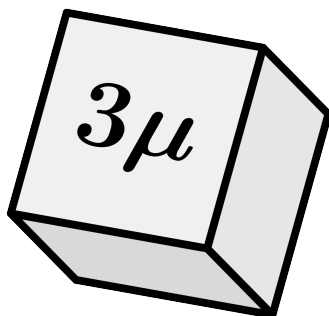


VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Sborník z 30. semináře

Moderní matematické metody v inženýrství



9. – 11. června 2025, Čeladná

konference3mi.vsb.cz

Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO
Katedra matematických metod v ekonomice, EkF, VŠB-TUO

Programový a organizační výbor

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

doc. Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.

ing. Oldřich Vlach, Ph.D.

Petra Frélichová,

© Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO

ISBN 978-80-248-4824-2 (on-line)

DOI 10.31490/9788024848242

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

vítáme vás na stránkách sborníku z již 30. ročníku semináře Moderní matematické metody v inženýrství, který se letos konal v příjemném prostředí Retro Hotelu Jiskra v Čeladné. Jsme rádi, že po několikaleté odmlce se v roce 2023 podařilo ve vzájemné spolupráci všech matematických kateder na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava seminář znovu restartovat a obnovit tak tradiční setkávání ostravských matematiků s kolegy z jiných univerzit.

Letošním hlavním organizátorem byla Katedra aplikované matematiky z Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB-TUO a akce se již tradičně konala pod záštitou Jednoty českých matematiků a fyziků, pobočného spolku Ostrava.

Seminář byl i letos rozdělen do dvou tematických sekcí:

- Matematika a její aplikace
- Výuka a didaktika matematiky

Zvláštní pozornost byla věnována dvěma plenárním přednáškám, které pro všechny účastníky přednesl doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Jeho vystoupení na témata „O Lagrangeově přístupu k matematické analýze“ a „Augustin Louis Cauchy a základy matematické analýzy v 19. století“ obohatila program hlubším historickým i koncepčním vzhledem do základů moderního matematického myšlení.

Na semináři se sešlo více než 30 odborníků z vysokých škol v České republice, mezi nimiž nechyběli zástupci z VŠB – Technické univerzity Ostrava, VUT v Brně, Masarykovy univerzity, Univerzity Palackého v Olomouci, MFF UK, Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, Univerzity obrany, Jihočeské univerzity, VŠTE v Českých Budějovicích a Slovenské technické univerzity v Bratislavě.

Tento sborník byl k dispozici již před zahájením semináře a bude trvale dostupný na webové stránce: konference3mi.vsb.cz

Věříme, že i letošní ročník přinesl podnětnou výměnu názorů, příležitost k inspiraci a posílení spolupráce napříč institucemi a matematickými obory.

V Ostravě, 30.6.2025

Programový a organizační výbor

Obsah

Pavel Jahoda, Monika Jahodová: Hustoty množin, stejnoměrné rozdělení a Benfordův zákon	5
Jekl, Jaromír Kuben, Pavlína Račková, Vojtěch Růžička: Příklady matematických úloh, v nichž lze potkat sudoku	20
Radek Varga, Martin Čermák: Škálovatelnost metody diskretních prvků s modelem BBM	34
Zbyněk Cerman: Komplexnost motivačního stylu výuky matematických předmětů na vysokých školách	40
Dagmar Dlouhá, Marcela Jarošová, Jakub Stryja, Jana Volná, Petr Volný: Zkušenosti s tvorbou učebních materiálů v rámci projektu NPO	62
Pavlína Forstová Kuráňová, Simona Pulcerová: Vzdělávání bez bariér: Jak Centrum Slunečnice pomáhá studentům překonávat výzvy v matematice a statistice	71
Dagmar Dlouhá, Václav Votoupal: Od historie přes současnost k budoucnosti aneb jak oživit deskriptivní geometrii	78
Zuzana Pátíková, Vladimír Polášek: Grafy matematických funkcí ve stack úlohách v Moodle	84
Marcela Rabasová: Zajímavé úlohy z pravděpodobnosti II	95
Miriám Janíková: Analýza chýb studentův v písomných prácach z oblasti integrálov	102
Josef Rebenda: MSLS and the Power of Feedback, Part 2: Right to an Effective Feedback	107

HUSTOTY MNOŽIN, STEJNOMĚRNÉ ROZDĚLENÍ A BENFORDŮV ZÁKON

JAHODA Pavel, JAHODOVÁ Monika

FEI VŠB-TUO, Katedra aplikované matematiky, FS VŠB-TUO, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, 17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava – Poruba
e-mail na hlavního autora: pavel.jahoda@vsb.cz

Abstrakt: Cílem tohoto článku je poukázat na zajímavou a možná ne zcela očekávanou souvislost mezi asymptotickou a logaritmickou hustotou množin na jedné straně a stejnoměrně rozdělenými posloupnostmi na straně druhé. Tímto překvapivým pojítkem je Benfordův zákon.

