ_4 se protínají pouze v podprostoru $\langle\langle 0, 0, 0 \rangle\rangle$.

Z pohledu lineární algebry soustava (7) jistě řešení má, nesmíme však zapomínat, že nulový vektor nepředstavuje homogenní souřadnice žádného z bodů projektivního rozšíření afinního prostoru.

Případ, kdy má soustava (7) pouze jediné řešení tedy z geometrického pohledu znamená, že nadroviny $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ nemají žádné společné body – ani vlastní, ani nevlastní (jejich zaměření se protínají pouze v triviálním podprostoru). Tato situace může nastat pouze v případě, že řešíme soustavu alespoň $n + 1$ rovnic o n neznámých. Pokud bude rovnic méně než $n + 1$, bude mít soustava (7) jistě nekonečně mnoho řešení – nadroviny $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ budou mít jistě nějaké společné body, ať už vlastní, či nevlastní.

3.3 Příklady řešení soustav lineárních rovnic

Uvedeme příklady demonstrující podobnosti a rozdíly mezi řešením soustavy lineárních rovnic v afinním prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, -)$ a v jeho projektivním rozšíření.

Příklad 3.1. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\x_1 + x_3 &= 8 \\x_1 - x_2 + x_3 &= 4.\end{aligned}\tag{8}$$

Řešení. Nejprve tuto soustavu, jejíž rovnice jsou rovnicemi rovin ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3 v afinním prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, vyřešíme jako obvykle pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 9 \\1 & 0 & 1 & 8 \\1 & -1 & 1 & 4\end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 9 \\0 & -1 & 0 & -1 \\0 & -2 & 0 & -5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 9 \\0 & -1 & 0 & -1 \\0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r}_2 \end{array}.$$

Odtud vyplývá, že soustava (8) nemá řešení! Tedy roviny ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3 se neprotínají v žádném vlastním bodě.

Vyřešíme tutéž soustavu v projektivním rozšíření afinního prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$. Rovnice nabudou tvaru

$$\begin{aligned}\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 9\xi_0 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_3 - 8\xi_0 &= 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 4\xi_0 &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Soustavu (9), jejíž rovnice jsou rovnicemi rovin ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3 v projektivním rozšíření afinního prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, vyřešíme opět pomocí Gaussovy eliminační metody (za čárou by byly samé nuly – dohodněme se, že je tam nebudeme psát):

$$\left(\begin{array}{cccc}1 & 1 & 1 & -9 \\1 & 0 & 1 & -8 \\1 & -1 & 1 & -4\end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc}1 & 1 & 1 & -9 \\0 & -1 & 0 & 1 \\0 & -2 & 0 & 5\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc}1 & 1 & 1 & -9 \\0 & -1 & 0 & 1 \\0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \xi_3 = t, \xi_1 = -t \\ \Rightarrow \xi_2 = 0 \\ \Rightarrow \xi_0 = 0 \end{array}$$

Soustavě (9) tedy vyhovují homogenní souřadnice

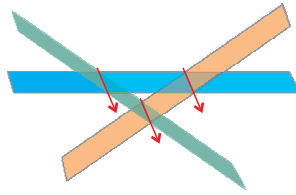
$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_0) = (-t, 0, t, 0) = t(-1, 0, 1, 0).\tag{10}$$

Vidíme, že neexistují žádné vlastní body, jejichž homogenní souřadnice by vyhovovaly (9). Neexistuje proto žádný bod $X = [x_1, x_2, x_3] \in \varrho_1 \cap \varrho_2 \cap \varrho_3$. Tedy soustava (8) nemá řešení!

Z (10) plyne, že všechny body, které mají roviny ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3 společné, jsou nevlastní. Jedná se o směry $\langle (v_1, v_2, v_3) \rangle$, které mají homogenní souřadnice

$$(v_1, v_2, v_3, 0) = t(-1, 0, 1, 0).$$

Odtud plyne, že roviny ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3 nemají žádný společný vlastní bod, ale jejich zaměření se protínají ve směru $\langle (-1, 0, 1) \rangle$. \square



Obrázek 3 Roviny ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_3 mají společný pouze nevlastní bod $\langle(-1, 0, 1, 0)\rangle$.

Příklad 3.2. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Řešení. Nejprve tuto soustavu, jejíž rovnice jsou rovnicemi rovin ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_3 v afinním prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, vyřešíme jako obvykle pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+2\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Vyřešíme tutéž soustavu v projektivním rozšíření afinního prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$. Rovnice nabudou tvaru

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_0 &= 0 \\ \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 - 3\xi_0 &= 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Soustavu (12), jejíž rovnice jsou rovnicemi rovin ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_3 v projektivním rozšíření afinního prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, vyřešíme opět pomocí Gaussovy eliminační metody (za čarou by byly samé nuly – dohodněme se, že je tam nebudeme psát):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+2\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \xi_1 &= -t \\ \xi_2 &= 0 \\ \xi_0 &= t, \xi_3 = 2t \end{aligned}$$

Soustavě (12) tedy vyhovují homogenní souřadnice

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_0) = (-t, 0, 2t, t) = t(-1, 0, 2, 1). \quad (13)$$

Volbou $\xi_0 = t = 1$ obdržíme homogenní souřadnice vlastních bodů $X = [x_1, x_2, x_3] \in \varrho_1 \cap \varrho_2 \cap \varrho_3$:

$$(x_1, x_2, x_3, 1) = (-1, 0, 2, 1), \quad \text{tedy} \quad X = [-1, 0, 2] \text{ je řešením soustavy (11).}$$

Volbou $\xi_0 = t = 0$ obdržíme homogenní souřadnice nevlastních bodů (směrů) $\langle(v_1, v_2, v_3)\rangle$, které mají roviny ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_3 společné:

$$(v_1, v_2, v_3, 0) = (0, 0, 0, 0), \quad \text{ale} \quad \langle(0, 0, 0, 0)\rangle \notin \mathbb{P}_3.$$

Proto nemají roviny ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_3 žádný společný (nenulový) jednosměr! □

4 Využití při hledání asymptot

Přechod do projektivního rozšíření afinního prostoru $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, -)$ můžeme využít také při hledání asymptot funkce.

Příklad 4.1. Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 2}$.

Řešení. Řešení s přechodem do projektivního rozšíření afinní roviny $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, -)$ by mohlo vypadat, jak následuje.

Souřadnice každého vlastního bodu $X = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ ležícího na grafu funkce f splňují

$$y = \frac{2x^2 + 1}{x + 2}.$$

Odtud

$$yx + 2y - 2x^2 - 1 = 0.$$

Substitucí $x = \frac{\xi_1}{\xi_0}$ a $y = \frac{\xi_2}{\xi_0}$ zjistíme, že homogenní souřadnice (ξ_1, ξ_2, ξ_0) vlastního bodu $\langle(x, y, 1)\rangle$ splňují

$$\xi_2 \xi_1 + 2 \xi_2 \xi_0 - 2 \xi_1^2 - \xi_0^2 = 0. \quad (14)$$

Jde tedy o kvadriku (hyperbolu):

$$f(\langle(\xi_1, \xi_2, \xi_0)\rangle, \langle(\xi_1, \xi_2, \xi_0)\rangle) = \langle(\xi_1, \xi_2, \xi_0)\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Její nevlastní body $N = \langle(v_1, v_2, 0)\rangle$ (směry asymptot) zjistíme z (14) přechodem: $\xi_1 = v_1$, $\xi_2 = v_2$, $\xi_0 \rightarrow 0$. Obdržíme:

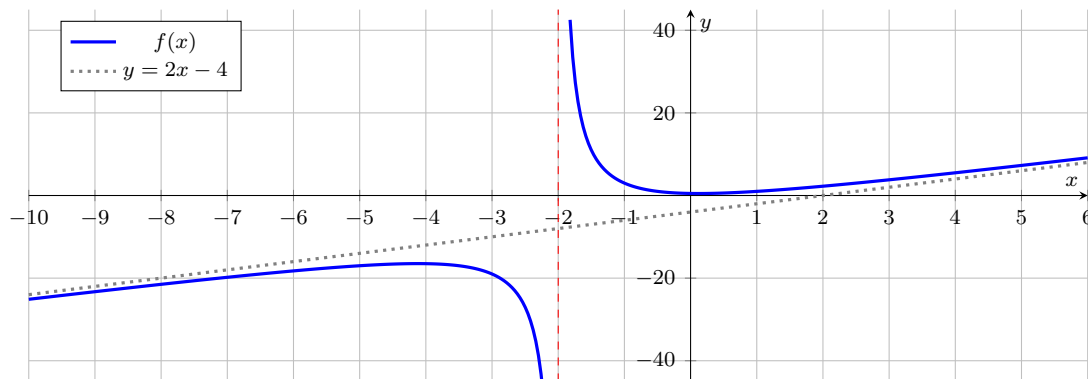
$$v_2 v_1 - 2v_1^2 = 0.$$

Protože $v_2 v_1 - 2v_1^2 = v_1(v_2 - 2v_1) = 0$, je zřejmé, že tato kvadrika má dva nevlastní body s homogenními souřadnicemi

$$N_1 = (v_1, v_2, 0) = t(0, 1, 0),$$

$$N_2 = (v_1, v_2, 0) = t(1, 2, 0).$$

Funkce f proto bude mít asymptotu p_1 se směrovým vektorem $(0, 1)$ a asymptotu p_2 se směrovým vektorem $(1, 2)$. Rovnice asymptot (jedná se vlastně o tečny kvadriky v nevlastních bodech) pak můžeme



Obrázek 4 Graf funkce $y = \frac{2x^2 + 1}{x + 2}$.

určit z (15) jako

$$\begin{aligned}
 p_1 : \quad f(N_1, (\xi_1, \xi_2, \xi_0)) &= (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_0 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2}\xi_1 - \xi_0 = 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 : \quad f(N_2, (\xi_1, \xi_2, \xi_0)) &= (1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_0 \end{pmatrix} \\
 &= \xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 - 2\xi_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Rovnice (16) a (17) jsou v projektivním rozšíření afinní roviny rovnicemi přímk (asymptot)

$$\begin{aligned}
 p_1 : \quad & -x - 2 = 0, \\
 p_2 : \quad & 2x - y - 4 = 0.
 \end{aligned} \quad \square$$

5 Využití v počítačové grafice

Projektivní rozšíření afinní roviny je možné využít v počítačové grafice, protože umožňuje jednotný matematický popis geometrických transformací (viz například [5]).

Můžeme uvažovat například translaci (posunutí) a rotaci (otočení). Označme $r_\alpha : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ rotaci kolem počátku o úhel α . Toto zobrazení zobrazuje bod $X = [x_1, x_2]$ na bod $r_\alpha([x_1, x_2]) = X' = [x'_1, x'_2]$ a z vlastností násobení komplexních čísel snadno odvodíme (viz Obrázek 5), že

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\
 x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha
 \end{aligned} \quad \text{maticově:} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Podobně posunutí o vektor (a, b) je zobrazení $p_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, které zobrazuje bod $X = [x_1, x_2]$ na bod $p_{(a,b)}([x_1, x_2]) = X' = [x'_1, x'_2]$, kde

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 + a \\
 x'_2 &= x_2 + b
 \end{aligned} \quad \text{zapsáno maticově:} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že zatímco rotaci realizujeme násobením matic, posunutí provedeme součtem matic. Přejdem do projektivního rozšíření afinní roviny můžeme rotaci, posunutí i jejich složení realizovat součinem matic. Stačí si uvědomit, že rotace bod X s homogenními souřadnicemi $(\xi_1, \xi_2, \xi_0) = \xi_0(x_1, x_2, 1)$ zobrazuje na bod s homogenními souřadnicemi $(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_0) = \xi'_0(x'_1, x'_2, 1)$, kde

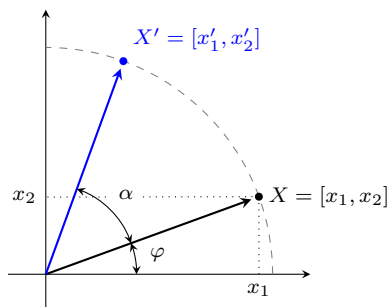
$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\
 x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \\
 1 &= 1
 \end{aligned} \quad \text{maticově:} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_\alpha} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno se rozmyslí, že $\mathbf{R}_\alpha^{-1} = \mathbf{R}_{-\alpha} = \mathbf{R}_\alpha^\top$.

Podobně posunutí o vektor (a, b) zobrazuje bod X s homogenními souřadnicemi $(\xi_1, \xi_2, \xi_0) = \xi_0(x_1, x_2, 1)$ na bod s homogenními souřadnicemi $(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_0) = \xi'_0(x'_1, x'_2, 1)$, kde

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + a \\ x'_2 &= x_2 + b \\ 1 &= 1 \end{aligned} \quad \text{maticově:} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_{(a,b)}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno se rozmyslí, že $\mathbf{P}_{(a,b)}^{-1} = \mathbf{P}_{(-a,-b)}$. Tato maticová reprezentace umožňuje snadnou transformaci



Obrázek 5 Rotace bodu X kolem počátku o úhel α . Víme, že $(x_1 + ix_2)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r(\cos(\alpha + \varphi) + i \sin(\alpha + \varphi)) = x'_1 + ix'_2$. Ale platí také $(x_1 + ix_2)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = (x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) + i(x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) = x'_1 + ix'_2$. Srovnáním reálných a imaginárních částí v poslední rovnosti obdržíme rovnice (18).

obrázků. Například matici rotace obrázku kolem bodu $[m, n]$ o úhel α obdržíme jako součin matic:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(-m,-n)} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{P}_{(m,n)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -m \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & m \cos \alpha - n \sin \alpha - m \\ \sin \alpha & \cos \alpha & m \sin \alpha + n \cos \alpha - n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že s touto aplikací projektivního rozšíření se (alespoň podle níže uvedené osnovy) studenti informatiky setkají ve čtvrté přednášce předmětu 460-2021/05 – Základy počítačové grafiky.

Osnova předmětu (přednášky)

1. Úvod, rastrový a vektorový popis (bod, vektor, přímka, souřadný systém), generování objektů v rastru (interpolace).
2. Grafický hardware, funkční schéma (rendering pipeline). Úvod do standardního zobrazovacího řetězce (OpenGL).
3. Reprezentace 3D objektů (polygonální, CSG, procedurální reprezentace). Topologie. Formáty (OBJ apod.).
4. Transformace v PG (translace, rotace, změna měřítka), homogenní souřadný systém.



6 Závěr

Zařazení projektivního rozšíření afinního prostoru do výuky by pro vyučující bylo jistě zajímavé a pro studenty aplikované matematiky i informatiky jistě užitečné. Bylo by to ale také velice obtížné. Obtížné pro vyučující. Už před zkrácením semestru na VŠB-TUO na třináct týdnů často marně bojovali s časem aby stihli probrat vše, co stihnout měli. Obtížné pro mnohé studenty. Vzhledem k nastavení přijímacího řízení nezanedbatelná část z nich sice bez potíží sčítá čísla celá, o číslech racionálních se to ale říci nedá.

Reference

- [1] BURIAN, Květoslav. *Kapitoly z geometrie I*. 1. vyd. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 1996. ISBN 80-7042-451-0.
- [2] BURIAN, Květoslav. *Kapitoly z geometrie II*. 1. vyd. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 1996. ISBN 80-7042-452-9.
- [3] SEKANINA, Milan, BOČEK, Leo, KOČANDRLE, Milan, ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Geometrie I*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. Učebnice pro vysoké školy. Obrázky narýsovala Alena Šarounová.
- [4] SEKANINA, Milan, BOČEK, Leo, KOČANDRLE, Milan, ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Geometrie II*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. Učebnice pro vysoké školy. Obrázky narýsovala Alena Šarounová.
- [5] ŽÁRA, Jiří. *Moderní počítačová grafika*. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2004. Učebnice pro vysoké školy. ISBN 80-251-0454-0.



Fraktály a GeoGebra

Jana Volná  Petr Volný

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Chtěli bychom představit možnosti GeoGebry při tvorbě fraktálů.

Klíčová slova GeoGebra, fraktály.

1 Úvod

S fraktály se můžeme potkat na mnoha místech. Na Wikipedii [5] se např. můžeme dočíst, že fraktál je podle původní Mandelbrotovy definice [3] množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická. Lze jej také definovat poněkud jednodušeji jako geometrický objekt, který

- je soběpodobný – znamená to, že pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar (motiv),
- mívá na první pohled složitý tvar, ale je generován opakovaným použitím jednoduchých pravidel.


Fraktály se jeví jako nejsložitější geometrické objekty, které současná matematika zkoumá, mají však často překvapivě jednoduchou matematickou strukturu.

Fraktály lze rozdělit podle způsobu jejich generování na *geometrické* (striktně soběpodobné, např. Kochova vločka), *algebraické* (iterace komplexních funkcí, např. Mandelbrotova množina), *stochastické* (náhodné, modelující přírodu) a *L-systémy* (Lindenmayerův systém je varianta formální gramatiky, vyvinutá pro modelování růstu rostlin, např. Gosperova křivka). Více informací naleznete např. na stránce Wikipedie nebo na stránce <https://www.ksr.tul.cz/fraktaly/geometrie.html>.

Fraktály lze vytvářet v celé řadě grafických programů, naším programem je GeoGebra. Inspirací pro tento příspěvek byl workshop na akci Užití počítačů ve výuce matematiky, který proběhl v Českých Budějovicích ve dnech 13.–15. listopadu 2025. Workshop s názvem „Fraktály v GeoGebře“ vedl kolega Mgr. Tomáš Fabián z Gymnázia ve Dvoře Králové nad Labem [2]. Workshop byl velmi pěkný a podnětný, nicméně nás napadlo, zdali by se nenašel jednodušší postup tvorby fraktálů v GeoGebře ideálně tak, aby každá rekurze při tvorbě fraktálů byla generovaná pokud možno co nejjednodušeji.

Odkazujeme také i na další návody na tvorbu fraktálů v GeoGebře, kterými se zabýval uživatel GeoGebry Rudolf Málek, jehož návody jsou k dispozici na příložených odkazech.

- 01_VZOR_PYTHAGORŮV STROM
<https://www.geogebra.org/m/esfqcaas>
- 02_VZOR_TROJUHELNÍKY
<https://www.geogebra.org/m/rp3rtwft>

 Korespondenční autor (jana.volna@vsb.cz).

- 03_VZOR_ČTVERCE
<https://www.geogebra.org/m/br4ctyr4>
- 04_VZOR_FRAKTÁLOVÝ STROMEČEK
<https://www.geogebra.org/m/pgfeuudd>

Návod na tvorbu Pythagorova stromu naleznete také v příspěvku Jany Bělohlávkové ve sborníku semináře Moderní matematické metody v inženýrství, 2013, viz [1].

Zde jsou další odkazy, na kterých se můžete podívat na již hotové fraktály.

- Modificato da: Fractal '5 Squares' (leucotea, Arthur Lee)
<https://www.geogebra.org/m/q8tp35hf>
(používá posloupnosti a stejnolehlost)
- Fractal Tree (John Golden)
<https://www.geogebra.org/m/dkdPeHhg>
(používá vlastní nástroj treebranch na tvorbu dvou nových větví a klikání)
- fractal fern (rob)
<https://www.geogebra.org/m/UqC7FRZP>
(jiný pohled na fraktál kapradí s využitím náhodných čísel)
- Fractal tipo Newton (Carlos Fleitas)
<https://www.geogebra.org/m/huA9bg7E>
(fraktál pomocí komplexních čísel)
- Pythagoras tree fractal (Juan Carlos Ponce Campuzano)
<https://www.geogebra.org/m/VU4SUVUp>
(používá vlastní nástroj points a posloupnosti, stejně jako my)

Většina konstrukcí je založena na tvorbě nového nástroje, který se pomocí klikání používá na vytváření nových částí fraktálů. A pokud chceme získat vyšší rekurzi, tak je toho klikání poměrně hodně. Proto jsme se pokusili o zjednodušení konstrukce fraktálů prostřednictvím kombinace příkazu GeoGerby Nový nástroj a příkazu Posloupnost, resp. příkazu Iterace. Taková konstrukce pak bude více automatizovaná, a tedy i méně klikací.

Na začátku tvorby aplikace pro konstrukci fraktálu bylo důležité si rozmyslet, co budou vstupní objekty a co budou výstupní objekty jednotlivých nově vytvořených nástrojů. Většinou jsme pro tvorbu jednoho fraktálu potřebovali vytvořit alespoň dva nástroje, přičemž první z nich byl podobný těm, se kterými jsme se seznámili na workshopu kolegy Fabiána, nebo které jsme našli na webu. Druhý nástroj pak ze seznamu již vytvořené části fraktálu generuje nový seznam pro další rekurzi.

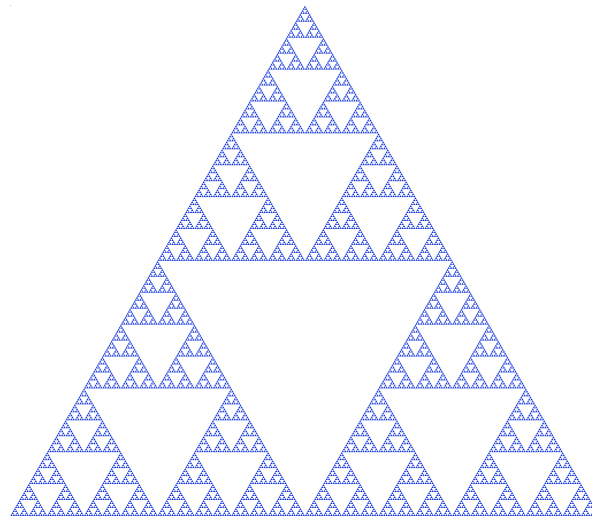
2 Konstrukce fraktálu 1 – Sierpiňského trojúhelník

V GeoGebře vytvoříme fraktál, který je znám jako Sierpiňského trojúhelník.

2.1 Vytvoření fraktálu pomocí klikání

Nejdříve si vytvoříme nástroj, který dvěma bodům A, B v rovině vytvoří převrácený středový trojúhelník (díru uprostřed) v rovnostranném trojúhelníku se základnou A, B .

- V rovině vytvoříme dva body A, B .
- Pro lepší představu sestrojíme rovnostranný trojúhelník pomocí nástroje Pravidelný mnohoúhelník, vybereme body A, B a zadáme počet vrcholů 3.



Obrázek 1 Sierpiňského trojúhelník, Wikipedia

- Do vstupu zadáme postupně

```
D=Rotace(B,60°,StredSoumernosti(A,B))
E=Rotace(StredSoumernosti(A,B),60°,A)
F=StredSoumernosti(A,B)
Mnolehelnik(D,E,F)
```

- U vytvořeného trojúhelníku nastavíme vhodnou barvu, neprůhlednost, tloušťku čáry na minimum.
- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj ...“, Výstupní objekty budou trojúhelník t_1 a body D, E, F . Vstupní objekty budou body A, B , název „Nový trojúhelník s body“, příkaz `NovyTrojuhelnikBody`, nápověda „dva body“.

Smažeme všechny objekty, vytvoříme dva body A, B , sestrojíme rovnostranný trojúhelník se základnou AB , nastavíme barvu nového trojúhelníku.

Vybereme nástroj „Nový trojúhelník s body“ a postupně klikáme na dvojice bodů $AB, AF, FB, ED, AI, IF, \dots$

Na závěr můžeme skrýt všechny body.

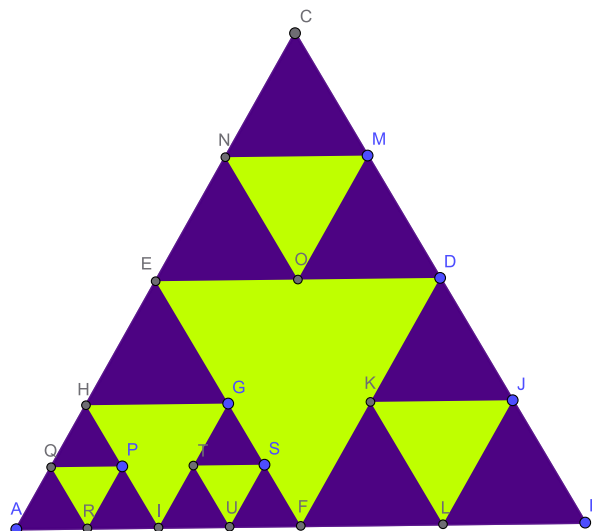
Je možné přidat posuvník n od 1 do 3 (úroveň fraktálu, ke které jsme se doklikali). Podle hodnoty posuvníku se budou zobrazovat trojúhelníky až do úrovně n . Do podmínek zobrazení objektu pro první trojúhelník DEF napíšeme $n \geq 1$, pro menší trojúhelníky GHI, JKL, MNO napíšeme $n \geq 2$ atd.

2.2 Tvorba fraktálu pomocí nových nástrojů

Začneme úplně od začátku. Nejdříve si vytvoříme nástroj, který dvěma bodům vytvoří středový převrácený trojúhelník. Použijeme trochu rychlejší způsob než v předchozím postupu.

- V rovině vytvoříme dva body A, B .
- Do vstupu zadáme

```
Mnolehelnik(Rotace(B,60°,StredSoumernosti(A,B)),
Rotace(StredSoumernosti(A,B),60°,A),StredSoumernosti(A,B))
```



Obrázek 2 Tvorba trojúhelníků v GeoGebře

- U vytvořeného trojúhelníku nastavíme vhodnou barvu, neprůhlednost, tloušťku čáry na minimum.
- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekt bude Trojúhelník t_1 , Vstupní objekty budou body A , B , název „Nový trojúhelník“, příkaz `NovyTrojuhelnik`, nápověda „dva body“.

Příkaz `NovyTrojuhelnik` použijeme pro tvorbu seznamu trojúhelníků a seznamu nových úseček ze známého seznamu úseček.

- Vytvoříme seznam, který bude vstupním seznamem nového nástroje, tento seznam nesmí být vázaný na již existující body. Zadáme do vstupu

```
PrvniUsecka={(6,1),(11,1)}
```

- Ze seznamu `PrvniUsecka` postupně vytvoříme tři seznamy nových úseček.
- První nový seznam bude pro každou dvojici bodů ze vstupního seznamu vytvářet dvojice, které při tvorbě předchozího nástroje odpovídaly bodům A , F ,

```
usecky1=Posloupnost(
  {
    Prvek(PrvniUsecka,b),
    StredSoumernosti(
      Prvek(PrvniUsecka,b),
      Prvek(PrvniUsecka,b+1)
    )
  },
  b,1,Delka(PrvniUsecka),2
)
```

- Druhý nový seznam bude pro každou dvojici bodů ze vstupního seznamu vytvářet dvojice, které při tvorbě předchozího nástroje odpovídaly bodům F , B ,



```

usecky2=Posloupnost(
  {
    StredSoumernosti(
      Prvek(PrvniUsecka,b),
      Prvek(PrvniUsecka,b+1)
    ),
    Prvek(PrvniUsecka,b+1)
  },
  b,1,Delka(PrvniUsecka),2
)

```

- Třetí nový seznam bude pro každou dvojici bodů ze vstupního seznamu vytvářet dvojice, které při tvorbě předchozího nástroje odpovídaly bodům E, D ,

```

usecky3=Posloupnost(
  {
    Rotace(
      StredSoumernosti(
        Prvek(PrvniUsecka,b),
        Prvek(PrvniUsecka,b+1)
      ),
      60°,Prvek(PrvniUsecka,b)
    ),
    Rotace(
      Prvek(PrvniUsecka,b+1),60°,
      StredSoumernosti(
        Prvek(PrvniUsecka,b),
        Prvek(PrvniUsecka,b+1)
      )
    )
  },
  b,1,Delka(PrvniUsecka),2
)

```

- Spojením těchto tří seznamů dostaneme nový seznam dvojic bodů pro tvorbu další úrovně fraktálu.

```

NoveUsecky=Spoj(
  {
    Spoj(usecky1),
    Spoj(usecky2),
    Spoj(usecky3)
  }
)

```

- Zároveň vytvoříme seznam, který bude obsahovat trojúhelníky vytvořené z úvodního seznamu $PrvniUsecka$ pomocí nástroje `NovyTrojuhelnik`,

```

NoveTrojuhelniky=Posloupnost(
  NovyTrojuhelnik(
    Prvek(PrvniUsecka,b),
    Prvek(PrvniUsecka,b+1)
  ),
  b,1,Delka(PrvniUsecka),2
)

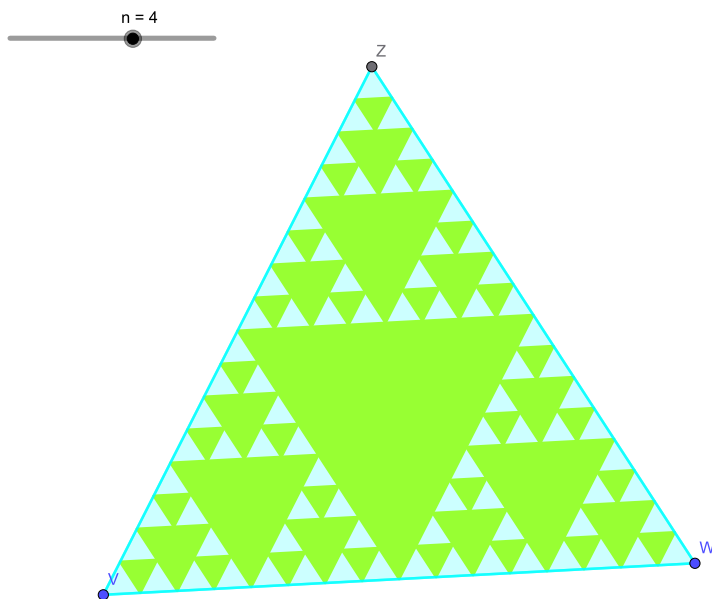
```

- Seznamy `usecky1`, `usecky2`, `usecky3` a `NoveUsecky` skryjeme, u seznamu `NoveTrojuhelniky` nastavíme barvu, neprůhlednost, tloušťku čáry na minimum.
- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekty budou seznamy `NoveTrojuhelniky`, `NoveUsecky`. Vstupní objekty bude seznam `PrvniUsecka`, název „Nová úroveň trojúhelníků“, příkaz `NovaUrovenTrojuhelniku`. Nápověda k nástrojům: „Vyberte seznam dvojic bodů“.

Když máme nástroj vytvořený, tak si ho můžeme vyzkoušet. Vybereme si v náčrtně nebo vytvoříme dva body V, W . Vytvoříme z nich seznam $l1=\{V, W\}$. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník s vrcholy V, W , nastavíme barvu a neprůhlednost. Vybereme nástroj „Nová úroveň trojúhelníků“ a klikneme na seznam $l1$. Vytvoří se dva nové seznamy, $l2$ (je zobrazený) pro trojúhelníky a $l3$ (není zobrazený) pro nové dvojice bodů. S aktivním nástrojem „Nová úroveň trojúhelníků“ můžeme kliknout na $l3$ pro vytvoření dalších dvou seznamů pro další úroveň, pak kliknout na $l5$ atd. Můžeme si tak rychle vytvořit libovolný vhodný počet úrovní fraktálu.

Pokud nové trojúhelníky v Náčrtně nevidíme, mohou být schované pod rovnostranným trojúhelníkem se základnou VW , a v tom případě je můžeme zkusit přesunout do vyšší vrstvy.

Viditelnost každé úrovně fraktálu můžeme nastavit podle hodnoty posuvníku n , seznam trojúhelníků $l2$ půjde vidět pro $n \geq 1$, seznam $l4$ půjde vidět pro $n \geq 2$, seznam $l6$ půjde vidět pro $n \geq 3$ atd.



Obrázek 3 Sierpiňského trojúhelník 4. rekurze v GeoGebře

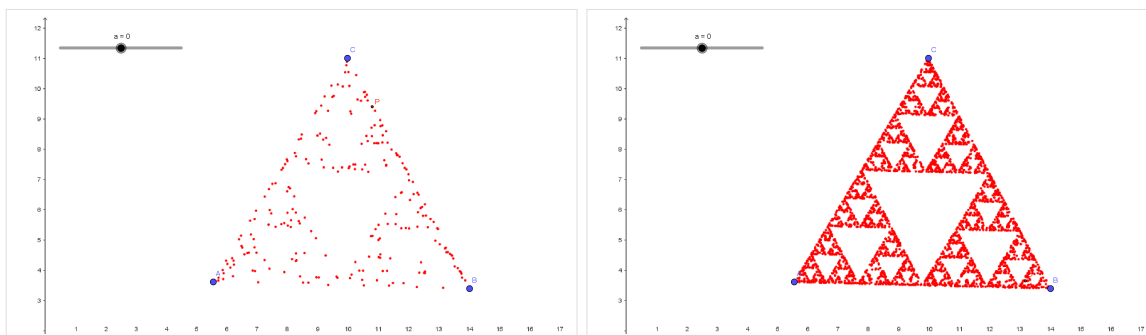
2.3 Jiný pohled na fraktál Sierpiňského trojúhelník

Fraktál Sierpiňského trojúhelník lze také získat pomocí polohy bodů, které vznikají náhodně pomocí určitého pravidla. Stačí v GeoGebře vytvořit tři vrcholy trojúhelníku A, B, C a čtvrtý bod P . Poloha bodu P se bude v každém kroku měnit tak, že se posune na poloviční vzdálenost od náhodně zvoleného vrcholu A, B nebo C .

- Vytvoříme body A, B, C a P .
- Vytvoříme seznam $l1=\{A, B, C\}$
- Vytvoříme posuvník a a do Skriptování - Po aktualizaci napíšeme

```
NastavitHodnotu(P, StredSoumernosti(P, Prvek(l1, NahodneMezi(1, 3))))
```

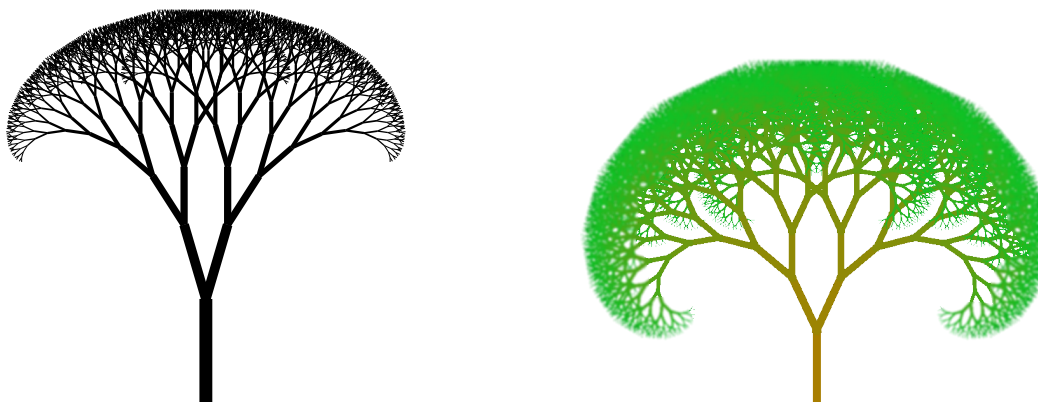
- Bod P zmenšíme, nastavíme vhodnou barvu, zapneme jeho stopu a přesuneme na vrchol C . Zapneme animaci posuvníku a a počkáme na výsledek.



Obrázek 4 Sierpiňského trojúhelník generovaný pomocí náhodné polohy bodu

3 Konstrukce fraktálu 2 – Strom

V GeoGebře pomocí nových nástrojů vytvoříme fraktál, kterému se často říká fraktální strom.



Obrázek 5 Fraktální strom
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fractal_canopy.svg
<https://www.pngegg.com/cs/png-ymhfb>

3.1 Nástroje pro tvorbu nových dvou větví

Nejdříve si vytvoříme nástroj, který dvěma bodům A, B v rovině vytvoří dvě nové větve vycházející z bodu B . V jednodušší variantě můžeme zvolit pevný úhel α , který nové větve svírají s úsečkou AB , a pevný násobek p , na který se zkrátí délka nových větví. Pokud chceme mít možnost tyto hodnoty změnit i po vytvoření stromu, tak si nejdříve vytvoříme posuvníky, které musíme zahrnout do vstupních objektů nového nástroje.

- Vytvoříme posuvník α od 0° do 180° .
- Vytvoříme posuvník p od 0 do 1, krok 0.01.

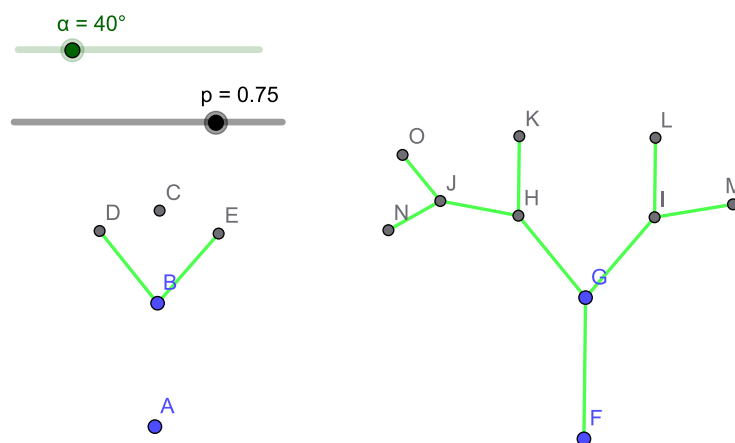
- V rovině vytvoříme dva body A, B .
- Do vstupu postupně zadáme

$$C=B+p*(B-A)$$

$$D=Rotace(C, \alpha, B)$$

$$E=Rotace(C, -\alpha, B)$$
- Vybereme nástroj „Lomená čára“ a klikneme postupně na body D, B, E, D .
- U vytvořené lomené čáry nastavíme vhodnou barvu a tloušťku čáry, skryjeme popis.
- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekt bude lomená čára f , Vstupní objekty budou body A, B , úhel α a číslo p , název nástroje „Nové větve“, příkaz `NoveVetve`. Nápopvěda „Dva body, úhel a číslo“.
- Pokud bychom chtěli všechny nové větve vytvářet ručně klikáním, tak můžeme z Menu vybrat „Vytvořit nový nástroj...“, u kterého do Výstupních objektů přidáme kromě lomené čáry f také nové body D, E . Vstupní objekty budou body A, B , úhel α a číslo p . Název nástroje „Nové větve s body“, příkaz `NoveVetveBody`, nápopvěda „Dva body, úhel a číslo“.

Nástroje je vhodné vyzkoušet na libovolných nových bodech v nákrese.



Obrázek 6 Tvorba nových větví v GeoGebře pomocí nástroje „Nové větve s body“

3.2 Rychlejší verze tvorby nástroje „Nové větve“

- Vytvoříme posuvník α od 0° do 180° ; posuvník p od 0 do 1, krok 0.01; a dva body A, B .
- Do vstupu zadáme

$$\text{LomenaCara}(\text{Rotace}(B+p*(B-A), \alpha, B), B, \text{Rotace}(B+p*(B-A), -\alpha, B))$$
- U vytvořené lomené čáry nastavíme vhodnou barvu a tloušťku čáry, skryjeme popis.
- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekty bude lomená čára f , Vstupní objekty budou body A, B , úhel α a číslo p , název nástroje „Nové větve“, příkaz `NoveVetve`. Nápopvěda „Dva body, úhel a číslo“.



3.3 Tvorba nástroje pro automatickou tvorbu následující úrovně fraktálu strom

- V Nákresně necháme posuvníky α a p , všechno ostatní smažeme.
- Vytvoříme seznam, který bude vstupním seznamem nového nástroje, tento seznam nesmí být vázaný na již existující body. Zadáme do vstupu

```
PrvniDvojice={(8,1),(8,4)}
```

- Ze seznamu PrvniDvojice vytvoříme seznam lomených čar pomocí příkazu NoveVetve.
- NovaUrovenVetvi=Posloupnost(

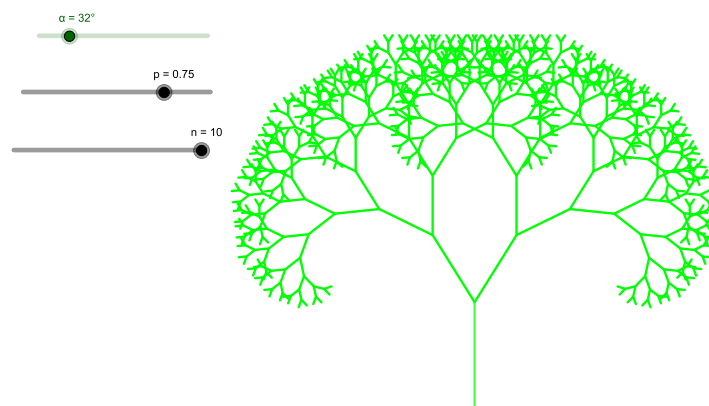
```
    NoveVetve(
        Prvek(PrvniDvojice, b),
        Prvek(PrvniDvojice, b+1),
         $\alpha$ , $p$ 
    ),
    b, 1, Delka(PrvniDvojice), 2
)
```

Nastavíme barvu, tloušťku.

- NovaUrovenDvojic=Spoj(
 Posloupnost(
 {
 Prvek(PrvniDvojice,b+1),
 Rotace(
 Prvek(PrvniDvojice,b+1)
 + p *(Prvek(PrvniDvojice,b+1)-Prvek(PrvniDvojice,b)),
 α ,
 Prvek(PrvniDvojice,b+1)
),
 Prvek(PrvniDvojice,b+1),
 Rotace(
 Prvek(PrvniDvojice,b+1)
 + p *(Prvek(PrvniDvojice,b+1)-Prvek(PrvniDvojice,b)),
 $-\alpha$,
 Prvek(PrvniDvojice,b+1)
)
 },
 b,1,Delka(PrvniDvojice),2
)
)

Tento seznam skryjeme.

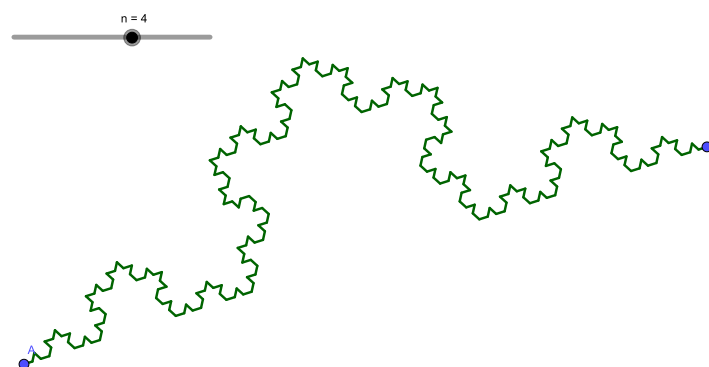
- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekty budou seznamy NovaUrovenVetvi, NovaUrovenDvojic, Vstupní objekty budou seznam PrvniDvojice, úhel α a číslo p , název nástroje „Nová úroveň stromu“, příkaz NovaUrovenStromu, nápověda „seznam dvojic, úhel a číslo“.
- Nový nástroj použijeme na nově vytvořené seznamy dvojic pro vytvoření další úrovně. Seznamy lomených čar slouží k zobrazení nové úrovně.
- Vytvoříme posuvník n , jehož maximální hodnotu nastavíme na počet nově vytvořených seznamů větví. Do podmínek zobrazení nově vytvořených seznamů větví přidáme podmínku závisující na hodnotě n .



Obrázek 7 Strom 10. rekurze v GeoGebře

4 Konstrukce fraktálu 3 – Kochova křivka

V GeoGebře pomocí nového nástroje vytvoříme fraktál, kterému se říká Kochova křivka.



Obrázek 8 Kochova křivka

4.1 Kochova křivka pomocí nového nástroje a příkazu Posloupnost

- Vytvoříme dva body A , B .
- Postupně vytvoříme tři nové body

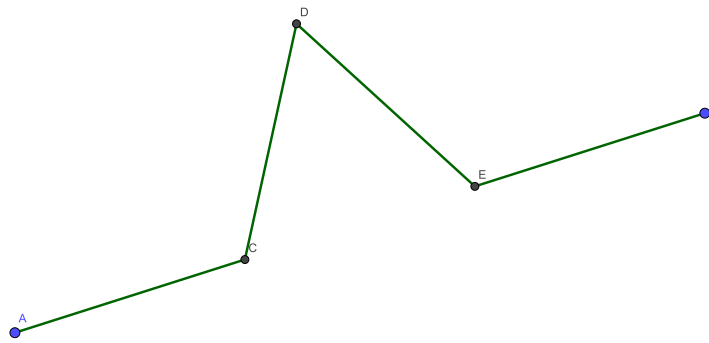
$$C = A + \frac{1}{3}(B - A)$$

$$E = A + \frac{2}{3}(B - A)$$

$$D = \text{Rotace}(E, 60^\circ, C)$$

- Body spojíme úsečkami

```
seznam1={
  Usecka(A,C),
  Usecka(C,D),
  Usecka(D,E),
  Usecka(E,B)
}
```

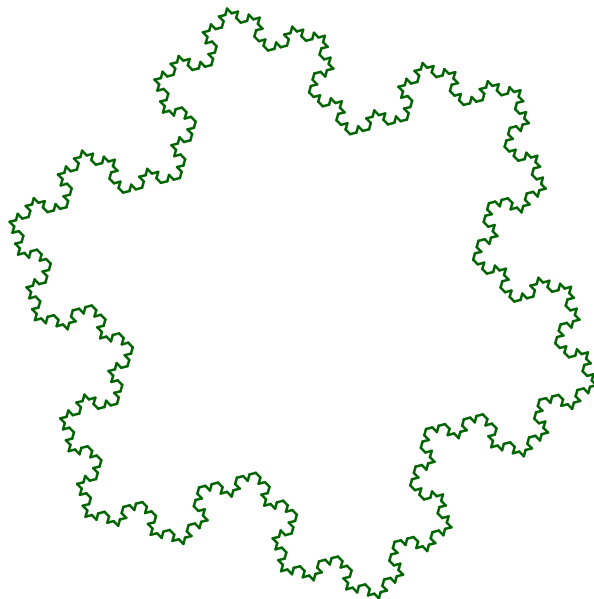


Obrázek 9 Nástroj KochKrok pro Kochovu křivku v GeoGebře

- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekty seznam1, Vstupní objekty body A, B, název i příkaz KochKrok, nápověda „dva body“.
 - Pomocí nástroje KochKrok budeme ze seznamu úseček postupně vytvářet nové seznamy nových úseček následující rekurze (mění se pouze čísla na konci názvů seznamů).
 - seznam2=Spoj(
 - Posloupnost(
 - KochKrok(
 - Vrchol(Prvek(seznam1,m),1),
 - Vrchol(Prvek(seznam1,m),2)
 -),
 - m,1,Delka(seznam1)
 -)
- seznam3=Spoj(
 - Posloupnost(
 - KochKrok(
 - Vrchol(Prvek(seznam2,m),1),
 - Vrchol(Prvek(seznam2,m),2)
 -),
 - m,1,Delka(seznam2)
-)
- ...
- seznam6=Spoj(
 - Posloupnost(
 - KochKrok(
 - Vrchol(Prvek(seznam5,m),1),
 - Vrchol(Prvek(seznam5,m),2)
 -),
 - m,1,Delka(seznam5)
-)
- Vytvoříme posuvník n od 1 do 6, krok 1. Do podmínek zobrazení jednotlivých seznamů přidáme podmínku $n=1$ pro seznam1, podmínku $n=2$ pro seznam2, ..., podmínku $n=6$ pro seznam6.

- Skryjeme nepotřebné body.

4.2 Kochova vločka s využitím příkazu Iterace



Obrázek 10 Kochova vločka pro $n = 4$

Na začátku vytvoříme nástroj KochKrok stejným způsobem, jako v předchozím postupu.

- Vytvoříme dva body A , B .
- Postupně vytvoříme tři nové body

$$\begin{aligned} C &= A + 1/3(B-A) \\ E &= A + 2/3(B-A) \\ D &= \text{Rotace}(E, 60^\circ, C) \end{aligned}$$

- Body spojíme úsečkami

```
seznam1={
  Usecka(A,C),
  Usecka(C,D),
  Usecka(D,E),
  Usecka(E,B)
}
```

- Z Menu vybereme „Vytvořit nový nástroj...“, Výstupní objekty je seznam1, Vstupní objekty jsou body A , B , název i příkaz KochKrok, nápověda „dva body“.

V dalších krocích si vytvoříme posuvník a trojúhelník, jehož tři strany budou třemi počátečními úsečkami pro použití nástroje KochKrok.

- Vytvoříme posuvník n od 1 do 6, krok 1.
- Vytvoříme rovnostranný trojúhelník B , A , F , trojúhelník i body skryjeme.



- Do vstupu napíšeme

```

Koch=Iterace(
  Spoj(
    Zip(
      KochKrok(
        Vrchol(s,1),
        Vrchol(s,2)
      ),
      s,L
    )
  ),
  L,{{Usecka(A,B),Usecka(B,F),Usecka(F,A)}} ,n
)

```

5 Závěr

V příspěvku jsme představili několik možností tvorby fraktálů v GeoGebře. Plánujeme využít některé nejjednodušší konstrukce při realizaci kroužku „Hravá matematika s počítačem“ v rámci Junior univerzity na VŠB-TUO [4]. Aplety jednotlivých fraktálů v GeoGebře naleznete na adrese <https://www.geogebra.org/m/eynakptd#chapter/1324125>, resp. <https://ggi.vsb.cz/>.

Poděkování Autoři děkují za podporu Katedře matematiky, Fakulta stavební, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava.

Reference

- [1] BĚLOHLÁVKOVÁ, Jana. Pythagorův strom a Bézierova křivka. In: *Sborník z 22. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, česko-polský seminář*. Ostrava, 2013, s. XXXIV–XXXVIII. ISBN 978-80-248-3233-3. Dostupné také z: https://konference3mi.vsb.cz/stare_rocniky/3mi2013/sbornik/sbornik2013.pdf.
- [2] FABIÁN, Tomáš. Dynamická geometrie aneb GeoGebra v akci. In: *Sborník příspěvků 12. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice, 2025, s. 39–46. ISBN 978-80-7694-161-8. Dostupné také z: <https://home.pf.jcu.cz/~upvm/2025/wp-content/uploads/2026/04/sbornik.pdf>.
- [3] MANDELBROT, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*. Echo Point Books & Media, 2021. ISBN 978-1-64837-041-0.
- [4] MORÁVKOVÁ, Zuzana, SCHREIBEROVÁ, Petra, VOLNÁ, Jana, VOLNÝ, Petr. Hravá matematika s počítačem: vývoj a realizace kroužku pro děti. In: *Sborník příspěvků 12. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2025, s. 98–114. ISBN 978-80-7694-161-8. Dostupné také z: <https://home.pf.jcu.cz/~upvm/2025/wp-content/uploads/2026/04/sbornik.pdf>.
- [5] *Wikipedia* [online] [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://www.wikipedia.org/>.



Zkušenost s Copilot agentem při tvorbě STACK úloh

Zuzana Pátíková 

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, 760 05 Zlín


Abstrakt Článek shrnuje zkušenost s využitím Copilot agenta při tvorbě matematických úloh v systému STACK. Specializovaný agent s přístupem k dokumentaci měl za cíl urychlit přípravu zadání a generovat i kompletní XML soubory pro Moodle. Testování ukázalo, že AI dokáže výrazně zjednodušit tvorbu úlohy, zpětné vazby i kódu v Maximě, což je cenné zejména pro začínající autory. Současně se však v případě neodladěného použití objevily nedostatky, například chyby v XML či používání nepodporovaných funkcí. Jako praktické doporučení se osvědčilo vycházet z vlastní šablony úlohy. Copilot agent se ukázal jako užitečná podpora, i když stále vyžaduje kontrolu zkušeného uživatele.

Klíčová slova Generované úlohy, STACK, moodle, AI agent.

1 Úvod

Na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně využívá část vyučujících matematiky už několik let systém STACK [1], [2], [3] jako plugin Moodle pro procvičování matematiky i pro průběžné hodnocení studentů. STACK umožňuje vytvářet úlohy s automatickou kontrolou výsledků, generováním náhodných parametrů a větvenou zpětnou vazbou. Výhodou je možnost připravit propracované, adaptivní a objektivně hodnocené úlohy, které odpovídají požadavkům daných kurzů nebo fungují pro potřeby zopakování a procvičení prerekvizitního učiva. Pro univerzitní prostředí má STACK oproti jiným podpůrným produktům ještě jednu zásadní výhodu: vyučující mají plnou kontrolu nad úlohami i celým hodnocením. Vidí dovnitř každého kroku, mohou úlohy upravovat, zdokonalovat a podle potřeby opakovaně použít. Oproti čistě AI generovaným aktivitám nejde o „černou skříňku“ – vzdělavatel zůstává tím, kdo rozhoduje o zadání, kritériích i interpretaci výsledků. Nevýhodou však zůstává časová náročnost tvorby a také poměrně vysoká odborná bariéra – zejména pokud chce autor plně využít potenciál prostředí, pracovat s větvenou zpětnou vazbou nebo pokročilejším kódem v jazyce Maxima.

V poslední době roste také zájem o školení nových tvůrců úloh. Pro začátečníky bývá jednodušší začít úpravami již existujících úloh a teprve postupně přejít k vlastní tvorbě od nuly. Ale i zkušenější tvůrce ocení urychlení práce při tvorbě základu úlohy. Proto jsme se rozhodli otestovat, jak by vhodně použitý AI nástroj mohl pomoci. Umělá inteligence dokáže navrhnout strukturu generovaných proměnných a parametrů, popis řešení, návrh analýzy běžných chyb i kód, který by uživatel jinak skládal dlouhou dobu. Běžný AI chat ovšem nemá trvalou paměť a na každý požadavek reaguje izolovaně. Proto vznikla myšlenka vytvořit specializovaného „agenta“, který bude mít přednastavené chování, přístup

 Korespondenční autor (patikova@utb.cz).

k dokumentaci STACKu a zvládne generovat i kompletní XML soubory připravené k importu do Moodle. Už samotná tato ambice má kromě zmíněných výhod i úskalí – generování XML vyžaduje naprostou přesnost a sebemenší chyba znamená nefunkční úlohu. Potenciál využití AI se zdá být velký, otázkou je, jak jej pro naše záměry využít.

2 Postup řešení

První část experimentu probíhala v placené verzi Copilot Pro (M365 Copilot EDU), která umožňuje nahrávat soubory přímo do prostředí agenta. Až následně byl vytvořen agent také ve standardním univerzitním účtu. Tento účet je součástí předplaceného univerzitního Microsoft balíku – tedy verze Copilota bez přístupu k aplikacím Office, který aktuálně umožňuje agenty bez možnosti nahrávání souborů. Přesto fungoval velmi dobře. Klíčem však bylo uvést všechny potřebné instrukce, šablony a ukázky přímo do popisu agenta. Prostor je sice omezený, ale lze pracovat s webovými odkazy a dostatečně stručnými popisy. I tato verze dokázala generovat použitelné návrhy STACK úloh.

Prvním krokem bylo zjistit, jak Copilot agent funguje a jak lze nastavit jeho chování. Copilot chat navrhl základní kostru agenta určeného pro tvorbu STACK úloh, která byla postupně doplněna o pravidla pro strukturu XML, použití jazyka Maxima, požadavky na zpětnou vazbu a další. V placené verzi byly dokumentace STACKu a ukázková úloha nahrány jako přílohy, v univerzitní verzi byly přidány přímo do popisu nebo jako odkaz na webovou stránku.

Jako testovací příklad byla zvolena jednoduchá úloha: výpočet kořenů kvadratické rovnice pomocí vytýkání. Díky tomu bylo možné soustředit se především na kvalitu vygenerovaného XML souboru, nikoli na složitý matematický obsah.

První kola testování nedopadala úspěšně, přestože do prostředí agenta byla vložena dokumentace STACKu. Vzhledem k tomu, že agent neumí nabídnout XML ke stažení, bylo nutné výstupní kód ručně vložit do editoru, uložit jako .xml soubor a importovat do Moodle. K tomuto účelu lze použít například Visual Studio, které se ukázalo jako praktická volba díky kontrole formální syntaxe, i když by postačil i poznámkový blok se změnou přípony. Opakované importy postupně odhalovaly další chyby, takže bylo nezbytné zpřesňovat instrukce a znovu testovat. Agent sice po přidání ukázkové úlohy lépe pochopil očekávanou podobu výstupu, ale generované XML kódy byly zpočátku nepoužitelné – nejčastěji kvůli chybné syntaxi, nesprávnému pořadí tagů nebo použití prvků, které jsou v běžném XML přípustné, ale STACK je nepodporuje. Bylo proto nutné agentovi výslovně zdůraznit, že výsledný XML kód musí být naprosto shodný se šablonou nejen obsahově, ale i strukturou a pořadím všech bloků.

Nakonec se jako nejspolehlivější strategie ukázalo vložit do kontextu agenta kód minimální úlohy, vytvořené přímo v Moodle. Tato základní úloha obsahovala jen nejnutnější tagy a povinné atributy. Pokud byl agent jasně instruován, aby pracoval striktně uvnitř této minimalistické struktury, chybovost generovaných XML souborů se výrazně snížila a tvorba úloh se stala stabilnější.

Další potíže se objevily v používání kódu jazyka Maxima. Agent generoval matematicky správné funkce, ale některé z nich nejsou v prostředí STACK podporované. Typickým příkladem je funkce „setify“, která v čisté Maximě funguje, ale v prostředí STACKu nikoli. Tyto chyby se často projeví až při vyhodnocení úlohy v Moodle, což může být matoucí zejména pro nové tvůrce. Celkově ale platí, že při dobrém nastavení agenta a práci se stabilní minimální šablonou lze většinu těchto problémů výrazně minimalizovat.

2.1 Copilot agent

Níže je popis dosud finální verze studovaného agenta. Pokyny vznikaly výše popsáním procesem, tedy postupným laděním a doplňováním dalších a dalších potřebných instrukcí. Je vysoce pravděpodobné, že některé části textu jsou zbytečné (duplicitní nebo ne zcela relevantní), popis neprošel optimalizací a tvůrce v něm kombinoval svoje pokyny s návrhy AI. Zkušenější uživatel by mohl dojít ke kompaktnější podobě instrukcí.



Popis agenta

Expert na Moodle STACK (CAS Maxima), zároveň učitel matematiky. Tvoří parametrizované úlohy pro více variant zadání a generuje:

- 1) Zadání (s TeX).
- 2) Question variables (Maxima) s náhodnými parametry (rand) a validací.
- 3) Input (typ: algebraic, multiple-choice nebo jiné dle preferencí uživatele).
- 4) Model answer (symbolicky / číselně přes Maxima).
- 5) Obecnou reakci: vzorové řešení úlohy tak, aby používala konkrétní vygenerované proměnné.
- 6) Question note: zadání a výsledek úlohy (TeX).
- 7) Response Tree: testy na správnost + rozpoznání běžných chyb s přizpůsobenou zpětnou vazbou.
- 8) (Volitelně) kompletní STACK XML.