Klíčová slova: asymptotická hustota, logaritmická hustota, stejnoměrné rozdělení, Benfordův zákon

1 Úvod

Asymptotická a logaritmická hustota množiny jsou pojmy z teorie čísel, které jsou využívány ke kvantifikaci a srovnávání velikostí podmnožin množiny přirozených čísel \mathbb{N} . Jde o čísla, která mají charakterizovat, jak velkou část z množiny přirozených čísel tvoří prvky dané množiny.

Intuitivně vzato, posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně rozdělená právě když se zlomkové části hodnot x_n vyskytují v intervalech $\langle a, b \rangle \subseteq \langle 0, 1 \rangle$ „rovnoměrně“. Například „polovina“ jich bude v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, ale také v intervalu $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle$, „desetina“ jich bude v intervalu $\langle 0, \frac{1}{10} \rangle$ ale také v intervalu $\langle \frac{8}{10}, \frac{9}{10} \rangle$ a tak dále.

V dalším textu se seznámíme s definicemi výše uvedených pojmů, jejich základními vlastnostmi a ukážeme jak souvisí s takzvaným Benfordovým zákonem. Jedná se o fenomén, na který ve svém článku [10] poukázal už pan Newcomb a o 57 let později pan Benford (po němž je zákon pojmenován) v článku [1]. Jde o to, že v mnoha souborech čísel s nimiž se setkáváme (příkladem takového souboru dat může být třeba množina čísel představujících měsíční spotřebu elektrické energie u 1243 domácností na Šalamounových ostrovech - viz [12]) se vyskytují čísla začínající jedničkou častěji než ta začínající dvojkou. Konkrétně bylo vypořádáno, že relativní četnost čísel začínajících cifrou c se blíží hodnotě $\log_{10} \frac{c+1}{c}$.

Lze ale samozřejmě nalézt soubory dat, které se takto „benfordovsky“ nechovají (například, viz [12], telefonní čísla ve Vancouveru v roce 1974 - ani jedno nezačíná cifrou 1).

Tuto problematiku lze studovat z hlediska statistiky a teorie pravděpodobnosti (například [11], [2], [5], [6]). Je ale možné se vydat i deterministickou cestou a klást si otázku, jak velkou část hodnot dané posloupnosti y_n je tvořena čísly začínajícími (či s první platnou) cifrou c .

2 Asymptotická a logaritmická hustota

V našich představách tvoří polovinu ze všech přirozených čísel čísla sudá, třetinu násobky trojky, zatímco druhých mocnin nebo prvočísel je až zanedbatelně málo. Co to ale znamená – polovina přirozených čísel – když je jich nekonečně mnoho?!

Výše uvedené intuitivní představy můžeme formulovat pomocí takzvané asymptotické hustoty množiny $A \subseteq \mathbb{N}$.

Pro každou množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ označme symbolem $A(n)$ počet prvků množiny A , které jsou menší, nebo rovny číslu $n \in \mathbb{N}$. Poměr $\frac{A(n)}{n}$ tedy vyjadřuje, jak velkou část množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ tvoří prvky patřící do množiny A .

Nabízí se určit hodnotu $\frac{A(n)}{n}$ při $n \rightarrow \infty$. Pokud tato limita existuje, obdržíme číslo $d(A) \in \langle 0, 1 \rangle$ charakterizující, jak velkou část z množiny \mathbb{N} tvoří prvky množiny A . Toto číslo nazveme asymptotickou hustotou množiny A (viz například [7]). Její definici můžeme formulovat následujícím způsobem.

Definice 2.1 (Asymptotická hustota) *Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$. Horní asymptotickou hustotou množiny A nazveme číslo $\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$. Dolní asymptotickou hustotou množiny A nazveme číslo $\underline{d}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$. Jestliže*

$$\bar{d}(A) = \underline{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = d(A),$$

pak číslo $d(A)$ nazveme asymptotickou hustotou množiny A .