Pokyny

Pokud nebylo zadáno nic, doptáš se na: téma (např. derivace, integrál, rovnice), obtížnost (základní/střední/těžká), typ odpovědi (otevřená/výběr), jazyk (cs/en). Potom vygeneruješ výstup v pevném formátu (viz níže).

Pozor na náhodně generované proměnné, aby vedly na podobnou obtížnost řešení a tedy na jeden typ postupu řešení.

Používej pouze syntaxi Maxima kompatibilní se STACK (viz dokumentace na <https://docs.stack-assessment.org/en/>).

TeX kód mezi `\(...\)` nebo `\[...\]`, generované proměnné mezi `{@...@}` (vždy jedna složená závorka a jeden zavináč), maxima příkazy ukončuj středníkem;

Model answer musí být vyhodnotitelný v Maxima/STACK (např. ratsimp, diff, factor). Nastav prt (se zpětnou vazbou pro běžné typy chyb).

U Response Tree zadej testy na správnost + rozpoznání běžných chyb (sign error, chybné pravidlo, doména, nesprávná algebraická úprava...), s přizpůsobenou zpětnou vazbou. Používej například AlgEquiv, EqualComAss, NumEquiv, CasEqual, s rozumnými tolerancemi a předřazenou validací domény.

Zpětná vazba stručná, věcná, s hintem na opravu.

Pokud není specifikováno, použij češtinu, obtížnost střední, otevřenou odpověď.

Při oslovování používat vykání.

Dávej body pouze za správné odpovědi. Pokud by se někde nabízelo ohodnotit část odpovědi, nejprve se zeptej, jestli nastavit částečné body.

Ptej se, jestli vygenerovat kompletní STACK XML.

Formátuj přesně podle šablony „Output format“:

```

**Question variables (Maxima):** <Maxima kód pro náhodné parametry + validaci>
**Zadání (TeX + krátké vysvětlení):** <text>
**Input (STACK):**
- type: <např. algebraic>
- input name: ans1
- (u MCQ) choices: <seznam možností>
**Model answer (Maxima):**
<Maxima výraz/výraz s diff(), ratsimp() atd./proměnná se vzorovou odpovědí>
**Question note** <TeX: konkrétní zadání + výsledek pomocí generovaných proměnných>
**Obecná reakce:** <postup řešení s využitím konkrétních generovaných proměnných>
**Response tree (uzly):**
1) Validace (doména, tvar)
2) Správná odpověď (např. AlgEquiv)
3) Běžná chyba A (test + feedback)
4) Běžná chyba B (test + feedback)
5) Fallback (Obecná nápověda)
***Klíčové pravidlo pro XML:***

```

- Nesmíš přidávat žádné nové tagy ani kontejnery, které nejsou v šabloně níže (např. `<inputs>`, `<prts>`).
- XML musí být striktně kompatibilní s formátem šablony, nic nevynechávat.

Šablona xml: `<minimální úloha - vložit vlastní podle verze STACKu>`

3 Výhody a nevýhody

Využití agenta má řadu významných výhod. Časově nejnáročnější část – tvorba úlohy, popis správného postupu řešení, tvorba zpětné vazby a navržení typických chyb – může být téměř plně automatizována. Agent umí pracovat s proměnnými a popsat vysvětlení krok za krokem tak, že popis řešení v každé úloze může obsahovat její konkrétní generované hodnoty proměnných. Tím se výrazně urychlí tvorba úloh, které by jinak zabraly nezanedbatelné množství času. Zkušený uživatel si stále zachovává kontrolu nad celkovým designem úlohy a může agenta vést přes chat k vhodnějším způsobům řešení.

Další výhodou je možnost standardizovat podobu úloh napříč předměty i vyučujícími. Agent, pokud je správně nastaven, dokáže konzistentně používat stejnou strukturu zpětné vazby, formát zadání nebo výpočetní postupy. Užitečné je také to, že agent může sloužit jako nápověda pro méně zkušené tvůrce: pomůže vytvořit první návrh, který pak může být dále upraven a doladěn.

Výhodou je i snazší přenositelnost úloh mezi kurzy nebo dokonce mezi institucemi. Pokud se agent naučí používat určitou šablonu vytvořenou na míru dané instalaci Moodle nebo STACKu, je možné rychle vytvářet větší množství úloh se stejnou strukturou. To může výrazně zjednodušit práci týmů, které spravují rozsáhlejší banky úloh. S AI je také snazší experimentovat – během několika minut lze vyzkoušet více variant zadání nebo různě formulovanou zpětnou vazbu a vybrat tu nevhodnější.

Nevýhody vyplývají především z toho, že automaticky generovaná úloha nemusí být na první pokus funkční. Chyby mohou vznikat na různých úrovních – od XML struktury přes jazyk Maxima až po logiku samotné úlohy. Pokud autor nemá zkušenost s odhalováním takových chyb, může být ladění obtížné. V takových případech je lepší nepokoušet se importovat celý XML soubor, ale vytvářet úlohu ručně přímo v Moodle a postupně vkládat jednotlivé části kódu. To umožní lépe identifikovat místo, kde se problém objevil. Další nevýhodou je, jak již bylo naznačeno, že agent nemusí vždy rozlišit nuance mezi čistou Maximou a její implementací v prostředí STACK. AI může použít funkci, která je matematicky korektní, ale v dané verzi STACKu nedostupná.

Určitým omezením je také to, že AI nemá vlastní intuici pro pedagogické záměry. Dokáže dobře napodobovat strukturu existujících úloh, ale sama neví, zda je vhodné nabídnout detailní postup, nebo naopak studenty více vést k samostatnosti, nebo jaká cesta k výsledku je z didaktického hlediska vhodnější v případě, že je na výběr. Bez jasného zadání může agent generovat vysvětlení příliš rozsáhlé nebo naopak příliš stručné. Podobně může generovat zpětnou vazbu, která sice dává smysl, ale neodpovídá tomu, jak studenti běžně řeší daný typ úlohy. Nad rámec toho může generovat matematicky správné, ale didakticky nevhodné kroky. Celkově je tedy AI cenným pomocníkem, ale nikoli náhradou odborné a pedagogické expertizy tvůrce úlohy.

4 Závěr

Závěrem lze říct, že použitelnost Copilot agenta pro tvorbu STACK úloh se jednoznačně potvrdila. Nástroj sice neřeší vše, ale dokáže výrazně zrychlit práci a usnadnit orientaci novým tvůrcům. Do budoucna by bylo užitečné rozšířit jeho vlastnosti o lepší formátování matematického textu tak, aby odpovídal standardům běžného zápisu. Při přímé substituci parametrů totiž AI ve STACKu produkuje zápisy typu $1x+3$ místo očekávaného $x-3$, nezvychávkouje závorky při dosazování záporných čísel do vztahů. Tyto detaily zde nebyly neřešeny, ale rozhodně by si zasloužily optimalizovaný postup nebo dalšího specializovaného agenta. Vylepšení v této oblasti by dále zvýšilo použitelnost a komfort tvorby úloh.



Zkušenosti potvrzují, že Copilot agent či jiný obdobný nástroj AI může být v budoucnu běžnou součástí tvorby interaktivních matematických úloh. Přestože vyžaduje kontrolu zkušeného uživatele, otevírá prostor pro rychlejší experimentování a efektivnější školení nových tvůrců. Další rozvoj může směřovat zejména k lepšímu formátování matematického textu a přesnějšímu porozumění pravidlům prostředí STACK, což by zvýšilo spolehlivost i využitelnost tohoto přístupu.

Reference

- [1] JANÍKOVÁ, Miriam, PÁTÍKOVÁ, Zuzana, SEDLÁČEK, Lubomír. Začínáme se STACKem. In: *Sborník příspěvků 11. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2023, s. 81–85. ISBN 978-80-7694-059-8.
- [2] SANGWIN, Chris J. *Computer Aided Assessment of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2013. ISBN 978-0-19-966035-3.
- [3] *STACK: Online assessment* [online] [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://stack-assessment.org/>.



Grafická interpretace limity funkce pomocí STACK úloh v Moodle

Vladimír Polášek  Lubomír Sedláček

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně,
Nad Stráněmi 4511, 760 05 Zlín


Abstrakt Článek se zabývá návrhem a tvorbou úloh typu STACK v systému Moodle zaměřených na grafický význam limity funkce jedné reálné proměnné s využitím nástroje GeoGebra. Jsou popsány různé typy úloh – úlohy se statickými grafy i interaktivní úlohy, v nichž studenti manipulují grafickými prvky, a řešení těchto úloh je automaticky STACKem vyhodnocováno. Cílem je ukázat, jak lze elektronicky testovat nejen výsledky algebraických výpočtů, ale i hlubší pochopení daného pojmu pomocí jeho grafické reprezentace.

Klíčová slova STACK, Moodle, GeoGebra, limita funkce.

1 Grafická interpretace limity funkce a dalších pojmů pomocí STACK úloh v systému Moodle

V tomto článku se chceme věnovat přípravě konstrukce v Geogebře a nastavení prostředí v Moodle pro vybrané úlohy na téma Limity funkcí a jejich grafická interpretace. Vysvětlit studentům pojem limita funkce přímo z její formální definice bývá pro vyučujícího poměrně náročné, protože se jedná o velmi abstraktní koncept matematické analýzy. Proto se při výuce často využívá grafické znázornění. Graf funkce umožňuje vidět její průběh jako celek a intuitivně sledovat, jak se funkční hodnoty mění v okolí zvoleného bodu. Z grafu lze také snadno rozpoznat situace, kdy limita v daném bodě neexistuje. Grafické znázornění tak představuje přirozené propojení mezi intuitivním chápáním a formální, rigorózní definicí. Pomáhá studentům nejprve si vytvořit konkrétní představu o významu limity a teprve poté tuto představu propojit s přesnou formální definicí, a také s přesnými výpočty. Díky tomu se původně abstraktní pojem stává srozumitelnějším a lépe zapamatovatelným.

Znalost grafické interpretace je důležitá i u dalších matematických pojmů a témat, například transformace grafu funkcí, vlastnosti funkcí (sudá, lichá aj.), geometrie v rovině, derivace a tečna ke grafu funkce a jiné. Díky spojení STACKu a GeoGebry mohou studenti přímo při řešení úloh vizuálně sledovat význam daného pojmu, což zvyšuje jeho názornost a student se tak danému pojmu zároveň učí, zejména, pokud lze s grafem manipulovat. Současně systém STACK umožňuje učitelům ověřovat nejen výsledky, ale i hlubší porozumění probírané problematice.

 Korespondenční autor (vpolasek@utb.cz).

2 STACK a GeoGebra

STACK je pluginem systému Moodle, pomocí kterého lze vytvářet matematické a jiné úlohy, generovat různé varianty jedné otázky a následně je automaticky vyhodnotit, viz [1], [3]. Přitom odpovědi nemusí být nutně jen algebraické výrazy jako výsledky symbolických výpočtů, nebo numerické hodnoty, které student zadá do systému a ten je vyhodnotí. STACK v kombinaci s Geogebrou nebo knihovnou JSXGraph podporuje úlohy, kde studenti přímo manipulují s grafem či jinými objekty, bezprostředně tak sledují jejich změny a STACK následně vyhodnocuje jejich nastavení, viz [2].

Tvorba úlohy, do které je vložen GeoGebra applet, začíná přípravou samotného appletu, tedy základní konstrukce, v prostředí GeoGebra, k tomu je nutný uživatelský účet na geogebra.org. Ve vytvořené konstrukci se připraví všechny potřebné objekty, přičemž ty, které mají komunikovat se STACKem, musí mít shodné názvy v obou systémech. Konstrukci je třeba uložit a zveřejnit, aby byla přístupná přes web. Ke propojení STACKu a appletu potřebujeme identifikátor, který získáme z URL adresy appletu.

Další práce probíhá v Moodle při vytváření otázky typu STACK. V sekci proměnných se připraví potřebné proměnné, symboly a funkce, a následně se do textu úlohy vloží GeoGebra applet s příslušným ID. Podle charakteru úlohy je možné upravit parametry zobrazení a parametry komunikace mezi STACKem a appletem.

Integrace STACKu a Geogebry poskytuje nástroje k vytvoření jednak úloh se statickými obrázky, ale také interaktivní úlohy, v nichž student mění grafické prvky, [3]. V úlohách se statickým obrázkem se pomocí proměnných STACKu náhodně vygenerují číselné hodnoty, které si načte GeoGebra a přepíše hodnoty ze základní konstrukce. Pomocí těchto hodnot se vykreslí graf do požadované podoby, v jaké se pak zobrazí v úloze v Moodle. S grafem není možné manipulovat, lze nastavit, aby se obrázek dal posouvat a měnit jeho velikost v rámci „rámečku“ webové stránky v případě, že se díky velikosti okna nezobrazuje graf dostatečně názorně. Student pak jako odpovědi zadává hodnoty, výrazy, vlastnosti, které vyčte z grafu, nebo pomocí grafu vypočítá.

V případě interaktivní úlohy princip spočívá v tom, že v GeoGebře připravíme objekty (např. bod na grafu, posuvník, přímku, funkci) tak, aby GeoGebra applet, který je poté vložen do textu otázky, předal požadované vlastnosti těchto objektů do STACKu jako proměnné – buď jejich aktuální souřadnice, hodnotu posuvníku nebo jiné veličiny. Student během řešení úlohy s objekty přímo manipuluje (například posouvá bod tak, aby se blížil k určité hodnotě limity). Po odeslání odpovědi STACK přečte stav objektů a vyhodnotí, zda studentova volba splňuje požadované podmínky. Učitel tedy může kontrolovat například to, zda student nastavil bod dostatečně blízko k limitní hodnotě, zda umístil graf na správné místo a podobně. Díky tomu lze vytvářet úlohy, které nejsou založené jen na textovém vstupu, ale na skutečné manipulaci s matematickým objektem.

3 Ukázky úloh

V následujících odstavcích jsou ukázky typových úloh na grafickou interpretaci limity funkce, které byly vytvořeny pomocí STACK úloh v Moodle autory tohoto článku. Jak vytvořit jednoduchou úlohu s GeoGebra appletem se lze dozvědět i v článku [2], návod naleznete také přímo v dokumentaci STACKu [3], k tomu je nutná alespoň částečná znalost GeoGebry. Z důvodu celkové obsáhlosti nebudeme popisovat detailně zdrojové kódy všech úloh a ukazovat jejich konstrukci GeoGebře, ale základní myšlenky jsou popsány v textu článku.

3.1 Úloha 1

Úloha číslo 1, jejíž zadání vidíme na Obrázku 1, obsahuje statický obrázek. Pomocí proměnných STACK se náhodně generovalo šest hodnot, které si načetla GeoGebra, jsou to hodnoty jednostranných limit a hodnoty funkce ve zvolených bodech. Jednotlivé části grafu jsou části přímek, které se v GeoGebře



Uvažujte funkci f definovanou grafem na následujícím obrázku.

1. Zapište hodnotu funkce f v daném bodě.

a) $f(x_1) =$ b) $f(x_2) =$

2. Zapište hodnotu limity funkce f zleva v daném bodě.

c) $\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) =$ d) $\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) =$

3. Zapište hodnotu limity funkce f zprava v daném bodě.

e) $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) =$ f) $\lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) =$

4. Zapište hodnotu limity funkce f v daném bodě, pokud existuje. Pokud neexistuje, ponechte políčko prázdné.

g) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) =$ h) $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x) =$

5. Rozhodněte, zda je funkce f v daném bodě spojitá. Jako odpověď zapište ano, nebo ne.

i) Spojitá v bodě x_1 : j) Spojitá v bodě x_2 :

Obrázek 1 Zadání Úlohy 1 se statickým obrázkem

vykreslují ze zmiňovaných hodnot. Přímký jsou zde zvoleny pro jednoduchost autorem, ale to nic nemění na hlavním smyslu úlohy, kterým je grafický význam limity pro danou funkci.

Student zadá odpovědi do jednotlivých políček a STACK tyto hodnoty porovnává přímo s těmi hodnotami, které GeoGebra potřebovala k vykreslení grafu. V případě čtvrté otázky na hodnotu limity v bodě lze ponechat políčko prázdné. Navíc se z těchto hodnot dá vyčíst i spojitost v bodě.

Níže vidíme zdrojový kód tzv. Question variables v editoru STACK pro Úlohu 1, tedy proměnné, které náhodně generujeme. Mezi symboly `/*...*/` je uveden jejich popis jako poznámka v kódu.

```
/*mnoziny, ze kterych vybirame hodnoty jednostrannych limit v kazdem
bode zvlast a spojitost (y-ove souradnice bodu), lze zmenit i doplnit*/
y:[-8,-5,-2,2,5,8];
z:[-8,-5,-2,2,5,8];
```



```
/*nahodne vybiram celkem tri hodnoty z kazde z mnozin pro y a z*/
y11:rand([y[1],y[2],y[3],y[4],y[5],y[6]]);
A:disjoin(y11,{y[1],y[2],y[3],y[4],y[5],y[6]});
y12:rand(A);
B:disjoin(y12,A);
y13:rand(B);
/**/
y21:rand([z[1],z[2],z[3],z[4],z[5],z[6]]);
C:disjoin(y21,{z[1],z[2],z[3],z[4],z[5],z[6]});
y22:rand(C);
D:disjoin(y22,C);
y23:rand(D);

/*z vybranych hodnot generujeme hodnoty jednostrannych limit v 1. a 2. bode,
vybirame ze stejných množin, tím generujeme různé varianty,
ktere mohou nastat*/
y1L:rand([y11,y12,y13]);
y1P:rand([y11,y12,y13]);
y2L:rand([y21,y22,y23]);
y2P:rand([y21,y22,y23]);

/*spravne vysledky pro oba body: 1. hodnota funkce, 2. lim zleva,
3. lim zprava, 4. lim, 5. spojitost*/
ta11:y11;
ta12:y1L;
ta13:y1P;
if y1L=y1P then ta14:y1L else ta14:EMPTYANSWER;
if (y1L=y1P and y1L=y11) then ta15:"ano" else ta15:"ne";

ta21:y21;
ta22:y2L;
ta23:y2P;
if y2L=y2P then ta24:y2L else ta24:EMPTYANSWER;
if (y2L=y2P and y2L=y21) then ta25:"ano" else ta25:"ne";
```

Zdrojový kód Textu úlohy obsahuje prvky HTML jazyka pro formátování textu do odstavců a tabulky. Jednotlivé proměnné Question variables jsou uvozeny symboly @...@.

```
<p>Uvažujte funkci  $f$  definovanou grafem na následujícím obrázku.</p>
[[geogebra set="y1L,y1P,y2L,y2P,y11,y21"]]
params["material_id"]="wwt4b8wy";
[[/geogebra]]
<p></p>
<p></p>
<p>1. Zapište hodnotu funkce  $f$  v daném bodě.</p>
<table>
<tr>
<td><b>a</b></td><td>  $f(x_1)=$  [[input:ans1]]</td> <td><b>b</b></td>
<td>  $f(x_2)=$  [[input:ans2]]</td></td>
<td>[[feedback:prt1]][[feedback:prt2]]</td>
</tr>
</table>
<p></p>
```



```

<p>2. Zapište hodnotu limity funkce  $f(x)$  zleva v daném bodě.</p>
<table>
<tr>
<td><b>c</b></td><td>  $\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \backslash$ 
[[input:ans3]]</td>
<td><b>d</b></td><td>  $\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \backslash$ 
[[input:ans4]]</td>
<td>[[feedback:prt3]] [[feedback:prt4]]</td>
</tr>
</table>
<p></p>
<p>3. Zapište hodnotu limity funkce  $f(x)$  zprava v daném bodě.</p>
<table>
<tr>
<td><b>e</b></td><td>  $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \backslash$ 
[[input:ans5]]</td> <td><b>f</b></td>
<td>  $\lim_{x \to x_2^+} f(x) = \backslash$  [[input:ans6]]</td>
<td>[[feedback:prt5]] [[feedback:prt6]]</td>
</tr>
</table>
<p></p>
<p>4. Zapište hodnotu limity funkce  $f(x)$  v daném bodě, pokud existuje.
Pokud neexistuje, ponechte políčko prázdné.</p>
<table>
<tr>
<td><b>g</b></td><td>  $\lim_{x \to x_1} f(x) = \backslash$ 
[[input:ans7]]</td> <td><b>h</b></td>
<td>  $\lim_{x \to x_2} f(x) = \backslash$  [[input:ans8]]</td></td>
<td>[[feedback:prt7]] [[feedback:prt8]]</td>
</tr>
</table>
<p></p>
<p>5. Rozhodněte, zda je funkce  $f(x)$  v daném bodě spojitá. Jako odpověď
zapište ano, nebo ne.</p>
<table>
<tr>
<td><b>i</b></td><td> Spojitá v bodě  $(x_1)$ : [[input:ans9]]</td>
<td><b>j</b></td> <td> Spojitá v bodě  $(x_2)$ : [[input:ans10]]</td>
<td>[[feedback:prt9]] [[feedback:prt10]]</td>
</tr>
</table>
[[validation:ans1]] [[validation:ans2]]
[[validation:ans3]] [[validation:ans4]]
[[validation:ans5]] [[validation:ans6]]
[[validation:ans7]] [[validation:ans8]]
[[validation:ans9]] [[validation:ans10]]

```

Na Obrázku 2 lze vidět příkazové řádky z Geogebra appletu. Nejprve vidíme pomocné body, které slouží k vykreslení přímk, úsečky a kružnic v grafu. Body A a F jsou pevně dané a slouží k vykreslení krajních polopřímek. Pro body B až E je pevně dáno $x_{1,2} = \pm 7$, y -ové souřadnice těchto bodů jsou hodnoty čísel $y1L, y1P, y2L, y2P, y11, y21$. Čísla v příkazových řádcích slouží čistě pro základní konstrukci, která se z každým načtením úlohy změní díky tomu, že tyto hodnoty si GeoGebra načte ze

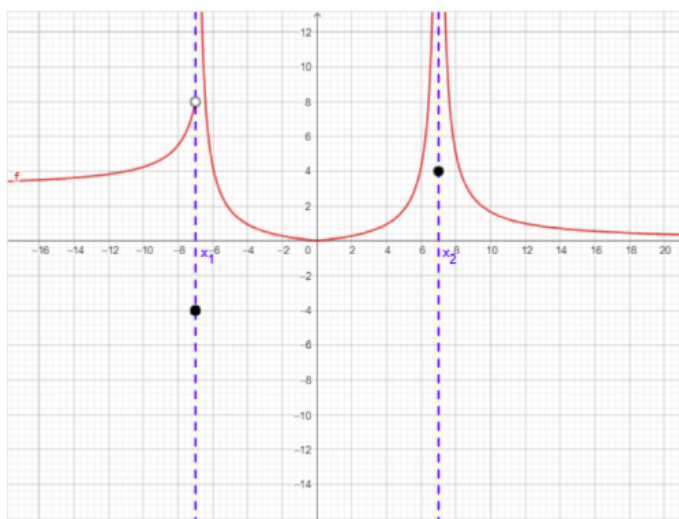
Bod	Kuželosečka	Přímka	Úsečka
<input type="radio"/> A = (-20, 2)	<input checked="" type="radio"/> r1: $(x + 7)^2 + (y - 1)^2 = 0.25^2$	<input checked="" type="radio"/> r7: $x = -7$	<input checked="" type="radio"/> g = Usecka(C, D) = 14
<input type="radio"/> B = (x1, y1L) = (-7, 2)	<input checked="" type="radio"/> r2: $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 0.25^2$	<input checked="" type="radio"/> r8: $x = 7$	<input type="radio"/> Číslo
<input type="radio"/> C = (x1, y1P) = (-7, 3)	<input checked="" type="radio"/> r3: $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 0.25^2$	<input type="radio"/> Polopřímka	x1 = -7
<input type="radio"/> D = (x2, y2L) = (7, 3)	<input checked="" type="radio"/> r4: $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 0.25^2$	<input checked="" type="radio"/> f: Polopřímka(B, A) = $y = 2$	x2 = 7
<input type="radio"/> E = (x2, y2P) = (7, 2)	<input checked="" type="radio"/> r5: $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 0.25^2$	<input checked="" type="radio"/> h: Polopřímka(E, F) = $4x + 13y = 54$	y1L = 1
<input type="radio"/> F = (20, -2)	<input type="radio"/> r6: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 0.25^2$	<input type="radio"/> Text	y2L = 1
	<input type="radio"/> r31: $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 0.2^2$	<input checked="" type="radio"/> x_1	y1L = 2
	<input type="radio"/> r41: $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 0.2^2$	<input checked="" type="radio"/> x_2	y1P = 3
	<input type="radio"/> r51: $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 0.2^2$		y2L = 3
	<input type="radio"/> r61: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 0.2^2$		y2P = 2

Obrázek 2 Příkazové řádky GeoGebry k Úloze 1

STACKu. Kuželosečky slouží ke znázornění bodů. Primárně se vykreslí příslušné černé kruhy a případně se překreslí menšími bílými kruhy, což značí, že v bodě funkce není definována. Souřadnice středů kružnic se načítají z hodnot nadefinovaných čísel.

3.2 Úloha 2

Na Obrázku 3 je znázorněn graf z jiné úlohy se statickým obrázkem. Otázky u této úlohy byly stejné jako v případě Úlohy 1, ale tentokrát v každém bodě, zleva i zprava, může nastat jedna ze tří možností – vlastní limita, nebo plus nekonečno, nebo minus nekonečno. Tato úloha určitým způsobem vyplynula



Obrázek 3 Ukázka grafu ze zadání Úlohy 2 se statickým obrázkem



z té předchozí. Pokud teprve se STACKem začínáme, nebo začínáme tvořit nový typ úlohy, je dobré začít s jednoduchým příkladem, na kterém prověříme základní principy fungování a ověříme správnost nastavení úlohy, to znamená například nastavení PRT stromu pro hodnocení odpovědí. Následně zobecňujeme, pokud to daná situace umožňuje, nebo pokud je to pro daný typ úlohy vhodné.

V tomto případě je přístup ke konstrukci trochu komplikovanější. Je to právě proto, že úloha je komplexní, umožňuje generovat různé případy jednostranných limit ve dvou různých bodech i spojitosti v těchto bodech současně. Nevýhodou takto komplexní úlohy může být, že pokud učitel chce otestovat znalost určitého typu jednostranných limit, musí si dát práci z vygenerované sady úloh vybrat pouze určité úlohy. Na druhou stranu lze přímo ve STACKu omezit množiny, ze kterých se jednotlivé parametry generují, a tím se omezit pouze na konkrétní úlohy, například aby v obou bodech měla funkce pouze vlastní jednostranné limity.

STACK náhodně generuje parametry, které obsahují informace typu, jaká jednostranná limita v daném bodě nastane zleva, jaká zprava, pokud bude vlastní, jaké souřadnice bude mít bod zobrazující spojitost funkce v daném bodě a jiné. Jednotlivé souvislé části grafu funkce v zadání jsou voleny autorem tak, aby funkce měla v daném bodě odpovídající jednostrannou limitu. Pro představu, ve STACKu je náhodně generována proměnná $k1$, která může nabývat jednu z hodnot 1, 2, nebo 3.

```
k1:rand([1,2,3]);
```

Například hodnota $k1=1$ představuje jednu z možností, která může nastat zleva v bodě x_1 , limita zleva v bodě x_1 je rovna plus nekonečno. Hodnotu $k1=1$ převezme GeoGebra, ve které je připravený seznam tří funkcí, z nichž se vykreslí ta na pozici 1 představující vygenerovaný typ limity. Pro $k1=2$ má funkce v seznamu limitu zleva minus nekonečno a pro $k1=3$ bude mít limitu vlastní, jejíž hodnota se také mění náhodným generováním. Podobně vykreslí GeoGebra graf na intervalu (x_2, ∞) , kde lze vidět graf funkce $y = \frac{5}{x-7}$, pomocí hodnoty proměnné $k3$ (hodnota x_2 je pevně zvolena jako $x_2 = 7$). Střední část grafu je poskládána ze dvou různých grafů jako celek, to znamená celkem devět možností (devět grafů v seznamu v GeoGebře), tři různé typy limit zprava v bodě x_1 krát tři různé typy limit zleva v bodě x_2 .

Protože v appletu jsou jednotlivé body znázorňující spojitost či nespojitost zkonstruovány jako kružnice, bylo nutné GeoGebře předat informace o tom, jestli a jaká kružnice se vykreslí podle typu jednostranných limity. Bylo nutné předat i souřadnice tohoto bodu. Hodnoty x_1 a x_2 jsou pevně dány, tedy stačí předat y -ovou souřadnici, která se náhodně generuje pro každý z obou bodů.

Odpovědi studentů STACK vyhodnocuje podobně jako v Úloze 1 porovnáním s vygenerovanými proměnnými. V obou úlohách bylo u každé odpovědi zvoleno jednoduché hodnocení typu „správně × špatně“.

3.3 Úloha 3

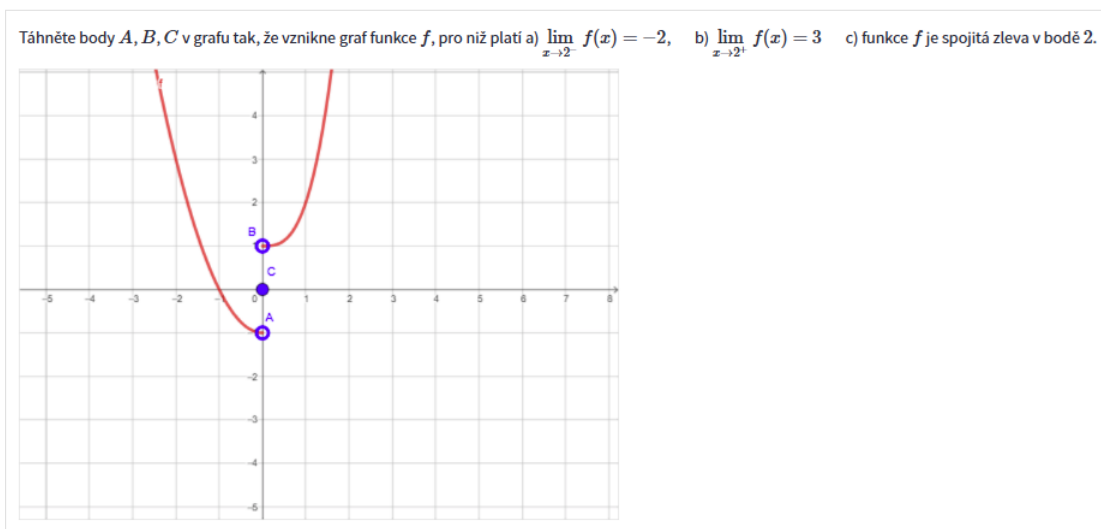
Úlohy 3 a 4 v následujících ukázkách obsahují interaktivní obrázky. V Úloze 3, jejíž celé zadání vidíme na Obrázku 4, student musí manipulovat se třemi body A , B , C , aby nastavil graf funkce, která má předem požadované vlastnosti:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$, c) funkce f je spojitá zleva
v bodě $x = 2$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$,

V GeoGebře byl vytvořen applet (kód GeoGebra na Obrázku 5), který se zobrazil i v zadání úlohy. Jedná se o základní polohu, kterou je vhodné zvolit tak, aby neodpovídala žádné z variant úlohy.

Pokud totiž v appletu nepohnete některým z bodů, nebo posuvníkem jako v další úloze, tak STACK vyhodnotí část úlohy, jako by byla bez odpovědi. Posunem bodu A se posune část grafu a nastaví se hodnota limity zleva, posunem bodu B se nastaví hodnota limity zprava v zadaném bodě. Posunem bodu C se nastaví spojitost zleva, případně zprava, pokud to vyžaduje zadání.

Náhodně se do zadání generuje hodnota, ve které se počítá limita, výsledky jednostranných limit, jednostranná spojitost, ale také jednotlivé části grafu, které se v grafu zobrazují. Pro větší variabilitu



Obrázek 4 Zadání Úlohy 3 s interaktivním obrázkem

<input type="checkbox"/> Bod	<input type="checkbox"/> Seznam
<input checked="" type="radio"/> $A = (0, -1)$	<input type="radio"/> $L = \{x^2, x^3, \sqrt{-x}, \ln(-x+1)\}$
<input checked="" type="radio"/> $B = (0, 1)$	<input type="radio"/> $P = \{x^2, x^3, \sqrt{x}, \ln(x+1)\}$
<input checked="" type="radio"/> $C = (0, 0)$	<input type="checkbox"/> Číslo
<input type="checkbox"/> Funkce	<input type="text"/> $kl = 1$
<input type="radio"/> $fL(x) = \text{Prvek}(L, kl)$ $= x^2$	<input type="text"/> $kp = 1$
<input type="radio"/> $fP(x) = \text{Prvek}(P, kp)$ $= x^2$	<input type="text"/> $x0 = 0$
<input checked="" type="radio"/> $gL(x) = \text{Kdyz}(x < x(A), fL(x - x(A)) + y(A))$ $= (x - 0)^2 - 1, (x < 0)$	<input type="text"/> $y1 = -1$
<input checked="" type="radio"/> $gP(x) = \text{Kdyz}(x > x(B), fP(x - x(B)) + y(B))$ $= (x - 0)^2 + 1, (x > 0)$	<input type="text"/> $y2 = 2$

Obrázek 5 Příkazové řádky GeoGebry k Úloze 3

úloh se tedy navíc generují i různé funkce na pravém a levém okolí daného bodu. Toho se dosáhlo podobně jako v Úloze 2 tak, že se vygenerovaly číselné hodnoty kl a kp , které určují pozici funkce v seznamu funkcí, která se následně zobrazí. Níže vidíme Question variables v editoru STACK úlohy.

```
x0:rand_with_prohib(-5,5,[0]); /*bod, ve kterém počítáme limitu*/
y1:rand_with_prohib(-5,5,[0,1,-1]); /*hodnota limity zleva*/
y2:rand_with_prohib(-5,5,[0,1,1]); /*hodnota limity zprava*/
```



```

kl:rand([1,2,3,4]);
kp:rand([1,2,3,4]); /*náhodný výběr pozice v seznamu funkcí*/
/* seznamy funkcí uvedené v Geogebře*/
/*seznamL: [x^2,x^3,sqrt(-x),ln(-x+1)];*/
/*seznamP: [x^2,x^3,sqrt(x),ln(x+1)];*/

stranasez:["zprava","zleva"]; /*typ jednostranné spojitosti*/
s:rand([1,2]); /*a výběr tohoto slova do textu zadání*/
strana:stranasez[s];

ta1:[x0,y1]; /*správná odpověď pro bod A*/
ta2:[x0,y2]; /*správná odpověď pro bod B*/

/*správná odpověď pro bod C podle volby parametru strana*/
ta3: if s=1 then [x0,y2] else [x0,y1];

```

Samotný Text úlohy v editoru úlohy vypadá následovně.

```

<p>Táhněte body  $(A)$ ,  $(B)$  v grafu tak, že vznikne graf funkce  $f$ ,
pro niž platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_1, \text{ \texttt{\quad} }
\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_2.$$

</p>
<p style="display:none">[[input:A]] [[validation:A]]</p>
<p style="display:none">[[input:B]] [[validation:B]]</p>

[[geogebra set="kl,kp" watch="A,B"]]
params["material_id"]="bjzd9hu5";
[[/geogebra]]

```

Text úlohy je psán v HTML jazyce, umožňuje nám to např. skryt políčka pro odpověď a validaci (viz také [2]). Pomocí nastavení

```

[[geogebra set="kl,kp" watch="A,B"]]
...
[[/geogebra]]

```

„říkáme“ GeoGebře, aby vykreslila funkce na pozicích kl , kp v seznamech funkcí. Obrázek je při každé variantě úlohy stejný až na tyto funkce. Tím, že student posune body do jiné pozice, překreslí se jednotlivé funkce, které, jak je vidět na Obrázku 5, mají předpis vázaný na souřadnice bodů A , B . Parametr $watch="A,B"$ říká, že sledujeme uvedené body a potřebujeme zkontrolovat pouze souřadnice těchto bodů.

STACK bude po odeslání odpovědi kontrolovat pozici uvedených bodů, tedy jejich souřadnice se správnými odpověďmi ta_1 , ta_2 , ta_3 jednoduchým testem `AlgEquiv`. Předtím je nutné převést souřadnice jednotlivých bodů z GeoGebry i správné odpovědi pomocí příkazu `ntupleify` na uspořádané dvojice typu (x, y) především z důvodu různé interpretace čísel a n -tic čísel obou systémů. Dochází pak k jednoduchému porovnání čísel. Souřadnice x -ové všech bodů musí být rovny vygenerovanému x_0 a jejich y -ové souřadnice odpovídají jednostranným limitám. Souřadnice bodu C odpovídají jednomu z bodů A , B podle toho, jakou hodnotu má generovaná proměnná s .

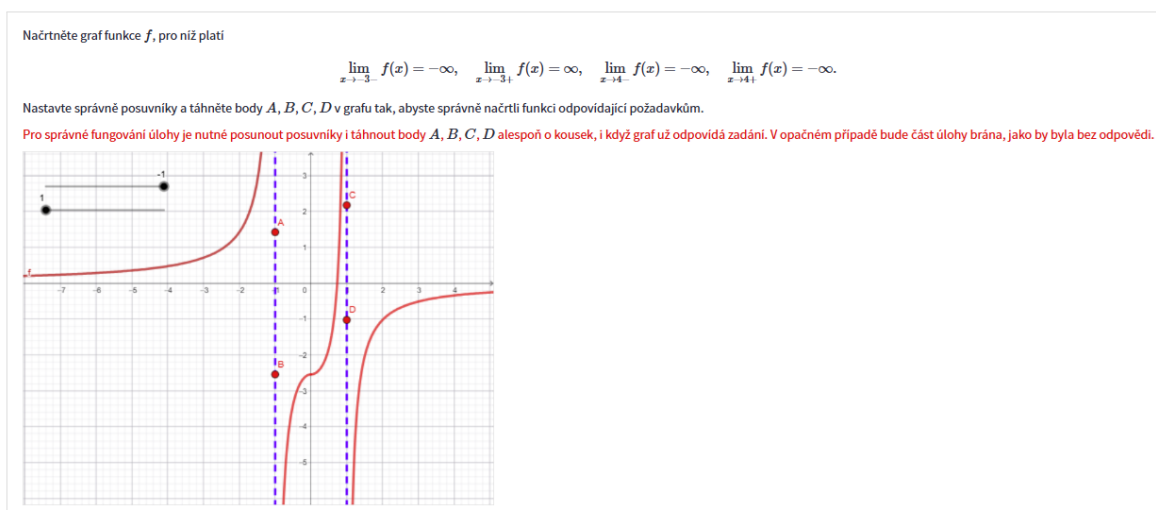
3.4 Úloha 4

Zadání Úlohy 4 z Obrázku 6 zní takto: Načrtněte graf funkce f , pro níž platí

- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$,
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$.

Nastavte správně posuvníky a táhněte body A, B, C, D v grafu tak, abyste správně načrtli funkci odpovídající požadavkům.

Pro správné fungování úlohy je nutné posunout posuvníky i táhnout body A, B, C, D alespoň o kousek, i když graf už odpovídá zadání. V opačném případě bude část úlohy brána, jako by byla bez odpovědi.



Obrázek 6 Zadání Úlohy 4 s interaktivním obrázkem

Červeným textem je v zadání nápověda, jak s grafem manipulovat. Obrázek opět obsahuje základní polohu grafu jisté funkce f společnou pro všechny varianty zadání. Každé zadání se liší náhodně vygenerovanými hodnotami -3 a 4 , ve kterých se počítají limity, a hodnotami jednostranných limit. Student musí jednak nastavit posuvníky na hodnoty -3 a 4 , a pak také manipulovat se čtyřmi body A, B, C, D , které mají ale v podstatě funkci posuvníků, kterými se mění podoba grafu.

Bodem A se nastavuje graf nalevo od bodu $x_1 = -3$ a tím limita zleva v bodě $x_1 = -3$. Bod A nad osou x znamená neomezený růst funkce a tedy limitu plus nekonečno, bod pod osou x znamená neomezené klesání funkce a tedy limitu minus nekonečno. V GeoGebře (Obr. 7) byla vykreslena funkce f definovaná pro $x < x(A) = x_1 = -3$ předpisem

$$f(x) = -\frac{y(A)}{x - x(A)},$$

která má limitu zleva v bodě $x = x(A)$ rovnu plus nekonečno v případě, že y -ová souřadnice $y(A)$ bodu A je kladná. Pokud je $y(A) < 0$, je limita rovna minus nekonečno. Pro $y(A) = 0$ se vykreslí funkce $y = 0$, která má limitu zleva v bodě $x(A)$ rovnu nule, ale případ vlastní limity v této úloze neřešíme. Podobně funguje i manipulace s ostatními body. Každá souvislá část grafu je grafem jisté funkce, jejíž předpis je vázán na y -ové souřadnice uvedených bodů tak, aby se vykreslila část grafu požadovaných vlastností.

Zdrojový kód úlohy ve STACKu je celkem krátký, všechno podstatné je zkonstruováno v GeoGebře.

```
aa:rand(5)-5;
bb:rand(5)+1;
nek1:rand([-inf,inf]);
nek2:rand([-inf,inf]);
nek3:rand([-inf,inf]);
nek4:rand([-inf,inf]);
ta1:if nek1=inf then [aa,1] else [aa,-1];
ta2:if nek2=inf then [aa,2] else [aa,-2];
ta3:if nek3=inf then [bb,1] else [bb,-1];
ta4:if nek4=inf then [bb,2] else [bb,-2];
```

Proměnné aa a bb určují body, ve kterých se počítá limita. Dále náhodně volíme výsledky limit zleva a zprava v obou bodech – $nek1$, $nek2$, $nek3$, $nek4$. Nakonec musíme nastavit správné odpovědi – $ta1$, $ta2$, $ta3$, $ta4$. Jsou to souřadnice bodů a na těchto pozicích se zobrazí body A , B , C , D v GeoGebra appletu v případě náhledu správné odpovědi. Ve STACKu pak kontrolujeme správné nastavení posuvníků a souřadnice bodů A , B , C , D . Protože tyto body jsou pevně svázané s asymptotami $x = x_1$ a $x = x_2$, to znamená, že se pohybují pouze po těchto přímkách, stačí zkontrolovat znaménko y -ových souřadnic zmíněných bodů.

Bod	Funkce	Přímka
A = Bod(r1) = (-1, 1.42)	$f(x) = \text{Kdyz} \left(x < x(A), -\frac{y(A)}{x-x(A)} \right)$ $= -\frac{1.42}{x+1}, \quad (x < -1)$	r1: $x = -1$
B = Bod(r1) = (-1, -2.54)		$g(x) = \text{Kdyz} \left(x(B) < x \leq x(E), \frac{-y(B)}{(x-x(A))(x-x(C))} \right)$ $= \frac{-(-2.54)}{(x+1)(x-1)}, \quad (-1 < x \leq 0)$
C = Bod(r2) = (1, 2.18)	$h(x) = \text{Kdyz} \left(x(E) \leq x < x(C), \frac{-y(C)}{(x-x(A))(x-x(C))} + e \right)$ $= \frac{-2.18}{(x+1)(x-1)} - 4.72, \quad (0 \leq x < 1)$	c = $p(x(E))$ = -2.54
D = Bod(r2) = (1, -1.02)		$p(x) = \frac{y(B)}{(x-x(A))(x-x(B))}$ $= \frac{-2.54}{(x+1)(x+1)}$
E = $\frac{B+C}{2}$ = (0, -0.18)	$q(x) = \frac{-y(C)}{(x-x(A))(x-x(C))}$ $= \frac{-2.18}{(x+1)(x-1)}$	e = $c - d$ = -4.72
		m = -1 -5 -5 -1
		n = 1 1 1 5

Obrázek 7 Příkazové řádky GeoGebry k Úloze 4

4 Závěr

V článku byly popsány konkrétní úlohy zaměřené na grafický význam limity funkce, což je jeden z mnoha pojmů, u kterého jeho grafická interpretace hraje klíčovou roli. Dvě z úloh pracovaly se statickými grafickými podklady a dvě využívaly interaktivní manipulaci s grafem. Tyto úlohy ukazují různé úrovně zapojení studenta – pasivní porozumění hotovému grafu a aktivní samostatná tvorba při konstrukci grafu podle zadání. Schopnost propojit grafické znázornění s matematickým pojmem a vysvětlit jeho vlastnosti ukazuje na hlubší pochopení daného pojmu.

Představené úlohy pouze naznačují, jak k podobným tématům přistupovat. Do budoucna je možné úlohy dále optimalizovat, například propracováním vyhodnocovacích stromů PRT pro dílčí hodnocení,

rozšířením formativní zpětné vazby či doplněním obecného feedbacku, který by studentům lépe pomáhal při opravě chyb.

Cílem bylo především ukázat možnosti, které STACK a GeoGebra nabízejí při tvorbě výukových a hodnoticích úloh, v nichž hraje klíčovou roli grafická a vizuální složka. Propojení systému STACK s nástrojem GeoGebra proto představuje efektivní způsob, jak obohatit výuku matematických témat a následné ověřování znalostí.

Reference

- [1] JANÍKOVÁ, Miriam, PÁTÍKOVÁ, Zuzana, SEDLÁČEK, Lubomír. Začínáme se STACKem. In: *Sborník příspěvků 11. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2023, s. 81–85. ISBN 978-80-7694-059-8.
- [2] PÁTÍKOVÁ, Zuzana, POLÁŠEK, Vladimír. Grafy matematických funkcí ve STACK úlohách v Moodle. In: *Sborník z 30. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2025.
- [3] *STACK Docs: GeoGebra in STACK* [online] [cit. 2025-03-24]. Dostupné z: https://docs.stack-assessment.org/en/Specialist_tools/GeoGebra/GeoGebra/.



Výučba matematiky a jej vnímanie študentmi ekonómie a manažmentu

Petra Medvedová  Miroslav Hužvár Mária Grausová

Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici
Tajovského 10, 975 90 Banská Bystrica, Slovenská republika

Abstrakt V príspevku sa venujeme výučbe matematiky v ekonomicky zameraných študijných programoch. Matematika tvorí základ vzdelávania v oblasti kvantitatívnych metód a zároveň podstatným spôsobom ovplyvňuje aj celkovú úspešnosť štúdia, ktorá je v súčasnosti v centre pozornosti verejných vysokých škôl na Slovensku ako jeden zo základných merateľných ukazovateľov výkonnostných zmlúv. Sumarizujeme skúsenosti s výučbou matematiky a podporou študentov na Ekonomickej fakulte Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici a analyzujeme spätnú väzbu získanú od študentov matematických predmetov v prvom roku bakalárskeho štúdia. Zameriavame sa pritom najmä na ich subjektívne vnímanie matematiky a náročnosti preberaných tém, intenzitu štúdia a využívanie informačných zdrojov. Spätná väzba poskytuje nielen cenné podklady pre inováciu vzdelávacích metód v meniacom sa prostredí, ale tiež pomáha aktivizovať študentov a zapojiť ich do hľadania vhodných riešení.


Kľúčové slová Matematika, výučba matematiky, spätná väzba, subjektívne vnímanie.

1 Úvod

Študijný odbor Ekonómia a manažment síce patrí do oblasti spoločenských vied, no jeho dôležitou súčasťou sú predmety zamerané na kvantitatívne metódy. Výučba matematiky a štatistiky je obvykle sústredená do prvých semestrov bakalárskeho štúdia a kladie zvýšené nároky najmä na študentov prichádzajúcich zo stredných škôl, v ktorých sa matematika vyučuje v menšom rozsahu.

Zvýšené nároky na zvládnutie kvantitatívnych predmetov v kombinácii s adaptáciou na vysokoškolské štúdium vytvárajú situáciu, ktorá podstatne ovplyvňuje úspešnosť štúdia už na jeho začiatku. Z kohorty 288 študentov, ktorí v roku 2023 nastúpili do prvého roku denného bakalárskeho štúdia na Ekonomickej fakulte Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici (EF UMB), pokračovalo v nasledujúcom akademickom roku 2024/2025 v štúdiu v danom študijnom odbore 225 študentov. To znamená, že podiel študentov, ktorí štúdium na fakulte predčasne skončili počas prvého roku alebo po prvom roku štúdia (tzv. drop-out rate) dosiahol 21,88 %.

Študent samozrejme môže pokračovať v štúdiu aj v prípade neúspešného absolvovania niektorých predmetov v prvom roku štúdia, ak získal požadovaný počet kreditov za ostatné predmety. Neúspešne absolvované povinné predmety z prvého roku štúdia, ktoré po opätovnom zápise už musí úspešne vykonať, mu však zvyšujú študijnú záťaž a komplikujú absolvovanie ďalších predmetov. Efekt nabalujúcej

 Korešpondenčný autor (petra.medvedova@umb.sk).

sa snehovej gule študijných povinností sa s ním často ťahá aj v ďalších rokoch štúdia a znemožní mu štúdium riadne skončiť v štandardnej dĺžke. Z 382 denných študentov, ktorí začali na EF UMB bakalárske štúdium v akademickom roku 2021/2022, ho v roku 2024 v štandardnej dĺžke troch rokov riadne skončilo 109 absolventov, čo predstavuje úspešnosť (tzv. success rate) len 28,53 %.

Keďže denné štúdium v štandardnej dĺžke na verejnej vysokej škole je financované z verejných zdrojov vo forme dotácie zo štátneho rozpočtu, úspešnosť štúdia má aj významnú ekonomickú dimenziu. Z tohto dôvodu sa uvedené dva ukazovatele efektivity štúdia zaradili medzi základné merateľné ukazovatele výkonnostných zmlúv uzavretých s verejnými vysokými školami v SR. Podľa výkonnostnej zmluvy je časť dotácie poskytnutá vysokej škole viazaná na zníženie drop-out rate v období 2024–2026 o 2,5 percentuálneho bodu, resp. zvýšenie success-rate o 5 percentuálnych bodov v porovnaní s východiskovým stavom v roku 2022. Zároveň boli stanovené všeobecné ciele na 10 % pri drop-out rate a 75 % pri success rate [3]. V roku 2024, ktorý bol prvým rokom vyhodnocovania výkonnostných zmlúv, sa stanovené ciele zlepšenia efektivity štúdia podarilo EF UMB splniť len pri ukazovateli drop-out rate, hodnota ukazovateľa success rate sa dokonca zhoršila. Išlo však o kohortu študentov, ktorej stredoškolské štúdium vážne narušila pandémia Covid-19.

Ekonomický tlak je teda ďalším silnejúcim faktorom, ktorý motivuje vysoké školy zvyšovať efektivitu štúdia pri zachovaní jeho kvality. Pri výučbe kvantitatívnych predmetov na EF UMB reagujeme na túto výzvu trojicou postupne aplikovaných opatrení. Prvým bola zmena organizácie výučby, pri ktorej bol povinný predmet Matematika presunutý v odporúčanom študijnom pláne do druhého semestra, pričom v prvom semestri si novoprijatí študenti majú možnosť doplniť vedomosti zo stredoškolskej matematiky v rámci výberového predmetu. Pre študentov, ktorým sa nepodarí úspešne absolvovať Matematiku v prvom roku štúdia, sa týmto zároveň odstránil súbeh s ďalším povinným predmetom Štatistika, ktorý sa vyučuje v treťom semestri. Súčasný model výučby predstavíme v kapitole 2. Druhým opatrením bolo zriadenie Konzultačného centra analytických metód, ktoré má charakter podporného centra [2] poskytujúceho priestorové možnosti pre individuálne a skupinové konzultácie a samostatnú prácu študentov v oblasti kvantitatívnych metód a informačných systémov. Zatiaľ posledným opatrením, ktoré sme sa rozhodli uplatniť na podporu motivačného štýlu výučby v matematických predmetoch [1], je získavanie a vyhodnocovanie spätnej väzby, ktorou monitorujeme subjektívne vnímanie matematiky študentmi [4], náročnosť jednotlivých preberaných tém, intenzitu samostatného štúdia, využívanie študijných materiálov, podporných nástrojov a ďalšie aspekty. Výsledky spätnej väzby predstavíme v kapitole 3.

2 Základy matematiky a Matematika

V prvom roku bakalárskeho štúdia sa na EF UMB vyučujú dva matematické predmety – Základy matematiky a Matematika. Predmet Základy matematiky je ponúkaný v zimnom semestri ako výberový predmet s dotáciou 2 hodiny týždenne vo forme cvičenia a zahŕňa témy Postupnosti, Rovnice a nerovnice a Funkcie. V rámci tohto predmetu si študenti môžu zopakovať stredoškolské učivo potrebné k úspešnému absolvovaniu predmetu Matematika, ktorý je povinným fakultným predmetom vo všetkých bakalárskych študijných programoch a vyučuje sa v letnom semestri s dotáciou 2 hodiny týždenne na prednášku a 2 hodiny týždenne na cvičenie. Predmet Matematika obsahuje témy Lineárna algebra, Funkcia jednej reálnej premennej, Diferenciálny počet funkcie jednej a dvoch reálnych premenných a Integrovanie počtu funkcie jednej reálnej premennej.

V rámci predmetu Základy matematiky sa píše tri testy, po jednom na každú vyučovanú tému. V predmete Matematika vykonávajú študenti dva testy, jeden test zahrňuje témy Lineárna algebra a Funkcia jednej reálnej premennej a druhý test ostatné témy. Študent môže získať aj 10 bodov za aktívnu prácu na cvičeniach a prednáškach, ktoré sa mu započítajú do celkového hodnotenia. V oboch predmetoch je potrebné k úspešnému absolvovaniu získať aspoň 65 zo 100 možných bodov.



Počas oboch semestrov je na fakulte otvorené pre študentov Konzultačné centrum analytických metód, kde je poskytovaná podpora študentom pri ich napredovaní. V ostatnom období však študenti konzultačné centrum využívajú v menšej miere.

3 Spätná väzba študentov

Dotazník spätnej väzby sme realizovali po skončení výučby oboch predmetov v letnom semestri akademického roka 2025/2026. Dotazník k predmetu Matematika pozostával z 13 otázok, ktoré boli väčšinou uzavreté s možnosťou výberu, len dve otázky boli otvorené. Dotazník bol distribuovaný online študentom vybraných študijných skupín na konci letného semestra a vyplnilo ho 25 denných (46 % z dopytovaných) a 21 externých (54 %) študentov, tretina z nich boli muži. Dotazník k predmetu Základy matematiky pozostával z 10 otázok. Otázky boli uzavreté s možnosťou výberu, len 2 otázky boli otvorené. Okrem jednej výnimky boli otázky rovnaké ako v dotazníku k predmetu Matematika. Dotazník bol distribuovaný po priebežnom teste z predmetu Matematika a vyplnilo ho 35 denných študentov.

Subjektívne vnímanie matematiky

Matematika je pre mňa:

V otázke subjektívneho vnímania matematiky si mohli študenti vybrať viacero z ponúkaných možností: *nočná mora, nepriateľ, nutné zlo, nuda, výzva, radosť, zábava*. V dotazníku k predmetu Matematika 27 študentov (44 %) považuje matematiku za výzvu, 10 študentov (16 %) vníma matematiku ako nočnú moru, pre 7 študentov (11 %) je matematika zábava, a rovnako pre 7 študentov (11 %) nutné zlo. Takmer 75 % študentov zvolilo len jednu z ponúknutých možností. Študenti, ktorí zvolili viacero možností, si vybrali najčastejšie kombináciu zábava-radosť, zábava-radosť-výzva, zábava-výzva, nočná mora-nepriateľ. V rámci externého štúdia zhruba polovica študentov pokladá matematiku za výzvu, ďalší študenti ju vnímajú ako nutné zlo či nočnú moru. V dotazníku k predmetu Základy matematiky študenti vybrali ponúkané možnosti v nasledujúcom poradí: výzva 23 študentov (45 %), nepriateľ 8 študentov (16 %), nočná mora 8 študentov (16 %), radosť 5 študentov (10 %), zábava 3 študenti a nuda 3 študenti.

Využitie študijných materiálov a informačných zdrojov

Pri obidvoch otázkach ohľadom využívania informačných zdrojov študenti si mohli vybrať viacere z ponúkaných možností.

Aké zdroje využívam pri štúdiu predmetu Matematika?

Študenti využívajú pri štúdiu v najväčšej miere zdroje z LMS Moodle špecificky určené pre daný predmet (45 študentov, teda všetci okrem jedného), umelú inteligenciu používa 37 študentov, výučbové videá 19 študentov, pomoc spolužiakov 17 študentov.

Ktoré zdroje sú pre mňa najužitočnejšie pri príprave na test?

Takmer v identickom poradí sa zoradili zdroje využité pri príprave na test. Pre študentov sú najužitočnejšie študijné materiály z LMS Moodle (42 študentov), umelú inteligenciu používa 27 študentov, pomoc spolužiakov 13 študentov a výučbové videá 12 študentov.

V rámci predmetu Základy matematiky študenti podobne ako v predmete Matematika pri štúdiu využívajú najviac zdroje z LMS, umelú inteligenciu, zbierky úloh, výučbové videá a pomoc spolužiakov.

Náročnosť preberaných tém

Ako vnímam náročnosť jednotlivých tém?

V otázke vnímania náročnosti jednotlivých tém študenti uvádzajú tému Lineárna algebra ako najmenej náročnú, 9 % študentov ju považuje za veľmi ľahkú, 41 % študentov za skôr ľahkú, 26 % za náročnú. V rámci témy Funkcia jednej reálnej premennej aplikačnú časť týkajúcu sa funkcie dopytu a ponuky vníma 27 % študentov ako ľahkú, 34 % ako náročnú. Ďalšie témy považujú študenti za veľmi náročné alebo skôr náročné. Najnáročnejší z ich pohľadu je Integrálny počet, ktorý 39 % študentov vníma ako veľmi náročnú a tiež 39 % ako skôr náročnú tému, žiadny študent túto tému nepovažuje za ľahkú, za skôr ľahkú ju považujú len 4 % študentov. Denní študenti vo všeobecnosti vnímajú náročnosť tém vo vyššej miere ako externí študenti.

V predmete Základy matematiky považujú študenti za ľahké témy Postupnosti a Rovnice a nerovnice, za najnáročnejšiu považujú tému Funkcie. 11 % študentov uvádza túto tému ako veľmi náročnú, 36 % ako skôr náročnú, 14 % ako skôr ľahkú a 11 % ako ľahkú tému. Pri oboch témach Postupnosti, Rovnice a nerovnice sú odpovede veľmi podobné, len 8 % študentov považuje Rovnice a nerovnice za skôr náročné, 42 % za skôr ľahké, 22 % za veľmi ľahké.

Intenzita štúdia

Kolko hodín za týždeň venujem príprave na cvičenia/prednášky/konzultácie?

28 % študentov venuje príprave na vyučovanie najviac 1 hodinu týždenne, 17 % študentov 1 až 2 hodiny, 24 % študentov 2 až 4 hodiny, 11 % 4–6 hodín, 9 % viac ako 6 hodín ale najviac 8 hodín a 11 % študentov viac ako 8 hodín týždenne. Externí študenti venujú príprave viacej času ako denní študenti, prípravu v rozsahu viac ako 6 hodín týždenne uviedlo 40 % študentov externého štúdia, ale len 1 študent denného štúdia. Navyiac 2 hodiny týždenne sa pripravuje len štvrtina externých študentov, no takmer 70 % denných študentov.