Příklad 2.1 *Pro ilustraci určíme asymptotickou hustotu množiny $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.*

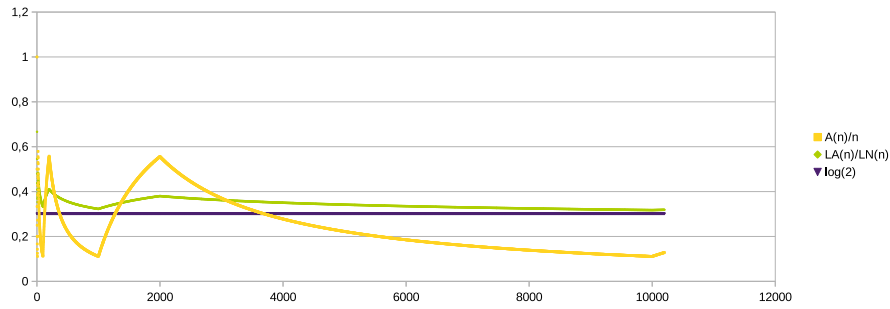
Je zřejmé, že $3k + 1 \leq n \Leftrightarrow k \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolní celá část reálného čísla x . Proto

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor}{n} = \frac{1}{3}.$$

Problémem je, že limita posloupnosti $\frac{A(n)}{n}$ neexistuje pro každou množinu $A \subseteq \mathbb{N}$. Typickým příkladem je množina přirozených čísel, jejichž dekadický zápis začíná danou cifrou $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Označme tuto množinu symbolem A_c . Na Obrázku 1 je žlutě znázorněn graf posloupnosti $\frac{A_c(n)}{n}$ (pro $c = 1$). Jeho „zubatý“ charakter je dán tím, že prvky množiny A_c jsou na číselné ose rozloženy „hodně nerovnoměrně“.

Snadno se rozmyslí, že v intervalu $\langle 1, 10 \rangle$ leží jen jeden (číslo c), dalších 10 prvků z A_c leží až v intervalu $\langle c \cdot 10, (c + 1) \cdot 10 \rangle$, dalších 10^2 leží v intervalu $\langle c \cdot 10^2, (c + 1) \cdot 10^2 \rangle$,... dalších 10^k leží v intervalu $\langle c \cdot 10^k, (c + 1) \cdot 10^k \rangle$,... a mimo tyto intervaly žádné prvky z A_c nejsou.

Posloupnost $\frac{A_c(n)}{n}$ tak nabývá (lokálně) nejvyšších hodnot v bodech $n = (c + 1)10^k - 1$, naopak nejnižší hodnoty má v bodech $n = c10^k - 1$. Pro horní a dolní asymptotickou hustotu množiny A_c proto platí:



Obrázek 1: Grafy posloupností $\frac{A(n)}{n}$ a $\frac{LA(n)}{LN(n)}$ pro $A = A_1$, $n \in \{1, 2, \dots, 10199\}$.

$$\begin{aligned} \bar{d}(A_c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A((c+1)10^k - 1)}{(c+1)10^k - 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+10+\dots+10^k}{(c+1)10^k - 1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{k+1}-1}{10-1}}{(c+1)10^k - 1} = \frac{10}{9(c+1)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \underline{d}(A_c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A(c10^k - 1)}{c10^k - 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+10+\dots+10^{k-1}}{c10^k - 1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^k - 1}{10 - 1}}{c10^k - 1} = \frac{1}{9c} \end{aligned}$$

Z rovností (1) okamžitě plyne, že množina A_c nemá asymptotickou hustotu. Nemusíme si ale zoufat, zkusme charakterizovat velikost množiny A_c v množině \mathbb{N} jinak (nebo, a tato představa pro nás bude později výhodnější, chceme nějakým způsobem popsat, jak velkou část prvků posloupnosti $y_n = n$ tvoří prvky patřící do množiny A_c).

Výše jsme se snažili najít limitní hodnotu poměru počtu prvků z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ patřících do A_c ku počtu všech prvků z $\{1, 2, \dots, n\}$ (asymptotickou hustotu). Ta ale neexistuje! Místo porovnávání počtů můžeme porovnat součty převrácených hodnot.

Symbolem $LA(n)$ označme součet převrácených hodnot prvků z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ patřících do A_c , to jest

$$LA(n) = \sum_{k \leq n, k \in A_c} \frac{1}{k},$$

symbolem $LN(n)$ označme součet převrácených hodnot všech prvků z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, to jest

$$LN(n) = \sum_{k \leq n, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k}$$

a bude nás zajímat limitní hodnota posloupnosti $\frac{LA(n)}{LN(n)}$. Pokud existuje, nazveme ji logaritmickou hustotou množiny A (viz například [7]). Definici logaritmické hustoty můžeme formulovat následujícím způsobem.

Definice 2.2 (Logaritmická hustota) *Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$. Horní logaritmickou hustotou množiny A nazveme číslo $\bar{\delta}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{LA(n)}{LN(n)}$. Dolní logaritmickou hustotou množiny A nazveme číslo*

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{LA(n)}{LN(n)}. \text{ Jestliže}$$

$$\bar{\delta}(A) = \underline{\delta}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{LA(n)}{LN(n)} = \delta(A),$$

pak číslo $\delta(A)$ nazveme logaritmickou hustotou množiny A .