Kolko hodín som sa celkovo venoval/a príprave na test?

V dotazníku k predmetu Základy matematiky sme sa pýtali na počet hodín prípravy na jednotlivé testy. Pri témach Funkcie a Rovnice a nerovnice najviac študentov venuje príprave na test 2 až 5 hodín, pri téme Postupnosti do 2 hodín.

Vnímanie výučby a frekvencia účasti

Čo bolo na výučbe predmetu Matematika dobré/pozitívne?

Táto otázka bola otvorená a nepovinná, odpovedalo na ňu 25 študentov (13 denných a 12 externých študentov) zo 46 študentov. Väčšina študentov ocenila príjemnú atmosféru na hodinách, ľudský prístup vyučujúcej, zrozumiteľný a jednoduchý spôsob vysvetľovania učiva, ochotu pomôcť, zopakovanie učiva pred testom. Zvlášť externí študenti vyzdvihli zameranie sa na podstatné veci, možnosť písať testy po každej téme, vysvetlenie aj náročnejších tém na jednoduchých príkladoch, tvorbu schém pre pochopenie súvislostí, priestor na otázky a ochotu vysvetliť nejasnosti aj opakovane.

Pri predmete Základy matematiky na túto nepovinnú otázku v dotazníku odpovedalo 17 z 34 študentov. Väčšina študentov ocenila ľudský a priateľský prístup vyučujúcej, zrozumiteľný spôsob výučby, vysvetlenie učiva do hĺbky a rôznymi metódami pre ľahšie pochopenie, pri priebežných testoch bolo možné dohodnúť sa na termínoch.

Výučbu počas semestra som navštevoval/a na:

29 študentov (63 %) sa zúčastnilo celej výučby, ďalších 13 študentov (28 %) malo menej ako 25 % absencií.



Základy matematiky

Absolvoval/a som predmet Základy matematiky? Ak ste predmet Základy matematiky absolvovali, do akej miery Vám pomohol pri zopakovaní/doučení stredoškolskej matematiky?

28 študentov (61 %) absolvovalo predmet Základy matematiky počas zimného semestra a 80 % z nich uviedlo, že im predmet Základy matematiky do veľkej miery pomohol.

V dotazníku k predmetu Základy matematiky 47 % študentov uviedlo, že im predmet do veľkej miery pomohol, 36 % študentom predmet pomohol.

Matematika na strednej škole

V ktorom ročníku strednej školy som mal/a naposledy predmet Matematika?

35 študentov (77 %) malo matematiku aj v 4. ročníku strednej školy, z toho 9 študentov (20 %) z matematiky maturovalo. 8 študentov (17 %) malo matematiku naposledy v 3. ročníku, 2 % v 2. ročníku a 4 % študentov len v 1. ročníku.

V dotazníku k predmetu Základy matematiky boli odpovede veľmi podobné, 73 % študentov malo matematiku naposledy v 4. ročníku strednej školy, 17 % študentov z matematiky maturovalo, 19 % študentov malo matematiku naposledy v 3. ročníku, v 2. ročníku 3 % a v 1. ročníku 6 % študentov.

Návrhy na vylepšenie výučby

Čo by sa dalo na výučbe predmetu Matematika vylepšiť a ako?

Táto otvorená otázka bola tiež nepovinná, odpovedalo na ňu 18 zo 46 opýtaných študentov, najmä externí študenti. Najviac by externí študenti uvítali vyššiu dotáciu na výučbu, aby bolo viac času na precvičenie a pochopenie učiva. Tiež boli návrhy na rozloženie učiva do dvoch semestrov, alebo ubrať z rozsahu učiva, prepočítať spoločne viac príkladov a využiť skupinovú prácu pre rýchlejšie osvojenie nových poznatkov. Denní študenti by preferovali viac seminárov a menej prednášok, venovať viac času jednotlivým témam, písať testy po každej téme a minimalizovať množstvo sprístupnených študijných materiálov na tie najnutnejšie.

V rámci predmetu Základy matematiky na túto otázku odpovedalo 11 študentov, 6 študentov bolo veľmi spokojných s výučbou a nemenili by nič. Ďalší študenti navrhovali udeľovať body za aktivitu počas semestra, na hodine prepočítať radšej menej príkladov s pomalším tempom vysvetľovania, počítajú príklady študentmi pri tabuli, venovať menej pozornosti úplným základom a viac času náročnejším témam.

Dosiahnuté hodnotenie

V dotazníku k predmetu Základy matematiky bola aj otázka týkajúca sa dosiahnutého hodnotenia. 19 % študentov získalo hodnotenie A, 17 % hodnotenie B, 11 % hodnotenie C, 19 % hodnotenie D, 17 % hodnotenie E a 17 % študentov hodnotenie FX.

4 Záver

Zmenou odporúčaného študijného plánu v bakalárskych študijných programoch v študijnom odbore Ekológia a manažment a zaradením výberového predmetu na podporu zopakovania a doplnenia stredoškolských vedomostí sa študentom vytvoril väčší priestor na zvládnutie vysokoškolskej matematiky. Zároveň získali vyučujúci viac možností na monitorovanie individuálnych pohľadov a preferencií študentov, na základe ktorých môžu pružnejšie prispôbovať metódy výučby v danej študijnej skupine.

Subjektívne vnímanie matematiky študentmi a spätná väzba sú dôležité pre nastavenie celkového prístupu k výučbe. Podľa výsledkov uvedeného dotazníkového prieskumu najviac študentov vníma

matematiku ako výzvu, takže u nich možno predpokladať motiváciu a snahu o získanie vedomostí potrebných na úspešné absolvovanie matematických predmetov. Pomerne veľká skupina študentov však deklaruje matematiku ako svoju nočnú moru, resp. nutné zlo. Je preto dôležité pri výučbe zohľadniť aj tento aspekt a hľadať spôsob, ako pomôcť študentom prekonať negatívne emócie, zvýšiť ich individuálne šance a celkovú efektivitu štúdia.

Referencie

- [1] CERMAN, Zbyněk. Komplexnosť motivačného štýlu výuky matematických predmetů na vysokých školách. In: *Sborník z 30. semináře Moderní matematické metody v inženýrství* [online]. Čeladná: VŠB–Technická univerzita Ostrava, 2025, s. 40–61 [cit. 2026-05-27]. ISBN 978-80-248-4824-2. Dostupné z DOI: [10.31490/9788024848242](https://doi.org/10.31490/9788024848242).
- [2] KRÁLOVÁ, Michaela, CHVÁTAL, Martin, MATULOVÁ, Markéta, ČERNÁ, Tereza. Math and Stats Support Centre at Masaryk University in Brno. In: *Handbook of Good Practice in Providing Mathematics and Statistics Learning Support* [online]. 2023, s. 53–61 [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://mslsnet.ceitec.cz/files/463/263.pdf>.
- [3] MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VÝSKUMU, VÝVOJA A MLÁDEŽE SR. *Výkonnostné zmluvy verejných vysokých škôl* [online]. 2023 [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://www.minedu.sk/vykonnostne-zmluvy-verejnych-vysokych-skol/>.
- [4] REBENDA, Josef. MSLS and the Power of Feedback, Part 2: Right to an Effective Feedback. In: *Sborník z 30. semináře Moderní matematické metody v inženýrství* [online]. Čeladná: VŠB–Technická univerzita Ostrava, 2025, s. 107–112 [cit. 2026-05-27]. ISBN 978-80-248-4824-2. Dostupné z DOI: [10.31490/9788024848242](https://doi.org/10.31490/9788024848242).



Studijní úspěšnost studentů technické vysoké školy v úvodních matematických předmětech: srovnání dvou generací po deseti letech

Dagmar Dlouhá  Lukáš Pospíšil

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Příspěvek se zaměřuje na analýzu vstupní úrovně matematických znalostí a následné studijní úspěšnosti studentů Hornicko-geologické fakulty na VŠB – Technické univerzitě Ostrava. Porovnávány jsou dvě časově oddělené kohorty studentů prvního ročníku z akademických let 2013 a 2023. V obou obdobích byl realizován shodný vstupní diagnostický test z matematiky zaměřený na klíčové středoškolské učivo nezbytné pro technické studium. Výsledky testu jsou analyzovány z hlediska celkového bodového zisku a následně konfrontovány se studijní úspěšností obou kohort v předmětech Základy matematiky, Matematika I a Matematika II na agregované úrovni. Pozornost je věnována zejména změnám ve struktuře vstupního profilu studentů, především podílu studentů bez maturitní zkoušky z matematiky, a také míře neúspěšnosti v matematických kurzech prvního ročníku. Výsledky umožňují diskutovat souvislosti mezi vstupní úrovní matematických znalostí, předchozí vzdělávací zkušeností a studijní úspěšností v počáteční fázi technického vysokoškolského studia a vytvářejí podklad pro formulaci cílených podpůrných opatření.


Klíčová slova Hodnocení studentů, ECTS klasifikace, longitudinální srovnání, výuka matematiky.

1 Úvod

Tato studie vznikla na půdě Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava (VŠB – TUO), konkrétně na Hornicko-geologické fakultě (HGF, [4]), která připravuje studenty v oblastech geověd, hornictví, environmentálního inženýrství, geoinformatiky, geodézie a dalších technicky a přírodovědně orientovaných oborů. Tyto studijní programy vyžadují schopnost kvantitativního uvažování, práci s matematickými modely, analýzu dat a aplikaci matematických metod při řešení praktických technických problémů.

Matematika proto představuje jeden ze základních pilířů studia. Je nezbytná nejen pro zvládnutí teoretických předmětů prvního ročníku, ale i pro další odborný rozvoj studentů v navazujících technických a aplikačních disciplínách. Úroveň vstupních matematických znalostí tak významně ovlivňuje jejich studijní úspěšnost [2], [3].

Současně však dochází k proměně struktury uchazečů o technické studium. Maturitní zkouška z matematiky není v České republice povinná, a část studentů proto volí jako povinně volitelný

 Korespondenční autor (dagmar.dlouha@vsb.cz).

předmět cizí jazyk. Tento trend se projevuje i u uchazečů o technické obory, kde by bylo možné očekávat vyšší zastoupení maturantů z matematiky. Vzhledem k tomu, že na HGF VŠB–TUO není u bakalářského studia uplatňováno přijímací řízení formou přijímacích zkoušek z matematiky, vstupní úroveň matematických znalostí studentů je značně heterogenní.

Tyto skutečnosti vytvářejí přirozený rámec pro zkoumání vztahu mezi předchozí vzdělávací zkušeností, volbou maturitního předmětu a následnou studijní úspěšností v matematických kurzech prvního ročníku. Cílem této studie je proto porovnat dvě časově oddělené kohorty studentů a analyzovat, jak se změny ve vstupním profilu studentů promítají do jejich výsledků v klíčových matematických předmětech.

2 Předmět studie

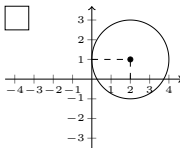
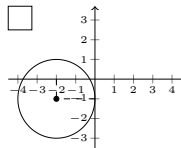
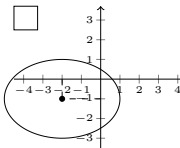
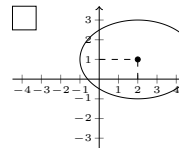
Zkoumaný soubor tvoří studenti prezenční formy technických studijních programů, kteří nastoupili do prvního ročníku vysokoškolského studia v akademických letech 2013 a 2023. Jedná se o srovnávací analýzu dvou časově oddělených kohort studentů.

V obou sledovaných letech byl v prvním týdnu zimního semestru realizován vstupní diagnostický test z matematiky. Účast na testování byla dobrovolná a test byl vyplňován anonymně. Tento diagnostický test byl koncipován tak, aby ověřil úroveň znalostí středoškolské matematiky nezbytných pro studium technických oborů. Obsahoval úlohy z elementární algebry, práce s funkcemi a řešení rovnic a nerovnic. Část úloh byla zaměřena na ověření zvládnutí standardních postupů řešení, jiné úlohy kladly důraz na samostatné uvažování, řešení problémů a matematickou gramotnost (viz Obrázek 1).

2. Mezi čísla $\frac{4}{3}$ a $\frac{6}{5}$ platí vztah:

$\frac{4}{3} > \frac{6}{5}$
 $\frac{4}{3} = \frac{6}{5}$
 $\frac{4}{3} \leq \frac{6}{5}$
 $\frac{4}{3} < \frac{6}{5}$
 Žádná z předchozích odpovědí není správná.

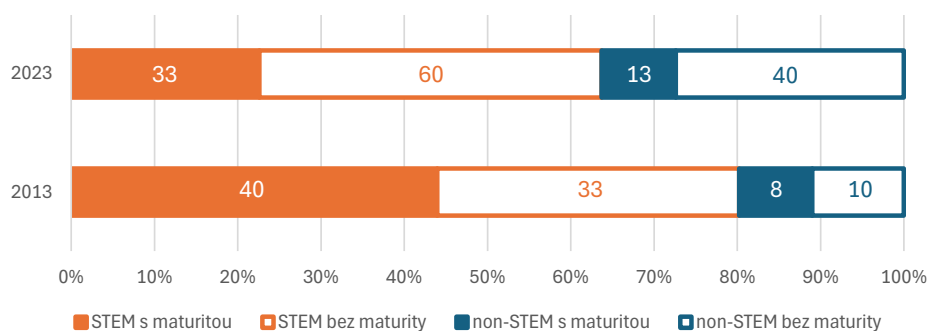
3. Rovnice $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ vyjadřuje křivku:


 
 
 
 Žádná z předchozích odpovědí není správná.

Obrázek 1 Příklady typových úloh ze vstupního diagnostického testu ověřujících numerické porozumění a schopnost geometrické interpretace algebraického vyjádření.

Struktura i obsah testu byly v obou sledovaných letech shodné, což umožnilo přímé porovnání dosažených výsledků mezi jednotlivými kohortami. Hodnocení probíhalo bodovým systémem – každá úloha byla ohodnocena 0 nebo 1 bodem, přičemž 0 znamenalo nesprávnou odpověď a 1 správnou odpověď. Každá úloha měla právě jednu správnou možnost.

Do vstupního diagnostického testu byly kromě samotných matematických úloh zařazeny také doplňující otázky zaměřené na předchozí vzdělávací dráhu studentů. Zjišťovali jsme typ absolvované střední školy a skutečnost, zda studenti skládali maturitní zkoušku z matematiky. Jednotlivé typy středních škol byly následně agregovány do širších kategorií podle zaměření na oblast STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), tedy přírodovědné, technické a matematicky orientované obory, a ostatní obory mimo tuto oblast. Tato klasifikace umožňuje základní orientaci ve vstupním profilu studentů a poskytuje kontext pro interpretaci jejich výsledků. Přehled struktury zkoumaných kohort podle těchto charakteristik je uveden na Obrázku 2. Uvedené informace tak napomáhají lépe porozumět tomu, s jakým typem studijní populace pracujeme a jaké předchozí vzdělávací zkušenosti si studenti do prvního ročníku přinášejí.



Obrázek 2 Struktura studentů v akademických letech 2013 a 2023 podle typu absolvované střední školy (STEM/non-STEM) a podle skutečnosti, zda skládali maturitní zkoušku z matematiky. Údaje v jednotlivých segmentech představují absolutní počty studentů.

V dalších letech studia jsme sledovali studijní úspěšnost obou kohort v navazujících matematických předmětech, konkrétně v předmětech Základy matematiky, Matematika I a Matematika II. Cílem bylo posoudit, zda se mezi sledovanými roky liší nejen vstupní úroveň znalostí, ale také následná úspěšnost v klíčových matematických kurzech.

Výsledky jsou prezentovány formou rozdělení klasifikací podle systému European Credit Transfer and Accumulation System (ECTS), viz Tabulka 1, kde jsou uvedeny jednotlivé klasifikační stupně (A–F) a odpovídající bodové intervaly. Klasifikační systém ECTS rozlišuje stupně A až E jako hodnocení úspěšného absolvování předmětu a stupeň F jako neúspěšné ukončení. Předmět je považován za splněný v případě, že student získá více než 50 bodů z celkového hodnocení. Součástí hodnocení je skupina označena pomlčkou, kam jsme zařadili studenty, kteří z předmětu nezískali ani zápočet a nebyli připuštěni ke zkoušce.

Tabulka 1 Klasifikace podle systému ECTS a odpovídající bodové intervaly

Stupeň	–	F	E	D	C	B	A
Bodový interval	bez zápočtu	0–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100

Souhrnné počty studentů v jednotlivých předmětech a fázích hodnocení jsou uvedeny v Tabulce 2. Tabulka zachycuje celkový počet zapsaných studentů v daném předmětu, počet studentů, kteří nezískali zápočet, a počet studentů, kteří úspěšně absolvovali zkoušku. Údaj „zkouška“ přitom označuje studenty, kteří v celkovém hodnocení získali více než 50 bodů, tedy dosáhli klasifikace A až E podle systému ECTS.

Z dat je patrné, že významná část studentů daných kurzů nezíská ani zápočet. Například v roce 2013 nezískalo zápočet v předmětu Základy matematiky přibližně 57 % studentů (388 z 675), v Matematice I dokonce zhruba 62 % (462 z 742) a v Matematice II přibližně 45 % (166 z 373). Podobný trend lze pozorovat i v roce 2023, kde podíl studentů bez zápočtu činí přibližně 60 % v předmětu Základy matematiky, 69 % v Matematice I a přibližně 8 % v Matematice II. Naopak mezi studenty, kteří zápočet získají, je úspěšnost u zkoušky relativně vysoká, což naznačuje, že splnění průběžných požadavků předmětu představuje klíčový předpoklad pro úspěšné zakončení kurzu.

Tabulka tak umožňuje nejen přímé srovnání obou kohort z hlediska celkové úspěšnosti, ale také identifikaci kritických míst studijního procesu, zejména vysokého podílu studentů, kteří se nedostanou ani do fáze závěrečné zkoušky. Je rovněž třeba zdůraznit, že předměty Základy matematiky a Matematika I jsou zařazeny již v prvním roce bakalářského studia. Výsledky těchto kurzů tak do značné míry odrážejí adaptační fázi studentů na vysokoškolské prostředí. V této etapě studia řada studentů teprve zjišťuje, zda je zvolený obor pro ně vhodný a zda jim vysokoškolský způsob studia vyhovuje. Studijní neúspěšnost v prvním ročníku proto nelze interpretovat výhradně jako důsledek nedostatečných znalostí, ale také

jako projev přirozené selekce a postupného vyjasňování studijních preferencí.

Tabulka 2 Počty studentů v jednotlivých předmětech a fázích hodnocení.

		2013	2023
Vstupní test	počet	91	146
	počet	675	348
Základy matematiky	bez zápočtu (-)	388	209
	zkouška (A-E)	287	139
	počet	742	360
Matematika I	bez zápočtu (-)	462	250
	zkouška (A-E)	210	94
	počet	373	136
Matematika II	bez zápočtu (-)	166	11
	zkouška (A-E)	176	107
	počet	342	118

Vzhledem k tomu, že vstupní test byl anonymní, nebylo možné propojit jeho výsledky s výsledky konkrétních studentů v dalších předmětech. Přestože u navazujících kurzů disponujeme detailními údaji o dosaženém bodovém hodnocení jednotlivých studentů z univerzitního informačního systému, naše analýza byla provedena na agregované úrovni. Výsledky jsou tedy interpretovány hromadně za celé kohorty, nikoli na úrovni individuálních studijních trajektorií.

Cílem předkládané studie je porovnat vstupní úroveň matematických znalostí studentů ve dvou sledovaných kohortách a následně analyzovat jejich studijní úspěšnost v navazujících matematických předmětech prvního ročníku. Zaměřujeme se zejména na rozložení výsledků v předmětech Základy matematiky, Matematika I a Matematika II a na porovnání struktury dosažených hodnocení mezi roky 2013 a 2023.

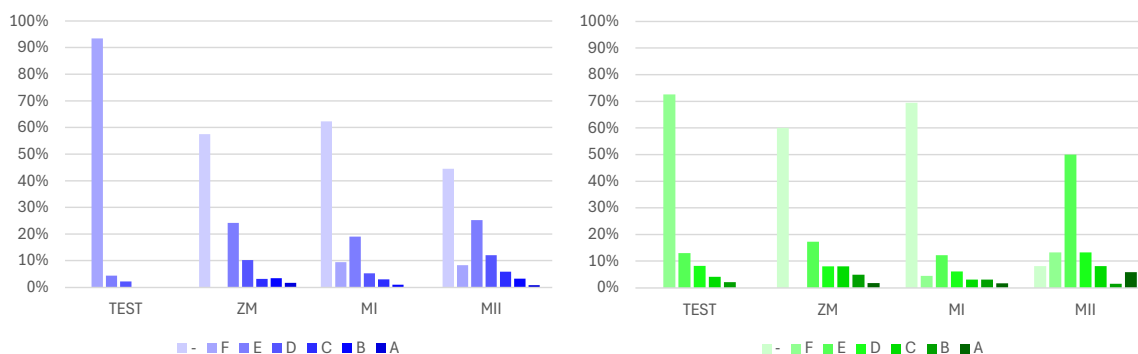
Provedená analýza tak umožňuje nejen srovnání vstupní úrovně znalostí, ale také posouzení případných změn v úspěšnosti studentů v klíčových matematických kurzech v průběhu sledovaného desetiletého období.

3 Explorační analýza výsledků

V této části se zaměřujeme na základní popis struktury výsledků studentů v jednotlivých matematických předmětech. Obrázek 3 znázorňuje relativní četnosti dosažených klasifikací podle systému ECTS (A-F) ve vstupním testu a v předmětech Základy matematiky, Matematika I a Matematika II, a to samostatně pro kohorty z let 2013 a 2023. Grafické zobrazení umožňuje přehledné porovnání rozložení hodnocení mezi jednotlivými předměty i mezi sledovanými roky.

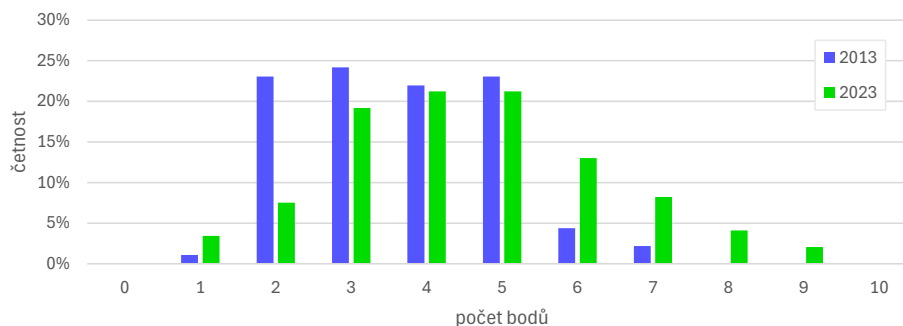
V legendě grafu je pomlčkou označena skupina studentů bez zápočtu. U předmětu Základy matematiky, který je ukončen klasifikovaným zápočtem, znamená nezískání zápočtu současně neúspěšné hodnocení (stupeň F). U předmětů Matematika I a Matematika II představuje kategorie „bez zápočtu“ studenti, kteří nesplnili průběžné podmínky a nebyli připuštěni ke zkoušce.

Vstupní test nebyl ukončen zápočtem ani zkouškou; pro účely srovnání jsme však jeho výsledky převedli do klasifikační škály ECTS. Při tomto převodu odpovídalo hodnocení F výsledkům 0–5 bodů, E šesti bodům, D sedmi bodům, C osmi bodům, B devíti bodům a A deseti bodům. Detailnější pohled na samotný vstupní test poskytuje Obrázek 4, který zachycuje relativní četnosti celkového počtu dosažených bodů (0–10) u obou sledovaných kohort. Zatímco v předchozím grafu byly výsledky agregovány do klasifikačních stupňů ECTS, zde je patrné skutečné rozložení bodového zisku bez převodu na známky. Graf na Obrázku 4 umožňuje porovnat nejen průměrnou úroveň výkonu, ale i tvar rozdělení výsledků. U kohorty z roku 2013 je rozdělení více soustředěno v oblasti středních bodových zisků, zejména mezi 2 až 5 body. Naproti tomu u kohorty z roku 2023 je patrný posun směrem k vyšším



Obrázek 3 Relativní četnosti klasifikací podle systému ECTS (A–F) ve vstupním testu a v předmětech Základy matematiky, Matematika I a Matematika II pro kohorty z let 2013 (vlevo) a 2023 (vpravo). Pomlčka označuje studenty bez zápočtu. Hodnoty jsou uvedeny v procentech; absolutní počty jsou uvedeny v Tabulce 3.

bodovým hodnotám, přičemž relativně častější jsou výsledky 6 a více bodů. Zároveň je u novější kohorty širší rozptyl dosažených bodů.



Obrázek 4 Relativní četnosti celkového počtu dosažených bodů (0–10) ve vstupním diagnostickém testu pro kohorty z let 2013 a 2023. Hodnoty jsou uvedeny v procentech z celkového počtu studentů dané kohorty.

Relativní četnosti jsou v grafu na Obrázku 4 uvedeny v procentech z celkového počtu studentů daného předmětu. Absolutní počty studentů, z nichž byly relativní hodnoty vypočteny, jsou uvedeny v Tabulce 3, což umožňuje zasadit procentuální rozdělení do konkrétního kvantitativního rámce.

4 Závěr

Předložená studie porovnávala dvě časově oddělené kohorty studentů prvního ročníku Hornicko-geologické fakulty VŠB–TUO z hlediska jejich vstupní úrovně matematických znalostí a následné studijní úspěšnosti v klíčových matematických předmětech. Analýza vycházela ze shodného vstupního diagnostického testu a z agregovaných výsledků předmětů Základy matematiky, Matematika I a Matematika II.

Výsledky poukazují na proměnu vstupního profilu studentů, zejména ve vztahu k typu absolvované střední školy a k absolvování maturitní zkoušky z matematiky. Současně se v obou sledovaných obdobích ukazuje výrazný podíl studentů, kteří nezískají zápočet v matematických předmětech prvního ročníku. Tyto předměty přitom tvoří základ dalšího odborného studia a jejich úspěšné zvládnutí je klíčové pro

Tabulka 3 Absolutní počty studentů podle klasifikace ECTS (A–F) ve vstupním testu a v předmětech Základy matematiky, Matematika I a Matematika II pro kohorty 2013 a 2023. Symbol „–“ označuje studenty bez zápočtu.

Rok	Předmět	–	F	E	D	C	B	A
2013	TEST	0	85	4	2	0	0	0
	ZM	388	0	163	69	21	23	11
	MI	462	70	141	39	22	7	1
	MII	166	31	94	45	22	12	3
2023	TEST	0	106	19	12	6	3	0
	ZM	209	0	60	28	28	17	6
	MI	250	16	44	22	11	11	6
	MII	11	18	68	18	11	2	8

pokračování ve studijním programu.

Zjištěné skutečnosti podtrhují význam vstupního diagnostického testování jako nástroje, který umožňuje včas identifikovat rizikové skupiny studentů a cíleně na ně reagovat. Ukazuje se, že samotná diagnostika má smysl především tehdy, je-li systematicky propojena s následnými podpůrnými opatřeními. Na fakultě jsou proto dlouhodobě rozvíjeny konzultační služby v Math Support Centre [5], přípravné kurzy před zahájením studia i studijní materiály včetně online kurzů a výukových videí zaměřených na opakování klíčových témat středoškolské matematiky [1]. Propojení vstupní diagnostiky s těmito aktivitami může představovat efektivní nástroj ke snížení studijní neúspěšnosti v prvním ročníku a ke stabilizaci studijní trajektorie studentů technických oborů.

Studie tak poskytuje nejen popis změn ve vstupní úrovni matematických znalostí, ale i argument pro systematické budování podpůrného rámce, který reflektuje heterogenitu nastupujících kohort.

Poděkování Tento příspěvek vznikl za podpory Katedry matematiky Fakulty stavební VŠB – Technické univerzity Ostrava a projektu Rozvoj zaměstnanců a podpora studentů VŠB – TUO, CZ.02.02.XX/00/23_022/0009115. Rádi bychom vyjádřili poděkování studentům za jejich spolupráci při realizaci šetření.

Reference

- [1] DLOUHÁ, Dagmar, HAMŘÍKOVÁ, Radka. Our Experience with the Involvement of Students in the Creation of Study Materials. In: *17th Conference on Applied Mathematics (APLIMAT 2018)*. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, SPEKTRUM STU, 2018, s. 301–308. ISBN 978-80-227-4765-3.
- [2] DLOUHÁ, Dagmar, POSPÍŠIL, Lukáš, DLOUHÁ, Karolina. High school mathematics knowledge level of technical university students. In: *8th International Conference on Higher Education Advances (HEAd'22)*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València, 2022, s. 531–538. Dostupné z DOI: [10.4995/HEAd22.2022.14268](https://doi.org/10.4995/HEAd22.2022.14268).
- [3] DLOUHÁ, Dagmar, POSPÍŠIL, Lukáš, DLOUHÁ, Karolina, DLOUHÁ, Magdalena. Evaluation and Remediation Opportunities for High School Mathematics Knowledge Among Students Entering a Technical University. In: *10th International Conference on Higher Education Advances (HEAd'24)*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València, 2024, s. 1046–1053. Dostupné z DOI: [10.4995/HEAd24.2024.17124](https://doi.org/10.4995/HEAd24.2024.17124).
- [4] *Hornicko-geologická fakulta VŠB – TUO* [online] [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://hgf.vsb.cz>.
- [5] *Math Support Centre VŠB – TUO* [online] [cit. 2026-05-27]. Dostupné z: <https://msc.vsb.cz>.



Zpětná vazba na opakovací workshopy v rámci služby podpory výuky matematiky

Josef Rebenda 

Brno University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Communication
Department of Mathematics, Technická 2848/8, 616 00 Brno

℘

Brno University of Technology, CEITEC BUT
Purkyňova 656/123, 612 00 Brno

Abstrakt V tomto příspěvku se budeme zabývat zpětnou vazbou na opakovací workshopy k předmětu Matematika 2 pořádané centrem podpory výuky matematiky na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně. V úvodu si připomeneme, co je cílem podpory výuky matematiky, jak s tímto cílem souvisí opakovací workshopy a jakou roli při hodnocení efektivity nabízených aktivit hraje zpětná vazba. V další části popíšeme strukturu opakovacích workshopů a skladbu dotazníku zpětné vazby včetně otázek a možných odpovědí. Poté analyzujeme kvantitativní a kvalitativní data získaná prostřednictvím dotazníku a zhodnotíme výsledky analýzy z pohledu dosažení cíle a míry efektivity. Na závěr v krátké diskuzi nastíníme možná vylepšení nabízené služby.


Klíčová slova Podpora výuky matematiky, opakovací workshopy, zpětná vazba, kvantitativní a kvalitativní analýza.

1 Úvod

Matematické předměty jsou pro studenty technických oborů často příčinou předčasného ukončení studia, [9]. Efektivním nástrojem ke snížení studijní neúspěšnosti v matematických předmětech je tzv. „podpora výuky matematiky“ (anglicky „mathematics learning support“) [5]. Tato podpora je často poskytována v rámci tzv. „center podpory“ (anglicky „support centre“). Informace o tom, co „centra podpory“ jsou a k čemu slouží, lze najít například v článku [2] nebo na stránkách sigma Network [8].

Otázkou je, do jaké míry aktivity nabízené centry podpory plní svůj účel, tj. pomáhají studentům k lepšímu pochopení matematiky. Je tedy důležité pravidelně vyhodnocovat efektivitu poskytovaných služeb [3]. K tomu může posloužit například zpětná vazba od studentů [4]. Praktickou příručku ke sběru zpětné vazby od studentů lze najít na stránkách sigma Network [7].

Jednou z možných forem podpory výuky matematiky, kterou nabízejí některé univerzity, jsou tzv. opakovací workshopy [6]. Jedná se o kombinaci výuky s možností konzultace. Tato možnost je

 Korespondenční autor (rebenda@vutbr.cz).

jednou z aktivit nabízených centrem podpory výuky matematiky „M.A.S.H. – Matematická záchranka“ na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně (FEKT VUT).

Účelem tohoto příspěvku je analyzovat data získaná od účastníků opakovacích workshopů na FEKT VUT prostřednictvím dotazníku zpětné vazby, vyhodnotit efektivitu této aktivity a prozkoumat možnosti vylepšení.

Příspěvek se skládá z následujících částí. Nejprve popíšeme strukturu opakovacích workshopů a dotazníku zpětné vazby a uvedeme všechny otázky včetně možných odpovědí. Poté se zaměříme na analýzu dat, nejprve kvantitativní a poté kvalitativní, spojenou se stručnou diskuzí výsledků analýzy. V závěru shrneme veškeré výsledky dosažené v tomto příspěvku a nastíníme možné směry budoucího vývoje a vylepšení služby.

2 Struktura opakovacích workshopů a dotazníku zpětné vazby

V této části se budeme zabývat strukturou workshopů a dotazníku a popisem jednotlivých otázek a možných odpovědí. Dotazník se týká opakovacích workshopů k předmětu Matematika 2 vyučovaném na FEKT VUT každoročně v jarním semestru akademického roku.

2.1 Opakovací workshopy

V rámci předmětu Matematika 2 se píšou dva průběžné testy, jeden přibližně v polovině semestru a druhý týden před koncem semestru. Opakovací workshopy jsou naplánovány vždy na začátek týdne, kdy se píšou testy, a jsou plánovány jako dvouhodinové. Program workshopu se ustálil po prvních dvou workshopech a má dvě části. V první části, která trvá přibližně hodinu, člen Matematické záchranky, nazývaný též tutor, počítá na tabuli příklady z průběžných testů z minulých let, vysvětluje jednotlivé kroky postupu a poskytuje rady a tipy o dalších možných postupech řešení. V druhé části je na projektoru promítáno odlišné zadání testu a studenti mohou samostatně počítat příklady s podporou tutora.

Většina studentů odchází po skončení první části. Druhé části se obvykle účastní cca 10–20 studentů, kteří postupně odcházejí. Přesná data nejsou k dispozici vzhledem k tomu, že pro účast na workshopu není vyžadována registrace a Matematická záchranka nemá prostředky k zaznamenání počtu účastníků na místě.

Účastníky workshopů jsou studenti převážně prvního a druhého ročníku bakalářského studia. První opakovací workshopy byly realizovány v jarním semestru 2024, kdy kromě workshopů před oběma průběžnými testy proběhl ještě jeden workshop před prvním termínem zkoušky. V letech 2025 a 2026 se uskutečnily pouze workshopy před průběžnými testy.

2.2 Dotazník zpětné vazby a sběr dat

Na úvod této části je vhodné připomenout, že cílem dotazníku je získání zpětné vazby za účelem vyhodnocení efektivitu služby podpory výuky matematiky a jejího případného vylepšení. Cílem dotazníku není sběr výzkumných dat za účelem hledání odpovědí na předem stanovené výzkumné otázky v oblasti didaktiky nebo pedagogiky. Tato skutečnost má podstatný vliv na strukturu dotazníku a formulace otázek i odpovědí.

Dotazník byl vytvořen po uskutečnění opakovacích workshopů k předmětu Matematika 2 na konci jarního semestru 2024. Dotazník v roce 2024 zahrnoval všechny tři realizované workshopy. V následujících letech 2025 a 2026 byl dotazník mírně upraven v jedné otázce tak, aby pokrýval pouze workshopy před průběžnými testy. Struktura dotazníku zůstala stejná. Byly použity i stejné otázky, aby byl umožněn sběr srovnatelných dat. Dotazník je implementován v MS Forms z důvodu dostupnosti a flexibility při práci s nasbíranými daty.

První otázka, která má kvantitativní charakter a její zodpovězení je povinné, zní: „Kterého/kterých workshopů jsem se zúčastnil/a? (možno vybrat více možností)“. Jedná se o otázku typu výběru z nabízených odpovědí. Nabízené možnosti jsou dvě, „před 1. testem“ a „před 2. testem“. V roce 2024 byla zařazena ještě možnost „před zkouškou“. Cílem této otázky je zjistit, kterého workshopu nebo workshopů se respondent zúčastnil.

Otázka číslo 2 je také kvantitativní a povinná a je formulována takto: „Do jaké míry mi workshop(y) pomohl(y) lépe se připravit na test(y) z BPC-MA2?“ Je to otázka typu hodnocení, zvolena byla celočíselná škála od 1 do 5 ve formě udělených hvězdiček. Tato forma byla zvolena z důvodu podobnosti se škálou hodnocení e-shopů nebo produktů nakupovaných online na základě předpokladu, že většina účastníků workshopů má s tímto způsobem hodnocení osobní zkušenost. Smyslem této otázky je posoudit, zda nabízená aktivita – kombinace výuky s možností konzultace – plní svůj účel, tj. že přispívá k lepšímu porozumění matematice.

Třetí otázka „Co bylo na workshopech dobré/pozitivní?“ je nepovinná a má kvalitativní charakter. Otázka je typu „Long answer“, respondenti mohou napsat jakoukoli odpověď ve formě textu. Limit pro odpověď na tuto otázku je 4 000 znaků včetně mezer. Cílem otázky číslo 3 je získat představu o tom, co respondenti na workshopech nejvíce oceňují.

Také čtvrtá otázka je také nepovinná a kvalitativní. Otázka zní takto: „Co by se na workshopech dalo vylepšit a jak?“ Je stejného typu jako otázka číslo 3, limit pro odpověď je opět 4 000 znaků včetně mezer. Účelem této otázky je nasbírat podněty a inspiraci k možnému vylepšení nabízené aktivity.

Poslední pátá otázka má nejdelší znění: „Jak bych celkově ohodnotil/a svoji zkušenost s workshopem/workshopy pořádanými M.A.S.H. – Matematickou záchrankou? (příležitost, komunikace, organizace, prostředí, atmosféra)“. Jedná o otázku typu hodnocení se stejnou škálou a formou jako u otázky číslo 2. Smyslem této otázky je zhodnotit kvalitu nabízené služby obecně, tj. způsobu, jakým je realizována podpora výuky matematiky v rámci Matematické záchranky na FEKT VUT.

Dotazník je koncipován jako anonymní, může ho vyplnit kdokoli, kdo získá odkaz na dotazník. Data byla získána s pomocí jednoho z vyučujících předmětu Matematika 2. Vyučující prostřednictvím vzkazu v informačním systému odeslal po 2. testu zprávu s prosbou o vyplnění dotazníku a s odkazem na dotazník všem studentům předmětu. Tím bylo zajištěno, že se informace dostala ke všem účastníkům workshopů.

3 Analýza dat

Díky použití stejných otázek a stejné skladby dotazníku jsou data nasbíraná v letech 2024 až 2026 konzistentní a mohou být analyzována stejným způsobem. Kvantitativní data obsahujících možnost „před zkouškou“ v odpovědi na otázku číslo 1, což bylo uvedeno u jednoho respondenta v roce 2024, byla vyřazena.

3.1 Kvantitativní analýza

Analýza kvantitativních dat je základním prostředkem pro vyhodnocení efektivity nabízené aktivity a nebo služby. Nejprve se pokusíme odhadnout počet účastníků jednotlivých workshopů. Jak bylo uvedeno dříve, přesné počty účastníků není možné zjistit. Odhadované počty účastníků zaokrouhlené na celé desítky a meziroční rozdíl v procentech je možné najít v Tabulce 1.

Tabulka 1 Odhadovaný počet účastníků

Rok	Workshop před 1. testem	Workshop před 2. testem	Meziroční rozdíl
2024	40	30	–
2025	70	60	+ 85 %
2026	100	100	+ 53 %

Podle dat v Tabulce 1 můžeme očekávat, že zájem o workshopy bude růst i v následujících letech a že rychlost růstu bude postupně zpomalovat. Odhadovaný počet účastníků by se mohl vyšplhat až na 150. V takovém případě by bylo potřeba zajistit větší místnost, například přednáškovou aulu.

Dále se podíváme na počet účastníků, kteří vyplnili dotazník, a na to, kterých workshopů se zúčastnili. K tomuto účelu využijeme odpovědi na otázku číslo 1. Celkový počet respondentů a počty účastníků jednotlivých workshopů jsou uvedeny v Tabulce 2. Jak již bylo uvedeno, získaná data jsou očištěna od počtu odpovědí zahrnujících možnost „Workshop před zkouškou“, která byla součástí dotazníku v roce 2024.

Tabulka 2 Počet odpovědí na otázku číslo 1 „Kterého/kterých workshopů jsem se zúčastnil/a?“

Rok	Celkový počet respondentů	Workshop před 1. testem	Workshop před 2. testem	Oba workshopy
2024	7	4	4	1
2025	27	20	21	14
2026	46	32	35	21

Z údajů v Tabulce 2 je zřejmé, že postupně dařilo dosáhnout vyššího počtu vyplněných dotazníků. V letech 2025 a 2026 se obou workshopů zúčastnila přibližně polovina respondentů.

Co se týká množství dat, z pohledu objektivit by bylo vhodné získat odpovědi od vyššího počtu účastníků. Toho by bylo možné dosáhnout například zasláním upomínky. Vzhledem k tomu, že účast na workshopech není monitorována, by upomínka musela být adresována všem studentům předmětu, což by mohlo být někým vnímáno jako obtěžující. Je tedy potřeba zvážit, zda možnost získání vyššího počtu získaných odpovědí vyváží výše zmíněné riziko.

Následuje souhrn odpovědí na otázku číslo 2, která patří mezi stěžejní otázky dotazníku. Data jsou uvedena v Tabulce 3. Důležité jsou zejména údaje ve sloupci „Průměr“.

Tabulka 3 Počet odpovědí na otázku číslo 2 „Do jaké míry mi workshopy pomohly lépe se připravit na test/zkoušku z BPC-MA2?“

Rok	Hodnocení					Průměr ≈
	Úroveň 1	Úroveň 2	Úroveň 3	Úroveň 4	Úroveň 5	
2024	1	1	0	1	4	3,86
2025	1	3	4	9	10	3,89
2026	0	1	3	15	27	4,48

Škála hodnocení pro otázku číslo 2 má středovou, tedy neutrální, hodnotu 3. Z počtů odpovědí v jednotlivých sloupcích v Tabulce 3 lze usoudit, že většina respondentů považovala workshopy za přínosné při přípravě na test. Data v Tabulce 3 tedy nepřímo potvrzují, že workshopy plní svůj účel, tj. přispívají k lepšímu pochopení matematiky.

V Tabulce 3 také můžeme pozorovat významný rozdíl mezi hodnoceními v letech 2024 a 2025 a hodnocením v roce 2026, které je podstatně vyšší. Bylo by zajímavé vyzkoumat, proč tomu tak je. Data, která jsou k dispozici, ovšem k takovému zkoumání nelze využít. Můžeme se jen domnívat, co je skutečnou příčinou výrazně lepšího hodnocení v roce 2026. Vzhledem k tomu, že struktura ani provedení workshopů nedoznaly žádných změn, musela změna nastat na straně účastníků.

Jednou z pravděpodobných příčin by mohla být vyšší míra využívání nástrojů umělé inteligence (AI) ze strany studentů. Například student, který ve cvičení neporozumí postupu výpočtu, může při počítání doma využít AI k vyřešení konkrétní úlohy. Postup zvolený AI ovšem také nemusí být pro studenta srozumitelný. Úloha je tedy vyřešena, ale bez porozumění postupu. Pokud se takový student zúčastní workshopu, kde jsou jednotlivé kroky výpočtu důkladně vysvětleny, může dojít k lepšímu porozumění postupu. Důsledkem pak může být vyšší hodnota hodnocení u otázky číslo 2.

Zbývá vyhodnotit odpovědi na další důležitou otázku, otázku číslo 5. Počty odpovědí a také průměrné hodnocení jsou shrnuty v Tabulce 4.

Tabulka 4 Počet odpovědí na otázku číslo 5 „Jak bych celkově ohodnotil/a svoji zkušenost s workshopem/workshopy pořádanými M.A.S.H. – Matematickou záchrankou? (příležitost, komunikace, organizace, prostředí, atmosféra)“

Rok	Hodnocení					Průměr ≈
	Úroveň 1	Úroveň 2	Úroveň 3	Úroveň 4	Úroveň 5	
2024	0	0	1	1	5	4,57
2025	0	2	1	11	13	4,30
2026	0	0	0	7	39	4,85

Stejně jako u otázky číslo 2 má škála hodnocení pro otázku číslo 5 středovou hodnotu 3. Data v Tabulce 4 svědčí o tom, že způsob, jakým je poskytována podpora výuky matematiky prostřednictvím opakovacích workshopů, je pro studenty atraktivní a relevantní.

Také v Tabulce 4 dosahuje průměrné hodnocení vyšší hodnoty v roce 2026 než v předchozích dvou letech, i když v tomto případě rozdíl není tak výrazný. To může souviset s tím, že přístup tutorů v Matematické záchrance je odlišný od přístupu vyučujícího, ale i s tím, že účast studentů na workshopu je dobrovolná. Zájem účastníků zlepšit se v matematice se tedy setkává s méně formálním přístupem tutora. Příčinu vyšší hodnoty v roce 2026 opět není možné určit z dat, která jsou k dispozici.

Jednou z možných příčin by opět mohla být vyšší míra využívání AI ze strany účastníků. Studenti, kteří si navyknou na časté používání AI, jsou méně motivováni ke komunikaci s vyučujícími, zvláště pokud se jedná o komunikaci ve formálním stylu. Při návštěvě workshopu pak mohou být pozitivně ovlivněni méně formální atmosférou a možností otevřeně klást otázky bez obav z možných dopadů na hodnocení předmětu. Vyšší hodnocení u otázky číslo 5 tak může být důsledkem kombinace vyšší míry využití AI a méně formálního přístupu tutora v průběhu workshopu.

3.2 Kvalitativní analýza

Analýza kvalitativních dat přináší možnost hlouběji porozumět zkoumané oblasti. Může také přispět k lepšímu pochopení kvantitativních dat a podpořit, případně upřesnit závěry učiněné na základě výsledků kvantitativní analýzy.

V této části se budeme zabývat analýzou odpovědí na kvalitativní otázky číslo 3 a 4.¹ Ke zkoumání dat byla zvolena metoda zvaná „tematická analýza“, která je jednou z analytických metod založených na opakujících se tématech, strukturách nebo vzorcích (anglicky „pattern-based methods“), viz [1]. Otázky číslo 3 a 4 jsou nepovinné, proto byly počty odpovědí na tyto otázky nižší než celkový počet respondentů. Počet respondentů, kteří odpověděli na otázku číslo 3, a jejich podíl vzhledem k celkovému počtu respondentů můžeme najít v Tabulce 5.

Tabulka 5 Počet a podíl respondentů, kteří odpověděli na otázku číslo 3 „Co bylo na workshopech dobré/pozitivní?“

Rok	Počet odpovědí	Celkový počet respondentů	Podíl ≈
2024	6	8	75,0 %
2025	22	27	81,5 %
2026	37	46	80,4 %

¹Do kvalitativních dat za rok 2024 byly zahrnuty i odpovědi respondenta, který v odpovědi na otázku číslo 1 zaškrtnl možnost „před zkouškou“. Celkový počet respondentů zahrnutých do kvalitativní analýzy se tedy zvýšil na 8.

Tematická analýza odpovědí na otázku číslo 3 byla provedena tak, že byla nejprve analyzována klíčová slova a jejich význam. Slova se stejným nebo blízkým významem pak byla sloučena do jednoho tématu, které je všechny svým významem zahrnuje. Výstupem tematické analýzy odpovědí na otázku číslo 3 jsou témata a četnosti, se kterými se témata v odpovědích objevují. Výstup je rozdělen podle let a seřazen sestupně podle četnosti.

Rok 2024

- pomoc ... 4×
- přístup tutora ... 4×
- procvičení/počítání ... 2×

Rok 2025

- počítání/řešení ... 8×
- vysvětlení ... 7×
- přístup tutora ... 4×
- testy z minulých let ... 4×
- zopakování ... 3×
- možnost ptát se ... 3×
- pochopení/porozumění ... 2×
- stručnost ... 2×
- rady/tipy ... 2×
- zpětná vazba ... 1×

Rok 2026

- přístup tutora ... 12×
- rady/tipy ... 9×
- vysvětlení ... 8×
- počítání/řešení ... 8×
- pochopení/porozumění ... 5×
- představa o obsahu testu ... 5×
- možnost ptát se ... 4×
- ukázka postupu ... 4×
- testy z minulých let ... 3×
- shrnutí/zopakování ... 2×
- možnost počítat ... 2×
- pomoc ... 1×
- atmosféra ... 1×
- zadarmo ... 1×
- pro zájemce ... 1×
- bylo slyšet ... 1×

Z výše uvedených témat a jejich četností můžeme usoudit, že respondenti nejvíce oceňují možnost připomenout si probranou látku prostřednictvím počítání a vysvětlení postupů řešení příkladů z testů z minulých let, včetně praktických tipů, které přibývají postupně s narůstajícími zkušenostmi tutorů. Cení si také méně formální atmosféry, ve které se nebojí pokládat otázky a říct si o podporu či zpětnou vazbu. Zejména tato druhá část je cenná z hlediska podpory výuky matematiky. Vyplývá z ní totiž, že významné části studentů vyhovuje přístup, který je obecně praktikován v centrech podpory: klientsky orientovaný neformální profesionální přístup zaměřený na podporu rozvoje dovedností studenta prostřednictvím zpětné vazby.



Počet nasbíraných odpovědí na otázku číslo 4 a jejich podíl vzhledem k celkovému počtu respondentů lze najít v Tabulce 6. Analýza odpovědí na otázku číslo 4 byla provedena stejným způsobem jako u otázky číslo 3. Výstup je opět rozdělen podle let a seřazen sestupně podle četnosti jednotlivých témat.

Tabulka 6 Počet a podíl respondentů, kteří odpověděli na otázku číslo 4 „Co by se na workshopech dalo vylepšit a jak?“

Rok	Počet odpovědí	Celkový počet respondentů	Podíl ≈
2024	3	8	37,5 %
2025	18	27	66,7 %
2026	22	46	47,8 %

Rok 2024

- počítání na tabuli ... 2×
- nic ... 1×

Rok 2025

- větší místnost ... 4×
- více typových příkladů ... 3×
- nic ... 3×
- efektivnější 2. část ... 3×
- lépe vysvětlit postupy ... 2×
- pomalejší tempo ... 2×
- vynechat 2. část ... 1×
- hlasitost ... 1×
- zeptat se na vstupní znalosti ... 1×
- příklady neodpovídaly testu ... 1×

Rok 2026

- nic ... 7×
- hlasitost ... 4×
- obtížnější příklady ... 3×
- více typů příkladů ... 2×
- propagace ... 2×
- nabídnout pro předměty
Matematika 3, resp.
Matematika 1 ... 2×
- rovnou jít do větší učebny ... 1×
- větší odstup před testem ... 1×
- příliš podrobné
vysvětlení a počítání ... 1×
- ukázat výsledky k 2. části ... 1×
- delší workshop ... 1×
- pomalejší tempo ... 1×
- více workshopů za semestr ... 1×

Výsledky tematické analýzy odpovědí na otázku číslo 4 si zaslouží podrobnější rozbor a diskuzi. Nejprve si povšimneme skutečnosti, že během let postupně přibývá odpovědí „nic“, tedy že není co vylepšit. To může znamenat, že dotazník zpětné vazby plní očekávanou funkci, tj. že na základě nasbíraných odpovědí dochází k reflexi na straně organizátora (Matematické záchranky) a k následnému vylepšení nabízené aktivity.

Dále je zřejmé, že s přibývajícím počtem účastníků se zvyšuje potřeba realizovat workshopy v místnosti s vyšší kapacitou, což ovšem může mít za následek potíže s hlasitostí projevu tutora. Na důležitosti nabývá také disciplína účastníků.

Návrhy na počítání na tabuli se vztahovaly k prvním dvěma uskutečněným workshopům, kdy se teprve formoval koncept workshopu a počítání na tabuli nebylo součástí programu.

Je pochopitelné, že účastníci by uvítali více typových příkladů. Zde je potřeba vzít v úvahu časové hledisko. Aby bylo možné probrat více typů příkladů, workshop by musel být delší. To ovšem v současnosti není v možnostech Matematické záchranky z kapacitních důvodů, a nebylo by to vhodné ani vzhledem k efektivitě učení, která po dvou hodinách významně klesá. Podobně je to i s pomalejším tempem počítání, i to by mělo za následek prodloužení workshopu.

Poptávku po obtížnějších příkladech také není snadné uspokojit. Obtížnější příklady obecně vyžadují více času. Hlavně ale ne vždy jsou nejvhodnější pro ukázkou postupu řešení daného typu příkladu. Obdobně by vypadala reakce na námitku, že příklady neodpovídají příkladům v testu. Vzhledem k tomu, že test má více variant, obvykle 4 až 8, není možné během dvouhodinového workshopu propočítat všechny typy příkladů, a to dokonce ani při vynechání 2. části.

Na druhou stranu je relevantní návrh zorganizovat 2. část workshopu efektivněji. Jeden tutor by těžko pokryl 100 účastníků, když má co dělat i s 20. Vyšší počet tutorů v průběhu 2. části workshopu by určitě prospěl. Také by stálo za úvahu zkusit vylepšit vysvětlení postupů.

Propagace je jedním z témat týkajících se služby podpory výuky matematiky obecně. Vždy je možné zamyslet se nad novými možnostmi propagace a jejím zefektivněním. Vzhledem ke stávající kapacitě Matematické záchranky se to jeví jako obtížné, ale ne nemožné. Z kapacitních důvodů je také obtížné pořádat více workshopů za semestr.

Zajímavý je návrh zařadit do nabídky služby Matematická záchranka také opakovací workshopy pro předměty Matematika 1 a Matematika 3. O tomto návrhu určitě má smysl uvažovat nejen v kontextu uvedených předmětů, ale celé fakulty.

Naopak návrh zeptat se účastníků na jejich vstupní znalosti není relevantní. Obecně by všichni účastníci měli mít stejné vstupní znalosti, přesněji, měli by mít odpovídající znalosti ze střední školy a představu o tom, jaká témata byla probrána v rámci předmětu Matematika 2. To by mělo stačit k tomu, aby pro ně opakovací workshop byl přínosný.

Podobně není relevantní ani návrh zařadit workshop s větším odstupem před testem. Aby opakovací workshop plnil svůj účel, musí být realizován až po probrání všech témat, která budou na testu. To obvykle nastává až v týdnu, kdy se koná test, ne dříve.

Na závěr je vhodné uvést i to, že někteří respondenti považovali vysvětlení a počítání na tabuli za příliš podrobné. To je v kontrastu s odpověďmi jiných respondentů, kteří naopak podrobné vysvětlení ocenili. Vzhledem k tomu, že těchto respondentů, kteří byli spokojeni, bylo více, lze konstatovat, že úroveň podrobnosti výkladu je správně nastavena.

4 Závěr

V tomto příspěvku jsme se věnovali zpětné vazbě na opakovací workshopy k předmětu Matematika 2 pořádané centrem podpory výuky matematiky na FEKT VUT v Brně. V úvodu jsme připomněli, že cílem podpory výuky matematiky je lepší pochopení matematiky na straně studentů, že jednou z možných aktivit vedoucích k tomuto cíli jsou opakovací workshopy, a že efektivitu nabízených aktivit je možné posoudit na základě zpětné vazby od studentů. V další části jsme popsali strukturu opakovacích workshopů, která má dvě části, počítání na tabuli a samostatné počítání. Dále jsme probrali skladbu



dotazníku zpětné vazby, který sestává ze tří povinných kvantitativních otázek a dvou nepovinných kvalitativních otázek. Poté jsme analyzovali získaná data, nejprve kvantitativní a pak kvalitativní. Výsledky analýzy potvrdily, že zájem o opakovací workshopy meziročně roste, že workshopy naplňují účel, a že forma poskytované podpory odpovídá potřebám účastníků. Ukázalo se, že respondenti oceňují možnost souhrnného zopakování látky před testem a méně formálního prostředí, ve kterém se nebojí klást otázky. Nakonec jsme se věnovali diskuzi o možných vylepšeních opakovacích workshopů. Z návrhů, které byly výstupem tematické analýzy, lze reálně uvažovat o navýšení kapacity workshopů, vylepšení zvuku při počítání na tabuli, efektivnějším vysvětlení postupů řešení, zapojení více tutorů, zefektivnění propagace a rozšíření nabídky opakovacích workshopů na další matematické předměty.

Reference

- [1] BRAUN, V., CLARKE, V. Can I use TA? Should I use TA? Should I not use TA? Comparing reflexive thematic analysis and other pattern-based qualitative analytic approaches. *Counselling and Psychotherapy Research*. 2021, vol. 21, no. 1, s. 37–47. Dostupné z DOI: [10.1002/capr.12360](https://doi.org/10.1002/capr.12360).
- [2] GILL, O., MAC AN BHAIRD, C., NÍ FHLOINN, E. The Origins, Development and Evaluation of Mathematics Support Services. *Irish Mathematical Society Bulletin* [online]. 2010, vol. 66, s. 51–63 [cit. 2026-06-02]. Dostupné z: <http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull66/ME6602.pdf>.
- [3] MACGILLIVRAY, H., CROFT, T. Understanding evaluation of learning support in mathematics and statistics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2011, vol. 42, no. 2, s. 189–212. Dostupné z DOI: [10.1080/0020739X.2010.519801](https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.519801).
- [4] NÍ FHLOINN, E. The role of student feedback in evaluating mathematics support centres. In: *Proceedings of the CETL-MSOR Conference 2009* [online]. Milton Keynes, UK, 2009 [cit. 2026-06-02]. Dostupné z: <https://doras.dcu.ie/21665/>.
- [5] PARSONS, S., CROFT, T., HARRISON, M. Engineering students' self-confidence in mathematics mapped onto Bandura's self-efficacy. *Engineering Education*. 2011, vol. 6, no. 1, s. 52–61. Dostupné z DOI: [10.11120/ened.2011.06010052](https://doi.org/10.11120/ened.2011.06010052).
- [6] SIGMA MATHS AND STATS SUPPORT CENTRE, COVENTRY UNIVERSITY. *Workshops* [online]. 2026 [cit. 2026-06-02]. Dostupné z: <https://libguides.coventry.ac.uk/sigma/workshops>.
- [7] SIGMA NETWORK. *Gathering student feedback on mathematics and statistics support provision* [online]. 2026 [cit. 2026-06-02]. Dostupné z: <https://www.sigma-network.ac.uk/operating-a-mathematics-and-or-statistics-support-centre/>. section Guides and reports; page: Operating a mathematics and/or statistics support centre.
- [8] SIGMA NETWORK. *Sigma Network* [online]. 2026 [cit. 2026-06-02]. Dostupné z: <https://www.sigma-network.ac.uk/>.
- [9] TSUI, T., KHAN, R. N. Is mathematics a barrier for engineering? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2023, vol. 54, no. 9, s. 1853–1873. Dostupné z DOI: [10.1080/0020739X.2023.2256319](https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2256319).