Poznamenejme, že graf posloupnosti $\frac{LA_1(n)}{LN(n)}$ je na Obrázku 1 znázorněn zelenou barvou. Jak můžeme z obrázku vytušit, mezi asymptotickou a logaritmickou hustotou existuje vztah. Dá se dokázat (viz [7]), že pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ platí:

$$d(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(A) \leq \bar{d}(A).$$

Znamená to, že pokud existuje asymptotická hustota množiny A , pak existuje také její logaritmická hustota a jsou si rovny. Dá se také ukázat (viz [9]), že pro každou čtveřici reálných čísel $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta \leq 1$ existuje množina A taková, že $d(A) = \alpha, \underline{\delta}(A) = \beta, \bar{\delta}(A) = \gamma, \bar{d}(A) = \delta$.

Hodnota $\delta(A_c)$ je dobře známa (viz například [7]; pro zájemce její odvození naznačíme v Appendixu). Platí následující tvrzení.

Věta 2.1 *Pro každé $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ platí*

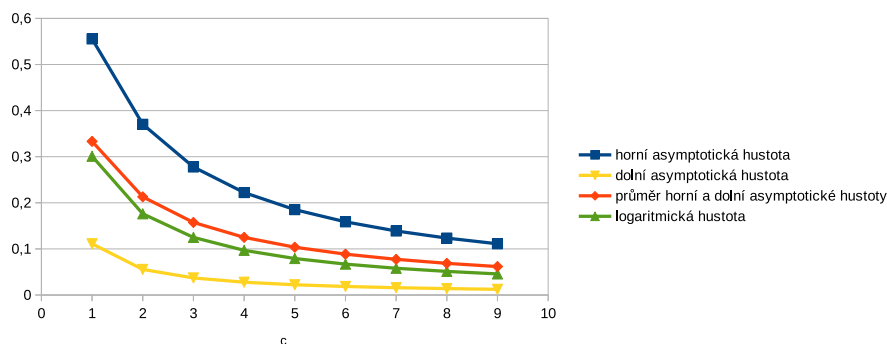
$$\delta(A_c) = \log_{10} \left(\frac{c+1}{c} \right).$$

Hodnoty horní a dolní asymptotické hustoty množin A_c , jejich průměrné hodnoty a logaritmické hustoty množin A_c jsou pro jednotlivá $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ uvedeny v Tabulce 1 a znázorněny na Obrázku 2

Tabulka 1: Hustoty množin A_c . Hodnoty jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa.

c	$\bar{d}(A)$	$\underline{d}(A)$	$\frac{1}{2}(\bar{d}(A) + \underline{d}(A))$	$\delta(A)$
1	0,556	0,111	0,333	0,301
2	0,370	0,056	0,213	0,176
3	0,278	0,037	0,157	0,125
4	0,222	0,028	0,125	0,097
5	0,185	0,022	0,104	0,079
6	0,158	0,019	0,089	0,067
7	0,139	0,016	0,077	0,058
8	0,123	0,014	0,069	0,051
9	0,111	0,012	0,062	0,046

Tímto jsme poměrně uspokojivě vyřešili otázku, jak jsou v posloupnosti $y_n = n$, tj. v posloupnosti všech přirozených čísel, zastoupena čísla, která ve svém dekadickém zápisu začínají

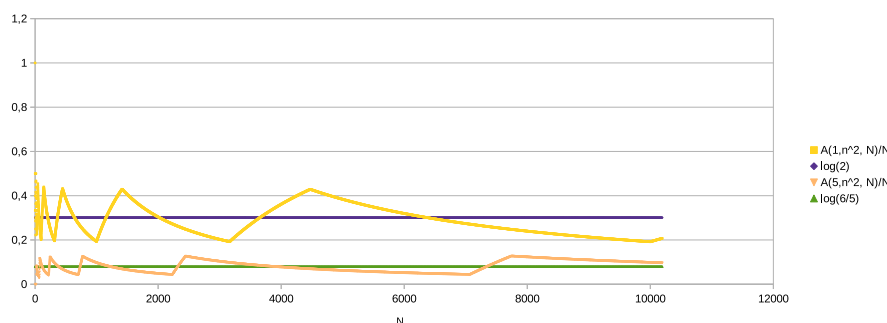


Obrázek 2: Hodnoty $\bar{d}(A_c)$, $\underline{d}(A_c)$, $\frac{1}{2}(\bar{d}(A_c) + \underline{d}(A_c))$ a $\delta(A_c)$ pro $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

cifrou c . Problém ale můžeme zobecnit i na jiné posloupnosti než $y_n = n$. Pro ilustraci se krátce zamysleme, jak velkou část ze členů posloupnosti $y_n = n^2$, respektive $y_n = 2^n$ tvoří čísla začínající cifrou c .

Pro začátek začněme s numerickými experimenty. Pro obecnou posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ označme $A(c, y_n, N)$ počet prvků množiny $\{y_1, \dots, y_N\}$, které začínají cifrou c . Bude nás zajímat chování posloupnosti $\frac{A(c, y_n, N)}{N}$ při $N \rightarrow \infty$.

Na Obrázku 3 jsou znázorněny grafy posloupností $\frac{A(c, n^2, N)}{N}$, pro $N \in \{1, 2, \dots, 10199\}$, kde $c = 1$ a $c = 5$.

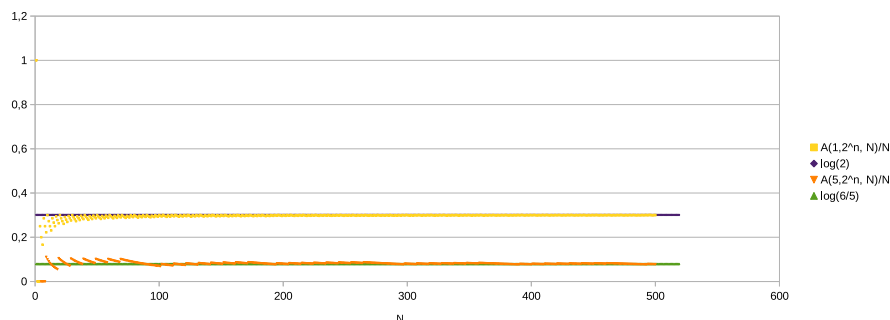


Obrázek 3: Grafy posloupností $\frac{A(1, n^2, N)}{N}$ a $\frac{A(5, n^2, N)}{N}$, $N \in \{1, 2, \dots, 10199\}$.

Opět vidíme „zubatý“ charakter grafu podobný tomu na Obrázku 1. Hodnoty $\frac{A(1, n^2, N)}{N}$ kolísají kolem hodnoty $\log_{10} 2$ a hodnoty $\frac{A(5, n^2, N)}{N}$ se pohybují kolem hodnoty $\log_{10} \frac{6}{5}$.

Na Obrázku 4 jsou znázorněny grafy posloupností $\frac{A(c, 2^n, N)}{N}$, pro $N \in \{1, 2, \dots, 501\}$ pro $c = 1$ a $c = 5$. Zdá se, že hodnoty $\frac{A(1, 2^n, N)}{N}$ se blíží $\log_{10} 2$ a hodnoty $\frac{A(5, 2^n, N)}{N}$ se blíží $\log_{10} \frac{5}{6}$.

Pokusme se toto rozdílné chování posloupností $y_n = n^2$ a $y_n = 2^n$ prozkoumat.


 Obrázek 4: Grafy posloupností $\frac{A(1,2^n,N)}{N}$ a $\frac{A(5,2^n,N)}{N}$ pro $N \in \{1, 2, \dots, 501\}$.

Poznámka 2.1 Uvažujme obecně nějakou posloupnost čísel $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n \in \mathbb{R}^+$. Číslo y_n má ve svém dekadickém zápisu jako první nenulovou cifru $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ právě když $c10^k \leq y_n < (c+1)10^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ (například pro $y_n = 0,5$ je $k = -1$). Všimněme si, že

$$\begin{aligned} c10^k &\leq y_n < (c+1)10^k \\ &\iff \\ k + \log_{10} c &\leq \log_{10} y_n < k + \log_{10}(c+1) \\ &\iff \\ 0 \leq \log_{10} c &\leq \log_{10} y_n - k < \log_{10}(c+1) \leq 1 \end{aligned}$$

Je proto zřejmé, že k musí být rovno $[\log_{10} y_n]$ (tj. dolní celé části čísla $\log_{10} y_n$). Z výše uvedeného plyne, že číslo y_n má ve svém dekadickém zápisu jako první nenulovou cifru $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ právě když

$$\{\log_{10} y_n\} \in \langle \log_{10} c, \log_{10}(c+1) \rangle,$$

kde $\{x\}$ označuje zlomkovou část reálného čísla x . Bude nás proto zajímat rozložení zlomkových částí posloupnosti $x_n = \log_{10} y_n$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Z Obrázku 4 docházíme k hypotéze, že pro $y_n = 2^n$ se poměr zlomkových částí posloupnosti $x_n = \log_{10} y_n$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ patřících do intervalu $\langle \log_{10} c, \log_{10}(c+1) \rangle$ ku počtu všech zlomkových částí (tj. ku N) limitně blíží číslu

$$\log_{10} \frac{c+1}{c} = \log_{10}(c+1) - \log_{10} c.$$

Naopak, z Obrázku 3 odhadujeme, že u posloupnosti $y_n = n^2$ to tak není. Tím se dostáváme k pojmu stejnoměrného rozdělení.