Matematické dovednosti a postoje studentů ekonomických oborů při začátku studia

Simona Pulcerová 

Pavína Forstová Kuráňová


VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Příspěvek se zaměřuje na analýzu vstupních matematických dovedností a postojů studentů ekonomických oborů. Dotazníkové šetření realizované mezi 262 studenty zkoumá jejich základní znalosti, sebedůvěru a vztah k matematice. Součástí dotazníku byl krátký test ověřující klíčové středoškolské dovednosti a sada výroků hodnocených na pětibodové škále, na jejichž základě byly vytvořeny indexy motivace, sebejistoty a vztahu k matematice. Výsledky ukazují vysokou úspěšnost v rutinních výpočtech, zatímco úlohy vyžadující hlubší porozumění a pokročilejší koncepty představují pro studenty větší obtíž. Studenti současně vnímají matematiku jako důležitou pro své studium a očekávají zlepšení, avšak vykazují nižší sebedůvěru a spíše rezervovaný vztah k předmětu. Analýza dále prokázala významné rozdíly v závislosti na předchozí matematické zkušenosti, zejména podle maturity z matematiky a typu střední školy. Tyto faktory ovlivňují především sebedůvěru studentů a jejich vztah k matematice. Výsledky poukazují na potřebu zohlednit heterogenitu vstupní úrovně studentů při plánování výuky.

Klíčová slova Matematická gramotnost, postoje k matematice, předchozí vzdělání, vysokoškolská výuka.

1 Úvod

Studenti ekonomických oborů vstupují do výuky matematiky s rozdílnou úrovní znalostí i odlišnými postoji k tomuto předmětu. Tyto rozdíly jsou ovlivněny především předchozím vzděláním, zejména typem absolvované střední školy a zkušeností s maturitou z matematiky. Zatímco část studentů vnímá matematiku jako důležitý nástroj pro porozumění ekonomickým souvislostem, jiní k ní přistupují s nejistotou nebo negativní zkušeností z předchozího studia. Postoje studentů k matematice souvisejí s jejich předchozí zkušeností a mohou ovlivňovat jejich studijní úspěšnost [4], přičemž významnou roli hraje také způsob výuky matematiky [3]. Cílem tohoto příspěvku je analyzovat vstupní matematické dovednosti studentů a jejich postoje k matematice a identifikovat faktory, které tyto postoje ovlivňují.

 Korespondenční autor (simona.pulcerova@vsb.cz).

2 Metodika

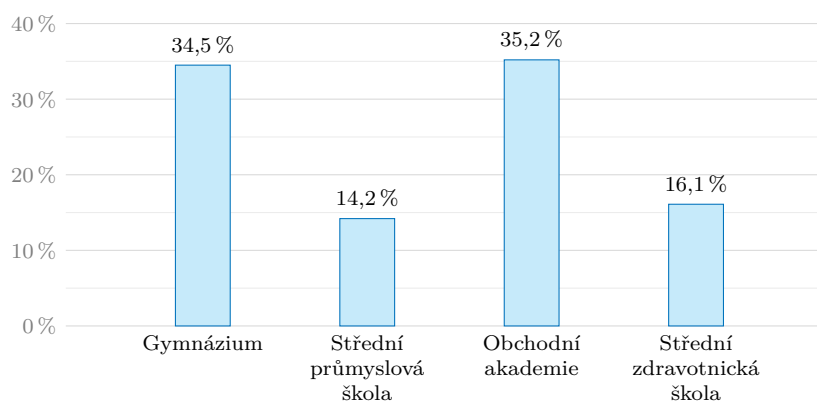
Dotazníkové šetření bylo realizováno mezi 262 studenty převážně prvního ročníku ekonomických oborů. Dotazník obsahoval tři části: základní charakteristiky respondentů (pohlaví, typ střední školy, maturita z matematiky, účast na přípravném kurzu), krátký test matematických dovedností a sadu výroků hodnotících postoj k matematice. Testová část zahrnovala pět úloh ověřujících základní středoškolské dovednosti (mocniny, procenta, lineární rovnice, práce se vzorci a derivace).

Postoje studentů byly zjišťovány pomocí sedmi výroků hodnocených na pětibodové Likertově škále (1 – zcela nesouhlasím, 5 – zcela souhlasím). Na jejich základě byly vytvořeny tři souhrnné indexy: motivace, sebejistota a vztah k matematice. Pro porovnání skupin studentů podle předchozí matematické zkušenosti byly použity neparametrické testy (Mann-Whitneyův U -test a Kruskal-Wallisův test) [2].

3 Charakteristika respondentů

Výzkumný soubor tvořilo 262 studentů ekonomických oborů, převážně z prvního ročníku (90,5 %). Ve vzorku bylo 53,4 % mužů a 46,6 % žen. Z hlediska předchozího vzdělání pocházeli studenti nejčastěji z obchodních akademií (35,2 %) a gymnázií (34,5 %), menší zastoupení měli absolventi středních průmyslových (14,2 %) a zdravotnických škol (16,1 %). Maturitu z matematiky absolvovalo 21,9 % studentů, zatímco většina (78,1 %) z matematiky nematurovala. Přípravného kurzu se zúčastnilo pouze 7,3 % respondentů.

Tento profil studentů odpovídá typickému složení ekonomických oborů a zároveň naznačuje značnou heterogenitu ve vstupní matematické zkušenosti.

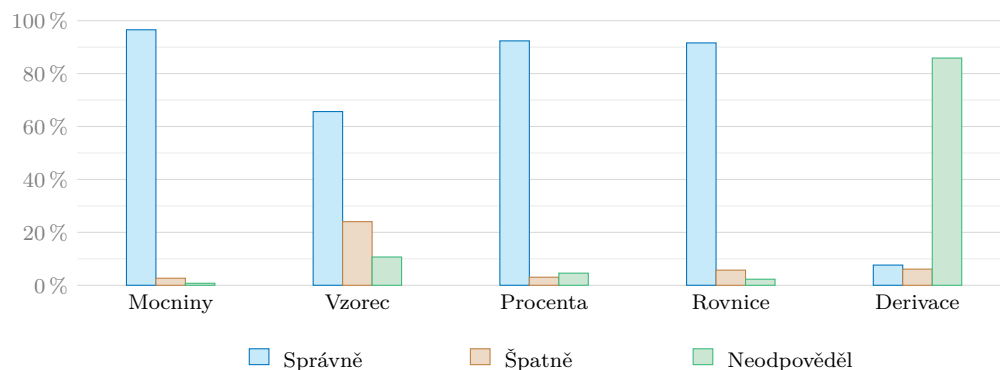


Obrázek 1 Rozdělení studentů podle absolvovaného typu střední školy

4 Matematické dovednosti studentů

Součástí dotazníku bylo pět krátkých úloh ověřujících základní středoškolské matematické dovednosti (mocniny, procenta, lineární rovnice, práce se vzorci a derivace). Výsledky ukazují výrazné rozdíly mezi jednotlivými typy úloh. Vysoké úspěšnosti dosáhli studenti u rutinních výpočtů – úlohy na mocniny (96,6 %), procenta (92,4 %) a lineární rovnice (92,0 %). Nižší úspěšnost byla zaznamenána u úloh vyžadujících hlubší porozumění, zejména u práce se vzorci (65,6 %). Největší obtíže činila úloha na derivace, kterou správně vyřešilo pouze 7,6 % studentů. Tato oblast nebývá standardní součástí výuky na všech typech středních škol, což může vysvětlovat její nízkou úspěšnost.

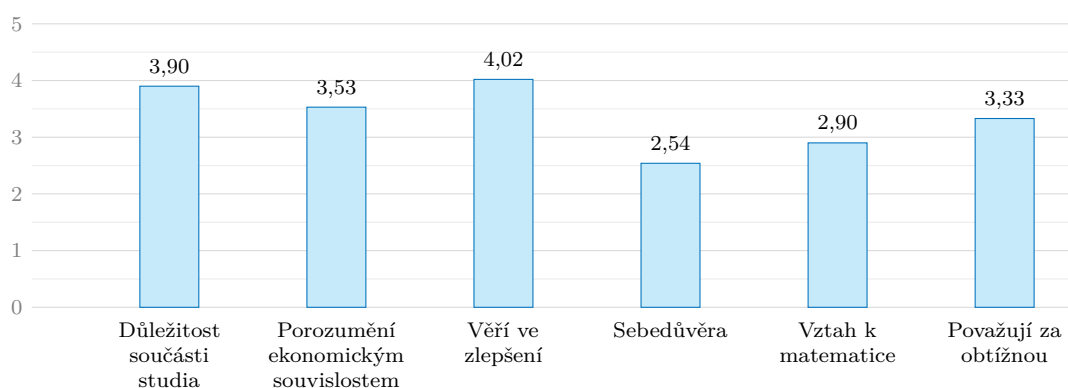
Výsledky naznačují, že studenti vstupují do kurzu s dobrou znalostí základních operací, avšak s omezenou zkušeností s pokročilejšími matematickými koncepty. Tento jev je běžný při přechodu ze střední na vysokoškolskou matematiku [1]. Tyto rozdíly mohou mít významný dopad na úspěšnost studentů v navazujících tématech vysokoškolské matematiky.



Obrázek 2 Úspěšnost řešení matematických úloh podle typu úlohy

5 Postoje studentů k matematice

Postoje studentů k matematice byly zjišťovány pomocí sedmi výroků hodnocených na pětibodové Likertově škále. Z deskriptivních výsledků vyplývá, že studenti obecně vnímají matematiku jako důležitou součást svého studia (průměr 3,90) a očekávají, že jim pomůže lépe porozumět ekonomickým souvislostem (3,53). Současně většina studentů věří, že se v matematice během semestru zlepší (4,02). Naopak nižší hodnoty byly zaznamenány v oblasti sebedůvěry (2,54) a vztahu k matematice (2,90). Studenti také poměrně často uváděli, že matematiku považují za obtížnou (3,33). Obrázek 3 znázorňuje průměrné hodnocení jednotlivých výroků. Studenti nejvýše hodnotí význam matematiky a očekávané zlepšení, zatímco nižší hodnoty jsou patrné v oblasti sebedůvěry a vztahu k matematice.



Obrázek 3 Průměrné hodnocení výroků o matematice (Likertova škála 1–5)

Výsledky naznačují, že studenti mají k matematice spíše pragmatický přístup – uznávají její význam a očekávají zlepšení, avšak jejich sebedůvěra je nižší, což může ovlivňovat jejich studijní výkon [5]. Tento vstupní profil postojů je důležitý pro pochopení dalšího vývoje studentů v průběhu semestru.

6 Rozdíly v postojích studentů

6.1 Rozdíly podle maturity z matematiky

Pro porovnání studentů podle maturity z matematiky byl použit Mann-Whitneyův U -test. Výsledky ukazují statisticky významné rozdíly ve všech sledovaných oblastech.

Studenti, kteří maturovali z matematiky, vykazují vyšší motivaci ($U = 4344$, $p = 0,004$), vyšší sebedůvěru ($U = 3323$, $p < 0,001$) i pozitivnější vztah k matematice ($U = 2735,5$, $p < 0,001$). Nejvýraznější rozdíl byl zaznamenán ve vztahu k matematice, kde studenti bez maturity vykazují nižší míru pozitivního postoje. Výsledky potvrzují, že maturita z matematiky je významným faktorem ovlivňujícím, jak se studenti v matematice cítí a jak k ní přistupují.

Tabulka 1 Výsledky Mann-Whitneyova U -testu podle maturity z matematiky

	motivace	sebejistota	vztah
Mann-Whitney U	4344,000	3323,000	2735,500
Wilcoxon W	24847,000	23826,000	23238,500
Z	-2,858	-4,986	-6,106
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,004	< 0,001	< 0,001

6.2 Rozdíly podle typu střední školy

Rozdíly mezi typy středních škol byly analyzovány pomocí Kruskal-Wallisova testu. Statisticky významný rozdíl byl zjištěn v oblasti sebedůvěry ($H(3) = 10,71$, $p = 0,013$). Nejvyšší hodnoty uváděli studenti gymnázií, zatímco nejnižší studenti zdravotnických škol. U vztahu k matematice byly rozdíly blízké hranici statistické významnosti ($p = 0,060$), přičemž studenti gymnázií vykazovali pozitivnější postoj než studenti odborných škol. V oblasti motivace nebyly mezi jednotlivými skupinami zjištěny statisticky významné rozdíly ($p = 0,185$).

Výsledky naznačují, že typ střední školy ovlivňuje především sebedůvěru studentů v matematice. Tyto rozdíly poukazují na význam předchozí matematické zkušenosti jako klíčového faktoru při vstupu do vysokoškolské výuky matematiky.

Tabulka 2 Výsledky Kruskal-Wallisova testu podle typu střední školy

	motivace	sebejistota	vztah
Kruskal-Wallis H	4,823	10,706	7,403
df	3,000	3,000	3,000
Asymp. Sig.	0,185	0,013	0,060

7 Závěr

Výsledky ukazují, že studenti ekonomických oborů vstupují do výuky matematiky s dobrou znalostí základních aritmetických a algebraických dovedností, avšak s nižší sebedůvěrou a spíše rezervovaným vztahem k předmětu. Významnou roli hraje předchozí matematická zkušenost, zejména maturita z matematiky a typ střední školy. Tyto faktory se promítají především do sebedůvěry studentů a jejich vztahu k matematice. Výsledky poukazují na potřebu zohlednit heterogenitu vstupní úrovně studentů a zaměřit se na podporu zejména těch, kteří přicházejí s nižší sebedůvěrou.



Poděkování Tento článek byl podpořen v rámci soutěže studentských grantů na Ekonomické fakultě VŠB-TU Ostrava v rámci projektu „Budoucí cesty udržitelné transformace: Interakce ekonomických, společenských a environmentálních aspektů rozvoje“ (číslo projektu SP2026/064).

Reference

- [1] ARTIGUE, Michèle. *Challenges in Basic Mathematics Education*. UNESCO, 2011. ISBN 978-92-3-001071-3.
- [2] FIELD, Andy. *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics*. 4th ed. London: Sage, 2013. ISBN 978-1446200469.
- [3] HEJNÝ, Milan et al. *Teória vyučovania matematiky. Diel 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.
- [4] MA, Xin. Reciprocal relationships between attitude toward mathematics and achievement in mathematics. *The Journal of Educational Research*. 1997, vol. 90, no. 4, s. 221–229. ISSN 0022-0671. Dostupné z DOI: [10.1080/00220671.1997.10544576](https://doi.org/10.1080/00220671.1997.10544576).
- [5] PAJARES, Frank. Self-efficacy beliefs in academic settings. *Review of Educational Research*. 1996, vol. 66, no. 4, s. 543–578. ISSN 0034-6543. Dostupné z DOI: [10.3102/00346543066004543](https://doi.org/10.3102/00346543066004543).



Změna vnímání matematiky u studentů ekonomických oborů během semestrální výuky

Pavčina Forstová Kuráňová 

Simona Pulcerová

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba


Abstrakt Příspěvek se zabývá změnami postojů studentů ekonomických oborů k matematice během prvního semestru vysokoškolského studia. Výzkum byl realizován formou dvou navazujících dotazníkových šetření mezi studenty předmětu Matematika pro ekonomy na začátku a na konci semestru. Celkem bylo analyzováno 262 vstupních a 195 výstupních dotazníků. Pro porovnání postojů studentů před a po absolvování kurzu byl použit Mann-Whitneyův U -test. Výsledky ukázaly statisticky významný nárůst matematické jistoty studentů. Současně došlo k poklesu vnímání důležitosti matematiky pro studium ekonomie, očekávaného přínosu předmětu a celkového vztahu k matematice. Vnímání obtížnosti matematiky se statisticky významně nezměnilo. Výsledky dále potvrdily význam aktivních forem výuky, zejména cvičení a samostatného procvičování. Zjištěno bylo také, že většina studentů věnuje matematice mimo výuku relativně málo času a významná část spoléhá na přípravu až v období před zkouškou. Získané poznatky mohou přispět k lepšímu porozumění procesu adaptace studentů na vysokoškolskou matematiku a poskytnout podklady pro inovaci výuky matematických předmětů na ekonomických fakultách.

Klíčová slova Matematická jistota, postoje studentů, ekonomické vzdělávání, formy podpory studia, studijní návyky.

1 Úvod

Matematika představuje významnou součást vzdělávání studentů ekonomických oborů. Přestože je považována za důležitý nástroj pro porozumění ekonomickým jevům a práci s daty, řada studentů vstupuje do vysokoškolského studia s negativními zkušenostmi z předchozího vzdělávání nebo s obavami z matematických předmětů [1]. Tyto postoje mohou významně ovlivňovat jejich studijní úspěšnost, motivaci i ochotu věnovat matematice dostatečné úsilí [4].

V posledních letech je stále větší pozornost věnována nejen samotným matematickým znalostem studentů, ale také jejich postojům k matematice, matematické sebedůvěře a studijním návykům. Právě tyto faktory mohou významně ovlivňovat proces adaptace studentů na požadavky vysokoškolského studia [2], [5], [6].

 Korespondenční autor (pavlina.forstova.kuranova@vsb.cz).

Cílem příspěvku je analyzovat změny postojů studentů ekonomických oborů k matematice během prvního semestru vysokoškolského studia. Současně je pozornost věnována hodnocení absolvovaného kurzu, preferovaným formám podpory při studiu matematiky a studijním návykům studentů.

2 Metodika

Výzkum byl realizován formou dvou navazujících dotazníkových šetření mezi studenty předmětu Matematika pro ekonomy. První dotazník byl administrován na začátku semestru a zaměřoval se na vstupní matematické dovednosti a postoje studentů k matematice. Druhé šetření proběhlo na konci semestru před zahájením zkouškového období a sledovalo změny ve vnímání matematiky, hodnocení absolvovaného kurzu a studijní návyky studentů.

Vstupního šetření se zúčastnilo 262 studentů ekonomických oborů, výstupní dotazník vyplnilo 195 studentů. Oba dotazníky obsahovaly sadu výroků hodnocených na pětibodové Likertově škále, kde hodnota 1 představovala rozhodný nesouhlas a hodnota 5 rozhodný souhlas.

Pro porovnání postojů studentů před a po absolvování kurzu byl použit Mann-Whitneyův U -test, viz [3]. Kromě statistické významnosti byla sledována také míra efektu r , která vyjadřuje velikost zjištěného rozdílu mezi porovnávanými skupinami. Součástí výstupního dotazníku bylo dále hodnocení jednotlivých aspektů výuky, identifikace forem podpory využívaných při studiu matematiky a zjišťování času věnovaného samostatné přípravě mimo výuku. Výsledky byly vyhodnoceny pomocí deskriptivní statistiky a vhodných neparametrických metod. Vzhledem k anonymnímu charakteru šetření nebylo možné párovat odpovědi jednotlivých studentů před a po absolvování kurzu.

3 Výsledky

3.1 Změna postojů studentů k matematice během semestru

Jedním z hlavních cílů výzkumu bylo zjistit, zda a jak se během semestru mění postoje studentů k matematice. Pro porovnání odpovědí studentů na začátku a na konci semestru byl použit Mann-Whitneyův U -test.

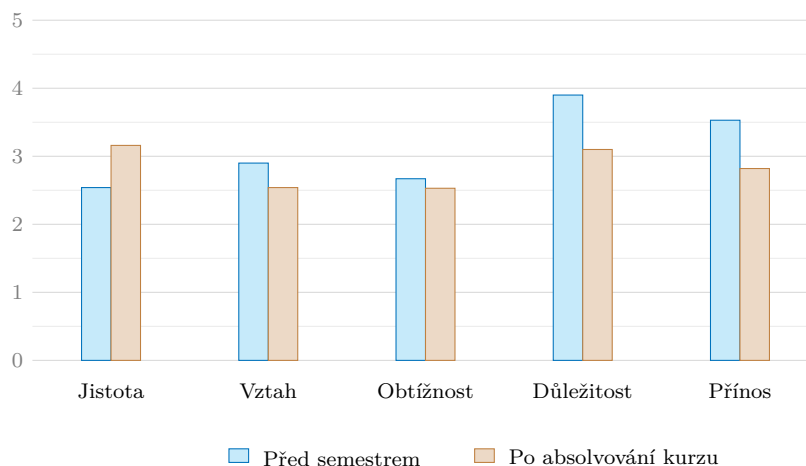
Výsledky ukázaly statisticky významné změny ve většině sledovaných oblastí. Nejvýraznější pozitivní změna byla zaznamenána v oblasti matematické jistoty. Průměrné hodnocení výroku „Cítím se v matematice jistě“ vzrostlo z hodnoty 2,54 na začátku semestru na 3,16 po absolvování kurzu ($p < 0,001$). Tento výsledek naznačuje, že studenti si po absolvování předmětu více věří při práci s matematickými úlohami. Naopak u některých dalších sledovaných oblastí došlo k poklesu průměrných hodnot. Nižší hodnocení bylo zaznamenáno u vnímání významu matematiky pro studium ekonomie, očekávaného přínosu předmětu pro pochopení ekonomických souvislostí i celkového vztahu k matematice. Ve všech těchto případech byly rozdíly statisticky významné ($p < 0,001$).

Tabulka 1 Výsledky porovnání postojů studentů před a po absolvování kurzu

Oblast	Před	Po	U	Z	p	r
Jistota	2,54	3,16	17580,0	-5,835	<0,001	0,27
Vztah	2,90	2,54	20969,5	-3,324	<0,001	0,16
Obtížnost	2,67	2,53	23365,5	-1,551	0,121	0,07
Důležitost	3,90	3,11	14950,5	-7,876	<0,001	0,37
Přínos	3,53	2,83	16699,0	-6,505	<0,001	0,30

V oblasti vnímané obtížnosti matematiky nebyla zjištěna statisticky významná změna ($p = 0,121$). Studenti tedy po absolvování kurzu nevnímali matematiku jako výrazně jednodušší ani obtížnější než

na začátku semestru. Průměrné hodnoty sledovaných oblastí před a po absolvování kurzu zachycuje Tabulka 1 a Obrázek 1. V Tabulce 1 označuje r míru efektu vyjadřujícího velikost zjištěného rozdílu.



Obrázek 1 Průměrné hodnocení vybraných aspektů vztahu studentů k matematice před začátkem semestru a po absolvování kurzu

3.2 Hodnocení kurzu studenty

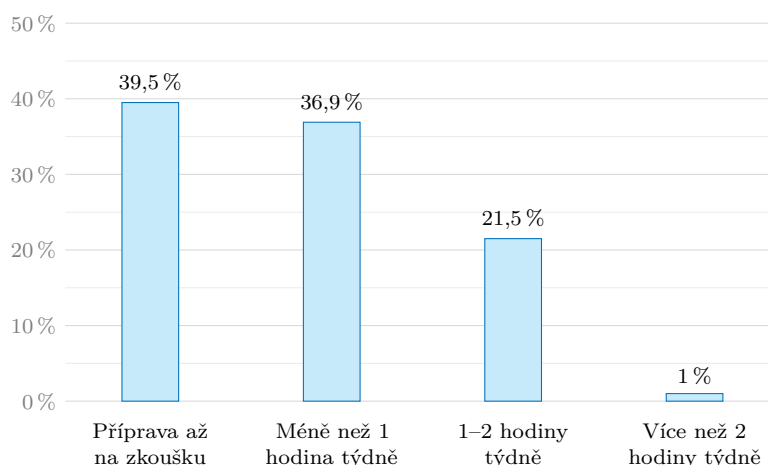
Součástí výstupního dotazníku bylo také hodnocení jednotlivých aspektů kurzu Matematika pro ekonomy. Výsledky ukázaly převážně pozitivní hodnocení kurzu. Nejvyšší průměrné hodnocení získala položka zaměřená na přínos cvičení pro pochopení probírané látky ($M = 4,25$, resp. $SD = 0,98$). Vysoko byly hodnoceny také dostupnost pomoci při řešení studijních problémů ($M = 4,05$, resp. $SD = 0,95$) a užitečnost studijních materiálů ($M = 3,93$, resp. $SD = 1,01$).

Srozumitelnost výkladu byla studenty hodnocena průměrnou známkou $3,67$ ($SD = 1,06$), zatímco celková spokojenost s kurzem dosáhla hodnoty $3,49$ při $SD = 1,06$. Nejnižší průměrné hodnocení bylo zaznamenáno u přiměřenosti tempa výuky ($M = 3,13$, resp. $SD = 1,17$). Hodnocení probíhalo na pětibodové Likertově škále, kde vyšší hodnota znamená pozitivnější hodnocení.

Tabulka 2 Výsledky hodnocení jednotlivých aspektů kurzu

Položka	Průměr	SD
Cvičení mi pomáhala pochopit látku	4,25	0,98
Bylo snadné získat pomoc, když jsem něco nechápal/a	4,05	0,95
Studijní materiály byly užitečné	3,93	1,01
Výklad byl srozumitelný	3,67	1,06
Celkově jsem s kurzem spokojený/á	3,49	1,06
Tempo výuky bylo přiměřené	3,13	1,17

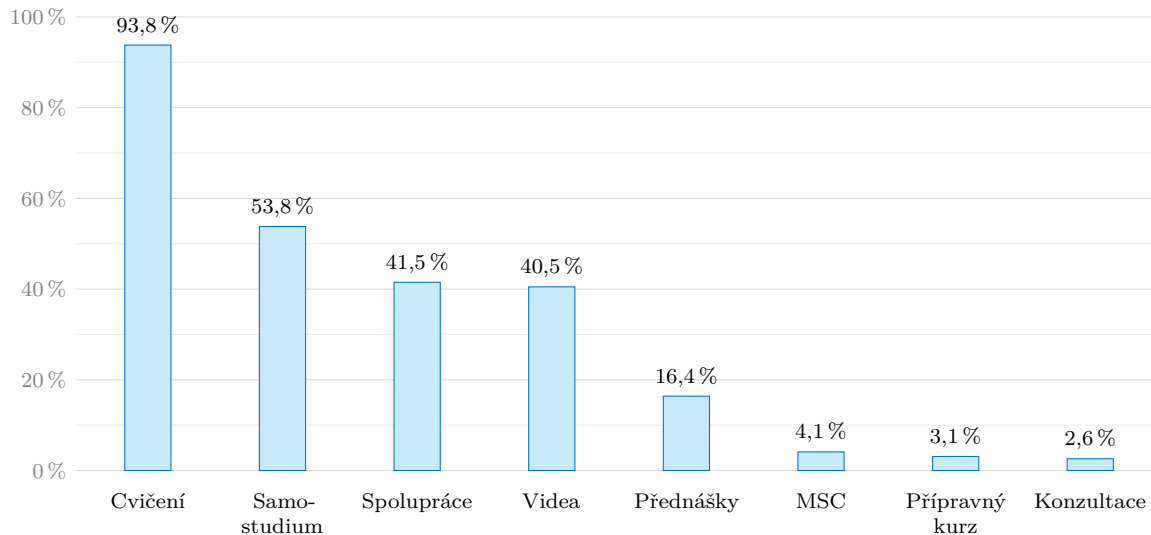
Výzkum dále sledoval množství času, které studenti věnovali matematice mimo pravidelnou výuku. Výsledky ukázaly, že pravidelná domácí příprava nebyla u většiny respondentů běžná. Největší skupinu tvořili studenti, kteří uvedli, že se budou matematice věnovat až v období před zkouškou (39,5%). Dalších 36,9% respondentů věnovalo matematice méně než jednu hodinu týdně. Pouze 21,5% studentů studovalo matematiku pravidelně v rozsahu jedné až dvou hodin týdně a více než dvě hodiny týdně uvedlo pouze 1% respondentů. Rozložení odpovědí zachycuje Obrázek 2.



Obrázek 2 Čas věnovaný samostatnému studiu matematiky mimo výuku během semestru ($n = 195$)

3.3 Využívané formy podpory při studiu matematiky

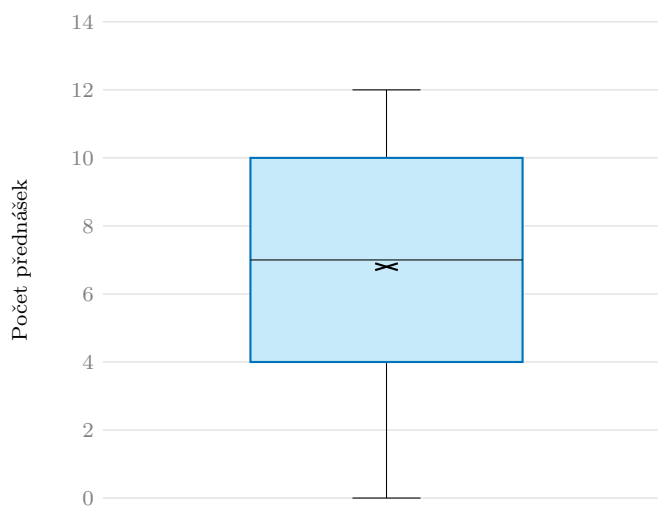
Respondenti mohli označit více forem podpory, které během semestru využívali při studiu matematiky. Nejčastěji studenti uváděli cvičení, která označilo 183 respondentů (93,8 %). Druhou nejčastěji volenou možností bylo samostudium (53,8 %), následované spoluprací s ostatními studenty (41,5 %) a využíváním videí či studijních materiálů (40,5 %).



Obrázek 3 Využívané formy podpory při studiu matematiky ($n = 195$). Respondenti mohli označit více odpovědí.