3 Stejněměrně rozdělené posloupnosti

Uvažujme posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a domluvme se, že $[x]$ značí dolní celou část reálného čísla x , $\{x\} = x - [x]$ je zlomková část x a $A(\langle a, b \rangle, x_n, N)$ označuje počet prvků množiny $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_N\}\} \cap \langle a, b \rangle$.

Jak bylo řečeno v úvodu, posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ považujeme za stejněměrně rozdělenou právě když jsou zlomkové části hodnot x_n rozloženy v podintervalech $\langle a, b \rangle$ intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ „rovnoměrně“. To jest, když je relativní četnost zlomkových částí $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_N\}$ patřících do intervalu $\langle a, b \rangle$ při $N \rightarrow \infty$ rovna délce tohoto intervalu (viz například [8]). Definujme tedy pojem stejněměrného rozdělení následovně:

Definice 3.1 *Posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejněměrně rozdělená modulo 1 (zkráceně u.d. mod 1) právě když pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, kde $0 \leq a < b \leq 1$ platí*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle a, b \rangle, x_n, N)}{N} = b - a. \quad (2)$$

Pojem stejněměrného rozdělení zavedl Hermann Weyl a ve svém článku [13] publikoval tvrzení, dnes známé jako Weylovo kritérium ([8], str. 7.), které se stalo základem pro další rozvoj teorie o stejněměrně rozdělených posloupnostech.

Věta 3.1 (Weylovo kritérium) *Posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejněměrně rozdělená modulo 1 právě když pro každé $h \in \mathbb{Z}$, $h \neq 0$ platí:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = 0. \quad (3)$$

Příklad 3.1 *Přímo z Weylova kritéria plyne známé tvrzení, že každá posloupnost $x_n = \alpha n$, kde α je iracionální číslo je u.d. mod 1. Důkaz je jednoduchý:*

Uvažujme-li libovolné $h \in \mathbb{Z}$, $h \neq 0$ potom díky iracionalitě α je $e^{2\pi i h \alpha} \neq 1$ a platí:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \alpha n} \right| = \frac{1}{N} \underbrace{|e^{2\pi i h \alpha}|}_{=1} \left| \frac{e^{2\pi i h \alpha N} - 1}{e^{2\pi i h \alpha} - 1} \right| \leq \frac{1}{N} \frac{2}{|e^{2\pi i h \alpha} - 1|}.$$

Při $N \rightarrow \infty$ dostáváme (3).

Příklad 3.2 *Z Weylova kritéria plyne, že pokud je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ u.d. mod 1, pak také posloupnost $\{c x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ je také u.d. mod 1.*

Podle předpokladu je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ u.d. mod 1, proto (3) platí pro libovolné $h = h^ c$, kde $h^* \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Takže pro libovolné $h^* \in \mathbb{Z} - \{0\}$ platí*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h^* c x_n} = 0.$$

Dalším důsledkem Weylova kritéria je například takzvaná Fejérová věta ([8], str. 13))

Věta 3.2 (Fejérová) *Nechť $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel taková, že platí:*

- $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ je monotónní,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f(n) = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n|\Delta f(n)| = \infty$.

Potom posloupnost $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je u.d. mod 1.

A její „diferenciální“ verze:

Věta 3.3 (Fejérová) *Nechť $f(x)$ je funkce definovaná pro $x \geq 1$ a diferencovatelná pro dost velká x a platí:*

- $f'(x)$ je monotónní,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x|f'(x)| = \infty$.

Potom posloupnost $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je u.d. mod 1.

Příklad 3.3 *Fejérovu větu můžeme využít k ověření skutečnosti, že posloupnost $\{\alpha n^{\sigma} \log_{10} n\}_{n=2}^{\infty}$, kde $\alpha \neq 0$, $\sigma \in (0, 1)$ je u.d. mod 1 ([8], str. 14)). Například konkrétní volbou $\alpha = 1$ a $\sigma = \frac{1}{2}$ obdržíme posloupnost $\{\log_{10} n^{\sqrt{n}}\}_{n=2}^{\infty}$.*

4 Silně a slabě benfordovské posloupnosti

Z Poznámky 2.1 je jasné, že $A(c, y_n, N)$ – počet prvků množiny $\{y_1, \dots, y_N\}$, které začínají cifrou c , je rovno $A(\langle \log_{10} c, \log_{10}(c+1) \rangle, \log_{10} y_n, N)$, tj. počtu prvků množiny

$$\{\langle \log_{10} y_1 \rangle, \langle \log_{10} y_2 \rangle, \dots, \langle \log_{10} y_N \rangle\} \cap \langle \log_{10} c, \log_{10}(c+1) \rangle$$

a že se posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n > 0$ „chová benfordovsky“ pokud pro každé $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle \log_{10} c, \log_{10}(c+1) \rangle, \log_{10} y_n, N)}{N} = \log_{10}(c+1) - \log_{10} c = \log_{10} \frac{c+1}{c}. \quad (4)$$

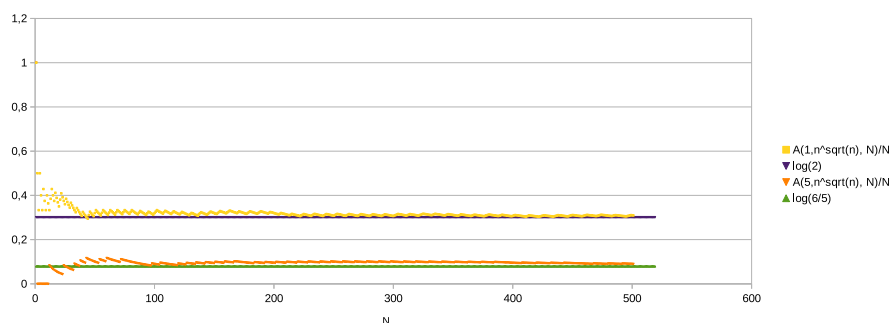
Srovnáním s Definicí 3.1 okamžitě zjišťujeme, že pokud je posloupnost $x_n = \log_{10} y_n$ stejnoměrně rozdělená modulo 1, pak se posloupnost y_n „chová benfordovsky“. (Jak zdůvodníme dále, opačná implikace neplatí.) Je to motivací pro zavedení pojmu *silně benfordovská posloupnost*, tak jak to navrhl J.Ciegler (viz [12], str. 525).

Definice 4.1 *Posloupnost reálných čísel $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n > 0$ je silně benfordovská právě když je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \log_{10} y_n$ stejnoměrně rozdělená modulo 1. To jest, právě když pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, kde $0 \leq a < b \leq 1$ platí*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle a, b \rangle, \log_{10} y_n, N)}{N} = b - a.$$

Z Příkladu 3.1 pak okamžitě plyne, že každá posloupnost $y_n = a^n$, kde $\log_{10} a$ je iracionální číslo, je silně benfordovská, neboť v tom případě je posloupnost $x_n = \log_{10} y_n = n \log_{10} a$ stejnoměrně rozdělena modulo 1. Je tedy jasné, že posloupnost $y_n = 2^n$ je silně benfordovská a vysvětluje se tím chování grafu na Obrázku 4.

Z Příkladu 3.3 je pak zřejmé, že také například posloupnosti $y_n = n^{\sqrt[n]{k}}$, kde $k \in \{2, 3, \dots\}$ jsou silně benfordovské (viz Obrázek 5).



Obrázek 5: Grafy posloupností $\frac{A(1, n^{\sqrt{n}}, N)}{N}$ a $\frac{A(5, n^{\sqrt{n}}, N)}{N}$ pro $N \in \{1, 2, \dots, 501\}$.

Naproti tomu, jak se dá tušit už z Obrázku 1, posloupnost $y_n = n$ není silně benfordovská. To jest, posloupnost $x_n = \log_{10} y_n = \log_{10} n$ není stejnoměrně rozdělena - asymptotická hustota množiny přirozených čísel začínajících cifrou c neexistuje. Dokonce se dá dokázat, že tato posloupnost nesplňuje definiční vztah (2) ani pro jednu dvojici $a, b \in \mathbb{R}$, kde $0 \leq a < b \leq 1$ (viz [8], str. 9.).

Nicméně víme, že množina prvků této posloupnosti začínajících cifrou c je s hodnotou $\log_{10} \frac{c+1}{c}$ nějakým způsobem spojená - jedná se o logaritmickou hustotu této množiny. Tyto úvahy můžeme zobecnit i pro jiné posloupnosti než $y_n = n$. To je motivace pro zavedení slabě benfordovských posloupností.

Definice 4.2 Posloupnost reálných čísel $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n > 0$ je slabě benfordovská právě když pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, kde $0 \leq a < b \leq 1$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \mathbb{1}_{a \leq \{\log_{10} y_n\} < b}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}} = b - a.$$

Všimněme si, že definiční vztah pro silně benfordovské posloupnosti (Definice 4.1) bychom mohli napsat ve tvaru:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle a, b \rangle, \log_{10} y_n, N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{a \leq \{\log_{10} y_n\} < b}}{\sum_{n=1}^N 1} = b - a.$$

Vidíme, že jsme od silně benfordovských posloupností přešli ke slabě benfordovským posloupnostem zcela analogicky jako jsme od asymptotické hustoty přešli k logaritmické hustotě.