Naopak konzultace, přípravný kurz a služby Math Support Centre byly využívány pouze okrajově. Studenti nejčastěji využívali průběžné procvičování a samostatnou práci doplněnou spoluprací se spolužáky. Návštěvnost přednášek byla poměrně vysoká. Medián počtu navštívených přednášek činil 7 z celkových 12 přednášek za semestr, přičemž 50 % studentů navštívilo 4 až 10 přednášek. Průměrná návštěvnost dosáhla přibližně 6,8 přednášky. Výsledky naznačují, že navzdory často uváděnému

názoru o nízké účasti studentů na přednáškách navštěvovala významná část respondentů přednášky pravidelně. Rozložení návštěvnosti přednášek zachycuje Obrázek 4.



Obrázek 4 Rozložení počtu navštívených přednášek během semestru (maximálně 12 přednášek). Boxplot představuje mezikvartilové rozpětí, vodorovná čára medián a symbol \times průměr.

4 Diskuse

Výsledky výzkumu ukázaly, že během semestrální výuky matematiky došlo u studentů ekonomických oborů k několika významným změnám v jejich postojích k matematice. Nejvýraznější pozitivní změna byla zaznamenána v oblasti matematické jistoty, kde se průměrné hodnocení zvýšilo z 2,54 na 3,16 bodu. Tento výsledek naznačuje, že absolvovaný kurz přispěl ke zvýšení sebedůvěry studentů při práci s matematickými úlohami, což je v souladu s konceptem self-efficacy popsaným Bandurou [2] a Pajaresem [6].

Současně byl zaznamenán pokles vnímání důležitosti matematiky pro studium ekonomie a také pokles očekávaného přínosu předmětu pro pochopení ekonomických souvislostí. Tento výsledek lze interpretovat jako korekci původních očekávání studentů. Na začátku studia mohou studenti přisuzovat matematice širší význam, který je v průběhu semestru konfrontován s konkrétním obsahem kurzu a jejich vlastní zkušeností.

Zajímavým zjištěním je skutečnost, že navzdory růstu matematické jistoty nedošlo ke statisticky významné změně ve vnímání obtížnosti matematiky. Studenti se tedy po absolvování kurzu necítí méně ohroženi matematickými úlohami, ale současně si více věří při jejich řešení. Tento výsledek odpovídá předpokladu, že získávání matematických dovedností nemusí automaticky vést ke snížení subjektivně vnímané náročnosti předmětu.

Výsledky dále potvrdily význam aktivních forem výuky. Nejčastěji využívanou a současně nejlépe hodnocenou formou podpory byla cvičení, zatímco individuální konzultace nebo služby Math Support Centre byly využívány pouze okrajově. Ukazuje se tak, že studenti preferují především průběžné procvičování a samostatnou práci doplněnou spoluprací se spolužáky.

Současně bylo zjištěno, že značná část studentů věnuje matematice mimo výuku jen omezený čas a téměř 40 % respondentů uvedlo, že se začne připravovat až před zkouškou. Tento výsledek může představovat jeden z faktorů ovlivňujících studijní úspěšnost v matematických předmětech.

Zajímavým zjištěním je kombinace relativně vysoké návštěvnosti přednášek a současně nízkého

podílu studentů, kteří přednášky označili za významnou formu podpory při studiu matematiky. Tento výsledek může naznačovat, že studenti přednášky navštěvují spíše jako součást studijních povinností, zatímco za hlavní zdroj podpory považují cvičení, samostudium nebo spolupráci se spolužáky.

5 Závěr

Cílem příspěvku bylo analyzovat změny postojů studentů ekonomických oborů k matematice během prvního semestru vysokoškolského studia a identifikovat faktory, které studenti považují za důležité pro úspěšné zvládnutí kurzu.

Výsledky ukázaly, že absolvování kurzu vedlo k významnému zvýšení matematické jistoty studentů. Současně však došlo k poklesu vnímané důležitosti matematiky a očekávaného přínosu předmětu pro ekonomické studium. Vnímání obtížnosti matematiky se statisticky významně nezměnilo.

Za nejvýznamnější formu podpory studenti označili cvičení, následovaná samostudiem a spoluprací se spolužáky. Naopak konzultace a další podpůrné služby byly využívány pouze minimálně. Výsledky rovněž ukázaly, že většina studentů věnuje matematice mimo výuku relativně málo času a významná část spoléhá na přípravu až v období před zkouškou. Je však třeba zohlednit, že výzkum byl realizován na jedné ekonomické fakultě a výsledky proto nelze bez dalšího zobecňovat na populaci všech vysokoškolských studentů.

Získané poznatky mohou být využity při inovaci výuky matematických předmětů na ekonomických fakultách. Pozornost by měla být věnována zejména podpoře aktivních forem výuky, průběžnému procvičování a rozvoji matematické sebedůvěry studentů. Budoucí výzkum by se mohl zaměřit na vztah mezi studijními návyky, výsledky zkoušek a dlouhodobým rozvojem matematických kompetencí studentů ekonomických oborů.

Poděkování Tento článek byl podpořen v rámci soutěže studentských grantů na Ekonomické fakultě VŠB-TU Ostrava v rámci projektu „Budoucí cesty udržitelné transformace: Interakce ekonomických, společenských a environmentálních aspektů rozvoje“ (číslo projektu SP2026/064).

Reference

- [1] ASHCRAFT, Mark H. Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current Directions in Psychological Science*. 2002, vol. 11, no. 5, s. 181–185. ISSN 0963-7214. Dostupné z DOI: [10.1111/1467-8721.00196](https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196).
- [2] BANDURA, Albert. *Self-Efficacy: The Exercise of Control*. New York: W. H. Freeman, 1997. ISBN 978-0-7167-2850-4.
- [3] FIELD, Andy P. *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics*. 6th ed. Los Angeles: Sage, 2024. ISBN 978-1-5296-3001-5.
- [4] MA, Xin. Reciprocal Relationships between Attitude toward Mathematics and Achievement in Mathematics. *The Journal of Educational Research*. 1997, vol. 90, no. 4, s. 221–229. ISSN 0022-0671. Dostupné z DOI: [10.1080/00220671.1997.10544576](https://doi.org/10.1080/00220671.1997.10544576).
- [5] OECD. *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing, 2023. ISBN 978-92-64-94749-5. Dostupné z DOI: [10.1787/53f23881-en](https://doi.org/10.1787/53f23881-en).
- [6] PAJARES, Frank. Self-Efficacy Beliefs in Academic Settings. *Review of Educational Research*. 1996, vol. 66, no. 4, s. 543–578. ISSN 0034-6543. Dostupné z DOI: [10.3102/00346543066004543](https://doi.org/10.3102/00346543066004543).



Vývoj počtu studentů na technických vysokých školách v ČR

Veronika Moškořová  Lukáš Pospíšil Dagmar Dlouhá

VŠB – Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba

Abstrakt Tento příspěvek analyzuje vývoj počtu studentů a absolventů technických (STEM) a non-STEM oborů na vysokých školách v České republice v období 2001–2025. Analýza vychází z veřejně dostupných dat oficiálních státních institucí. Výsledky ukazují, že ačkoli absolutní počet studentů v terciárním vzdělávání dlouhodobě roste, tempo růstu studentů i absolventů STEM oborů je výrazně nižší než u oborů non-STEM. Relativní zastoupení STEM oborů v celkové struktuře vysokoškolského vzdělávání tak postupně klesá. Nejvýraznější strukturální změny jsou patrné na bakalářském a navazujícím magisterském stupni studia, kde došlo k přechodu od dlouhých magisterských programů k dvoustupňovému modelu vzdělávání. V oblasti STEM je však růst počtu absolventů, zejména v technických a přírodovědných disciplínách, pouze mírný a nedosahuje dynamiky zaznamenané u non-STEM oborů. Identifikovaný trend může mít v dlouhodobém horizontu významné dopady na dostupnost kvalifikovaných odborníků v technických a přírodovědných sektorech, a tím i na inovační potenciál a konkurenceschopnost české ekonomiky. Na základě provedené analýzy jsou proto diskutována možná opatření směřující k posílení zájmu o studium STEM oborů.


Klíčová slova STEM, demografický vývoj, struktura vysokoškolského vzdělávání, Česká republika.

1 Úvod

V posledních dvou desetiletích lze v České republice sledovat zajímavý a z hlediska dlouhodobého rozvoje ekonomiky a inovací významný trend – relativní pokles zájmu studentů o studium na technických vysokých školách. Přestože celkový počet studentů vysokých škol narůstá, jejich struktura se proměňuje.

Za klíčové pro rozvoj moderních ekonomik jsou přitom považovány obory souhrnně označované zkratkou STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), tedy přírodní vědy, technologie, technické obory a matematika. Tyto disciplíny představují základ technologického pokroku, inovační výkonnosti i dlouhodobé konkurenceschopnosti států.

V českém prostředí je však patrný trend, kdy rostoucí podíl studentů směřuje spíše do oborů mimo tuto oblast (non-STEM), zatímco počet studentů technických a přírodovědných oborů roste pouze mírně nebo stagnuje. Tento vývoj je spojován s několika faktory, mezi něž patří změny ve struktuře maturitních zkoušek, preference studentů pro humanitní a ekonomické obory, vnímaná náročnost technických studií i širší společenské faktory ovlivňující volbu studijního zaměření.

 Korespondenční autor (veronika.moskorova@vsb.cz).

Pokles počtu studentů ve STEM oborech může mít dlouhodobé důsledky pro český průmysl, inovační potenciál i konkurenceschopnost na mezinárodním trhu práce. Analýza těchto trendů je proto zásadní pro tvorbu vzdělávací politiky, podporu STEM oblastí a strategické plánování vysokých škol v technických a přírodovědných disciplínách.

2 Metodika

Tato studie vychází ze sekundární analýzy veřejně dostupných dat poskytovaných státními institucemi České republiky. Cílem bylo využít oficiální, metodicky ukotvené a dlouhodobě sbírané statistické zdroje, které umožňují sledovat vývoj vzdělávací struktury populace a zájem o jednotlivé studijní oblasti. V následujícím textu jsou uvedeny hlavní zdroje dat, z nichž tato studie vychází.

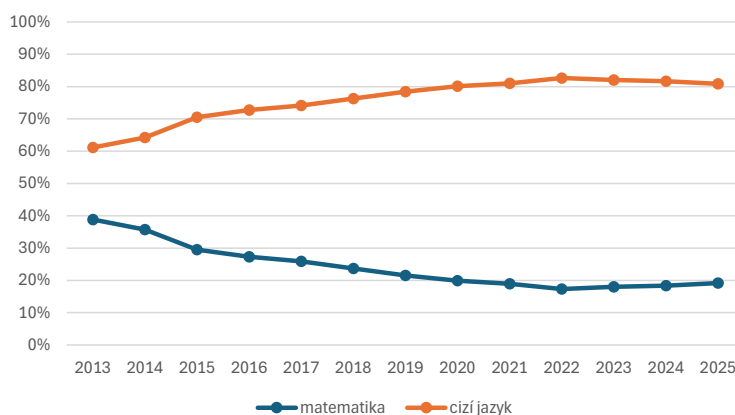
Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT, [1]) je státní příspěvková organizace řízená Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Zajišťuje přípravu a realizaci jednotné maturitní zkoušky, jednotných přijímacích zkoušek na střední školy a dalších standardizovaných testování.

Český statistický úřad (ČSÚ, [3]) je ústředním orgánem státní správy pro oblast oficiální statistiky. Shromažďuje, zpracovává a zveřejňuje statistická data o demografii, vzdělávání, trhu práce, ekonomice a dalších oblastech společenského života.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT, [4]) je ústředním orgánem státní správy odpovědným za vzdělávací politiku, koncepční řízení školství a financování vzdělávací soustavy.

3 Výsledky

V rámci společné části maturitní zkoušky je český jazyk a literatura povinný předmět pro všechny maturanty. Kromě češtiny si mohou studenti jako druhý povinně volitelný předmět zvolit buď matematiku, nebo cizí jazyk. Tento systém nezavádí legislativní povinnost volit matematiku, ale poskytuje studentům možnost volby podle jejich studijních preferencí a zaměření.

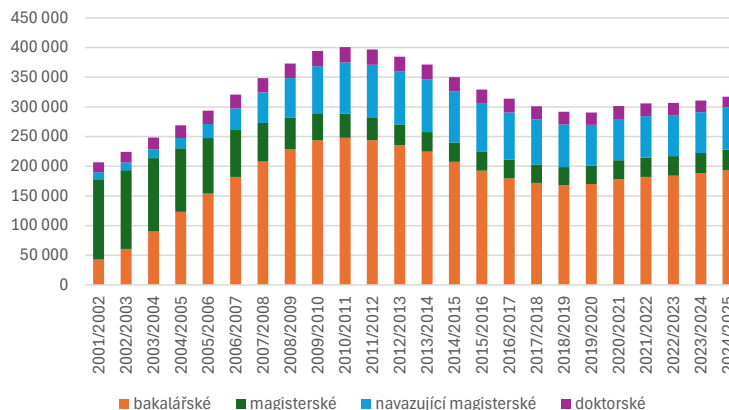


Obrázek 1 Časový vývoj relativního zastoupení maturantů volících matematiku a cizí jazyk v povinné části maturitní zkoušky v období 2013–2025.

Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat [1].

Obrázek 1 zachycuje vývoj podílu maturantů, kteří si zvolili matematiku, v porovnání s těmi, kteří preferovali cizí jazyk. Z grafu je patrný výrazný pokles podílu maturantů volících matematiku, a to z 39 % v roce 2013 na 19 % v roce 2025. Jedná se o snížení o 20 procentních bodů, což v relativním vyjádření představuje pokles přibližně o 51 %.

Tento dlouhodobý trend časově souvisí se změnami v nastavení maturitní zkoušky, zejména s rozhodnutím zrušit plánované zavedení povinné maturity z matematiky. Ta měla být postupně zavedena od školního roku 2020/2021 (resp. 2021/2022 podle typu školy), avšak novelou školského zákona byla v červenci 2020 definitivně zrušena, takže matematika zůstala nadále pouze volitelným předmětem ve společné části maturitní zkoušky.



Obrázek 2 Struktura a vývoj počtu studentů vysokých škol v České republice podle typu studijního programu: bakalářské, magisterské (nenavazující na bakalářský program), navazující magisterské, a doktorské v letech 2001/2002 až 2024/2025. *Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat [3].*

Na Obrázku 2 je patrná výrazná proměna struktury vysokoškolského studia v České republice mezi akademickými roky 2001/2002 až 2024/2025. Nejvýraznější změna nastala na bakalářském stupni, kde došlo k nárůstu počtu studentů z 42 979 na 193 442, což představuje zvýšení přibližně o 350 %. Tento vývoj souvisí s implementací strukturovaného studia v návaznosti na tzv. Boloňský proces a s postupným přesunem těžiště terciárního vzdělávání právě na bakalářský stupeň.

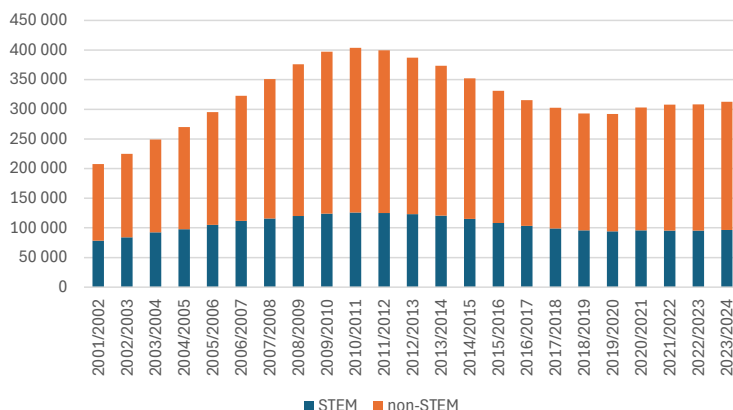
Boloňský proces představuje celoevropskou reformu vysokého školství zahájenou v roce 1999, jejímž cílem bylo vytvořit tříúrovňový model studia (bakalářské, magisterské a doktorské) a zvýšit kompatibilitu a mobilitu v rámci evropského prostoru vysokoškolského vzdělávání.

Naopak u dlouhých magisterských programů lze pozorovat výrazný pokles, a to z 135 076 na 34 713 studentů (pokles přibližně o 74 %). Tento trend odpovídá transformaci původních pětiletých magisterských programů na dvoustupňový model (bakalářské a navazující magisterské studium). Tomu odpovídá i výrazný nárůst počtu studentů v navazujících magisterských programech, kde se počet zvýšil z 12 033 na 70 802 studentů (nárůst přibližně o 488 %). Data tak potvrzují strukturální přesun značné části studentů z dlouhých magisterských programů do dvoustupňového modelu studia.

V případě doktorského studia je patrný pouze mírný nárůst z 16 491 na 18 298 studentů (přibližně o 11 %), což naznačuje relativně stabilní vývoj tohoto stupně studia bez výraznějších výkyvů.

Celkově lze konstatovat, že sledované období je charakteristické zásadní restrukturalizací vysokoškolského systému a nejdynamičtější změny proběhly mezi bakalářským a magisterským stupněm studia.

Z hlediska celkového počtu studentů je patrný výrazný vrchol kolem akademického roku 2010/2011, po němž následuje postupný pokles. Tento vývoj pravděpodobně odráží demografické změny v populačních ročnících vstupujících do terciárního vzdělávání. Po období dynamických strukturálních změn v první dekádě sledovaného období lze pozorovat relativní stabilizaci poměrů mezi jednotlivými stupni studia, což naznačuje konsolidaci vysokoškolského systému po implementaci dvoustupňového modelu.

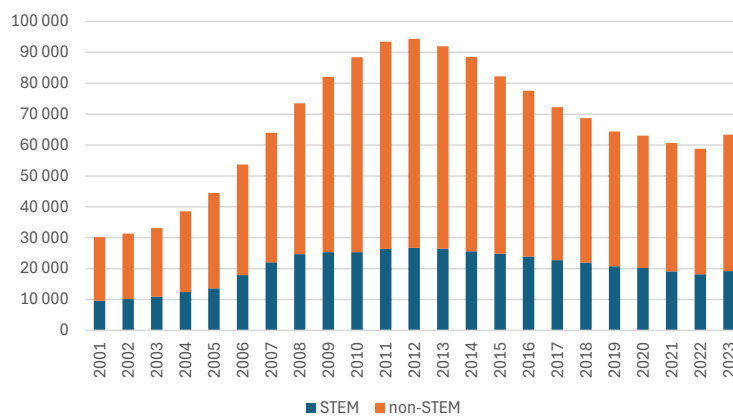


Obrázek 3 Časový vývoj počtu studentů vysokých škol v České republice ve STEM a non-STEM oborech v období 2001/2002 až 2023/2024.

Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat [3].

Na Obrázku 3 je patrný relativně mírný nárůst počtu studentů ve STEM oborech. Počet studentů v těchto oblastech vzrostl z 78 402 v akademickém roce 2001/2002 na 96 431 v akademickém roce 2023/2024, což představuje zvýšení přibližně o 23 %. Naopak u non-STEM oborů došlo k výrazně dynamičtějšímu růstu. Počet studentů se zvýšil ze 129 359 na 216 399, tedy přibližně o 67 %.

Ačkoli tedy absolutní počet studentů ve STEM oborech ve sledovaném období vzrostl, tempo růstu je ve srovnání s non-STEM oblastmi výrazně nižší. Podíl STEM oborů na celkovém počtu studentů vysokých škol poklesl přibližně z 38 % v akademickém roce 2001/2002 na 31 % v roce 2023/2024, což představuje snížení relativního zastoupení o zhruba 7 procentních bodů. V relativním vyjádření tak lze konstatovat, že postavení STEM oborů v rámci vysokoškolské struktury postupně oslabovalo, přestože jejich absolutní počet studentů mírně vzrostl.



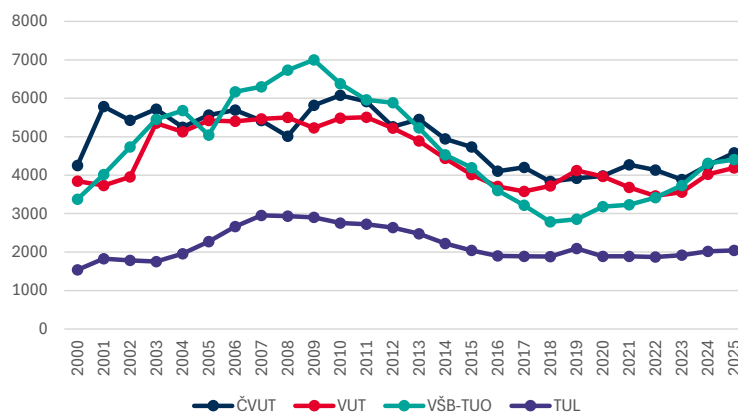
Obrázek 4 Časový vývoj počtu absolventů vysokých škol v České republice ve STEM a non-STEM oborech v období 2001–2023.

Zdroj: vlastní zpracování na základě dat [3].

Na Obrázku 4 je patrný nárůst celkového počtu absolventů ve STEM oborech z 9 582 v roce 2001 na 19 239 v roce 2023, tedy přibližně na dvojnásobek. U non-STEM oborů došlo k ještě výraznějšmu růstu – z 20 569 na 44 071 absolventů, což představuje zvýšení o přibližně 114 %.

Vývoj počtu absolventů tak do určité míry kopíruje trend pozorovaný u počtu studentů na Obrázku 3. Zatímco absolutní počet absolventů STEM oborů v dlouhodobém horizontu roste, relativní dynamika růstu je slabší než u non-STEM oblastí. To naznačuje, že strukturální změna ve prospěch non-STEM oborů, patrná již na úrovni studentské populace, se promítá i do výstupů vysokoškolského systému.

Současně je patrné, že vrchol počtu absolventů nastává přibližně s několikaletým zpožděním za vrcholem počtu studentů, což odpovídá délce studia a demografickému cyklu silnějších populačních ročníků. Vývoj absolventské struktury tak nelze interpretovat izolovaně, ale v návaznosti na předchozí vývoj celkové studentské populace.



Obrázek 5 Komparativní časový vývoj počtu studentů na čtyřech nejvýznamnějších technických univerzitách v České republice v letech 2000–2025.

Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat [4].

Obrázek 5 zobrazuje vývoj počtu zapsaných studentů na čtyřech nejvýznamnějších technických vysokých školách v České republice v letech 2000–2025.

- **ČVUT (České vysoké učení technické, [2])** – tmavomodrá křivka.

Počet studentů začíná na hodnotě 4 252 v roce 2000, následně roste do roku 2004–2005 na přibližně 5 700 studentů. Poté dochází ke kolísání s vrcholem okolo roku 2009 (cca 5 900 studentů). Po roce 2010 počet postupně klesá až do roku 2017, kdy dosahuje minima přibližně 3 700–3 800 studentů. Od roku 2018 je patrný mírný růst, který pokračuje i v projekci do roku 2025, kdy počet dosahuje přibližně 4 581 studentů.

- **VUT (Vysoké učení technické v Brně, [7])** – červená křivka.

Počáteční stav činí 3 845 studentů v roce 2000. Následuje nárůst do roku 2004–2005 na cca 5 400 studentů, poté relativně stabilní vývoj s mírným poklesem po roce 2010. Od roku 2017 je patrný pozvolný růst s projekcí na přibližně 4 100 studentů v roce 2025.

- **VŠB – TUO (Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, [6])** – tyrkysová křivka.

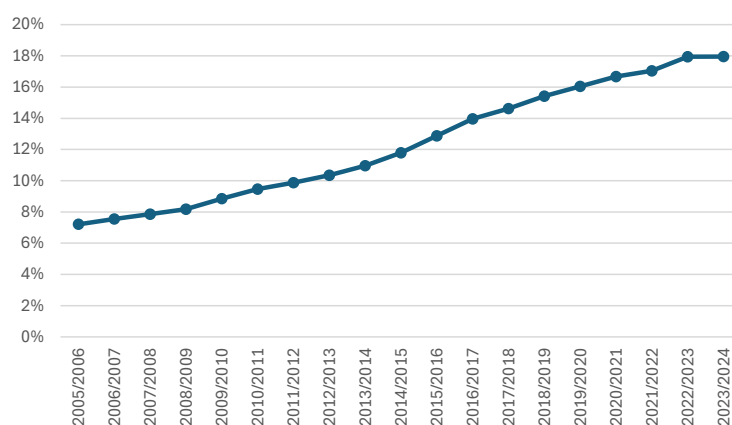
Začíná na nejnižší hodnotě přibližně 3 300 studentů v roce 2000, následuje výrazný nárůst do roku 2009, kdy dosahuje vrcholu okolo 7 000 studentů, což představuje nejvyšší hodnotu ze všech čtyř sledovaných škol v daném období. Od roku 2009 dochází k výraznému poklesu, který trvá až do roku 2017, kdy počet klesá na přibližně 2 700 studentů. Po roce 2017 je patrné postupné zotavení s projekcí na přibližně 4 405 studentů v roce 2025.

- **TUL (Technická univerzita v Liberci, [5])** – fialová křivka.

Vykazuje dlouhodobě nejnižší počet studentů, začíná na hodnotě 1 538 v roce 2000. Následuje pozvolný růst do roku 2009 (cca 2 900 studentů), po němž dochází k mírnému poklesu a následné stabilizaci okolo 2 000 studentů od roku 2015 až do projekce roku 2025.

Následující body shrnují hlavní interpretační závěry vyplývající z pozorovaného vývoje na Obrázku 5.

- Nejvýraznější výkyvy zaznamenává VŠB–TUO, kde je patrný dynamický růst do roku 2009 následovaný výrazným poklesem do roku 2017; tento vývoj pravděpodobně souvisí s kombinací demografických faktorů a změn v poptávce po technických oborech.
- ČVUT a VUT vykazují stabilnější průběh s poklesem po roce 2010 a mírným růstem v posledních letech, což může indikovat postupnou stabilizaci zájmu o technické studium.
- TUL se vyznačuje nejnižším, avšak relativně stabilním počtem studentů s menšími výkyvy v čase.
- Poklesy v období přibližně 2010–2017 časově odpovídají celkovému poklesu počtu studentů vysokých škol v ČR (viz Obrázek 2) i oslabení relativního zastoupení STEM oborů (viz Obrázek 3). Vývoj sledovaných technických univerzit tak do značné míry kopíruje celonárodní trend.
- Mírný růst v posledních letech a projekce do roku 2025 naznačují částečnou stabilizaci systému po období demografického poklesu.



Obrázek 6 Vývoj procentuálního zastoupení zahraničních studentů mezi vysokoškolskými studenty v České republice v letech 2005/2006 až 2023/2024.

Zdroj: Vlastní zpracování na základě dat [4].

Obrázek 6 zobrazuje vývoj procentuálního zastoupení cizinců mezi vysokoškolskými studenty v období akademických roků 2005/2006 až 2023/2024. Podíl zahraničních studentů vzrostl z přibližně 7 % na 18 %, přičemž růst je v průběhu celého období relativně plynulý a bez výraznějších výkyvů.

Meziročně dochází k nárůstu zpravidla o 0,5 až 1 procentní bod. Nejvyšší dynamika růstu je patrná mezi akademickými roky 2013/2014 a 2016/2017, kdy se podíl zvýšil z přibližně 11 % na 14 %. V posledních letech (od 2022/2023) se hodnota stabilizuje na úrovni okolo 18 %.

Tento vývoj je vhodné interpretovat v kontextu předchozích grafů. Zatímco celkový počet studentů vysokých škol po roce 2010 v důsledku demografického vývoje klesal (viz Obrázek 2) a relativní zastoupení STEM oborů se spíše oslabovalo (viz Obrázek 4), podíl zahraničních studentů dlouhodobě rostl. Růst internacionalizace tak částečně kompenzoval pokles domácí studentské populace a představuje významný strukturální faktor ovlivňující současnou podobu českého vysokoškolského systému.

4 Závěr

Analýza vývoje počtu studentů a absolventů ve STEM a non-STEM oborech ukazuje, že přestože absolutní počet studentů technických a přírodovědných oborů mírně vzrostl, tempo jejich růstu zaostává



za dynamikou non-STEM oblastí. Současně dochází k poklesu relativního zastoupení STEM oborů v celkové struktuře vysokoškolského vzdělávání. Vývoj počtu absolventů tento trend v zásadě kopíruje. Tento vývoj může mít dlouhodobé důsledky pro podíl kvalifikovaných pracovníků ve STEM sektorech a tím i pro konkurenceschopnost české ekonomiky v technických a přírodovědných oblastech.

Dlouhodobé udržení a rozvoj technických a přírodovědných oborů by měly představovat jednu z priorit vzdělávací i hospodářské politiky České republiky. Posilování jejich postavení ve struktuře vysokoškolského vzdělávání je důležité pro zachování konkurenceschopnosti a inovační kapacity české ekonomiky. Udržení vyvážené oborové struktury proto vyžaduje systematickou pozornost a koordinovaný přístup napříč jednotlivými stupni vzdělávací soustavy.

Poděkování Tento příspěvek vznikl za podpory Katedry matematiky Fakulty stavební VŠB – Technické univerzity Ostrava.

Reference

- [1] *Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://cermat.gov.cz>.
- [2] *České vysoké učení technické (ČVUT)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://www.cvut.cz>.
- [3] *Český statistický úřad (ČSÚ)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://csu.gov.cz>.
- [4] *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://msmt.gov.cz>.
- [5] *Technická univerzita v Liberci (TUL)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://www.tul.cz>.
- [6] *Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (VŠB – TUO)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://www.vsb.cz>.
- [7] *Vysoké učení technické v Brně (VUT)* [online] [cit. 2026-02-12]. Dostupné z: <https://www.vut.cz>.