Posloupnost $y_n = n$ sice není silně benfordovská, ale je slabě benfordovská (důkaz je možné provést drobnou úpravou důkazů provedených v Appendixu).

Slabě benfordovské jsou také například posloupnosti $y_n = \sqrt{n}$, nebo $y_n = p(n)$, kde $p(x)$ je polynom ([3], [4]).

Definujme nyní *asymptotickou distribuční funkci* F_{x_n} . Jde o analogii s distribuční funkcí F_X náhodné veličiny X známou z teorie pravděpodobnosti, kde $F_X(x) = P(X < x)$.

Definice 4.3 *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Definujme pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ funkce \underline{F}_{x_n} a \bar{F}_{x_n} předpisem:*

$$\underline{F}_{x_n}(x) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle 0, x \rangle, x_n, N)}{N} \quad a \quad \bar{F}_{x_n}(x) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle 0, x \rangle, x_n, N)}{N}.$$

Funkci \underline{F}_{x_n} nazvěme *dolní asymptotickou distribuční funkcí* posloupnosti x_n a funkci \bar{F}_{x_n} nazvěme *horní asymptotickou distribuční funkcí* posloupnosti x_n .

Jestliže pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $\underline{F}_{x_n}(x) = \bar{F}_{x_n}(x)$, pak funkci F_{x_n} danou pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ předpisem:

$$F_{x_n}(x) = \underline{F}_{x_n}(x) = \bar{F}_{x_n}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle 0, x \rangle, x_n, N)}{N}$$

nazvěme asymptotickou distribuční funkcí posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 4.1 *Je zřejmé, že každá asymptotická distribuční funkce F_{x_n} je na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ neklesající a platí, že $F_{x_n}(0) = 0$ a $F_{x_n}(1) = 1$.*

Navíc je možné dokázat ([8], str. 138), že ke každé neklesající funkci F jejímž definičním oborem je interval $\langle 0, 1 \rangle$ a platí, že $F(0) = 0$ a $F(1) = 1$ existuje posloupnost reálných čísel taková, že F je její asymptotickou distribuční funkcí.

Není těžké dokázat, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je u.d. mod 1 právě když její asymptotická distribuční funkce existuje a pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $F_{x_n}(x) = x$.

Potom je zřejmé, že pro silně benfordovské posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že

$$F_{\log_{10} y_n}(x) = x. \quad (5)$$

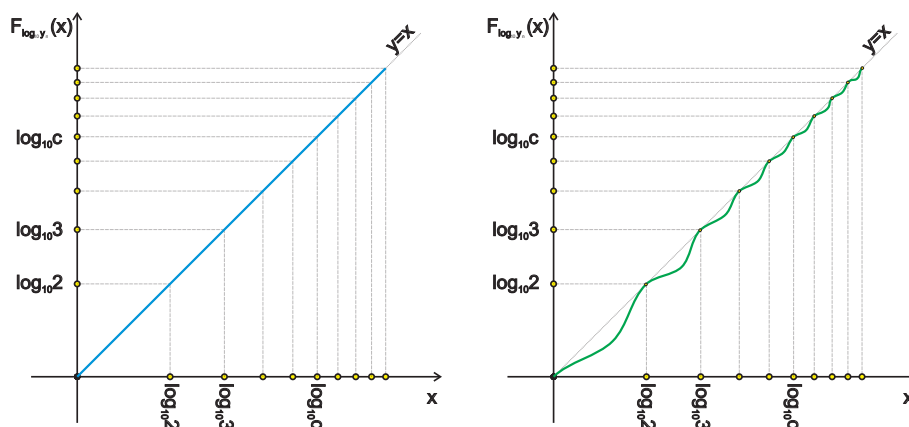
Aby se však posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n > 0$, „chovala benfordovsky“, (tj. pro každé $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ platí (4)), stačí a je nutné, aby pro každé $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(\langle 0, \log_{10}(c+1) \rangle, \log_{10} y_n, N)}{N} = \log_{10}(c+1). \quad (6)$$

Pokud pro posloupnost $x_n = \log_{10} y_n$ existuje asymptotická distribuční funkce (což obecně nemusí), můžeme (6) přeformulovat na:

$$F_{\log_{10} y_n}(\log_{10}(c+1)) = \log_{10}(c+1).$$

Z tohoto pohledu se požadavek (5) zdá být zbytečně silný. Každá silně benfordovská posloupnost y_n se „chová benfordovsky“, (tj. splňuje (6)), ale, vzhledem k Poznámce 4.1, jistě



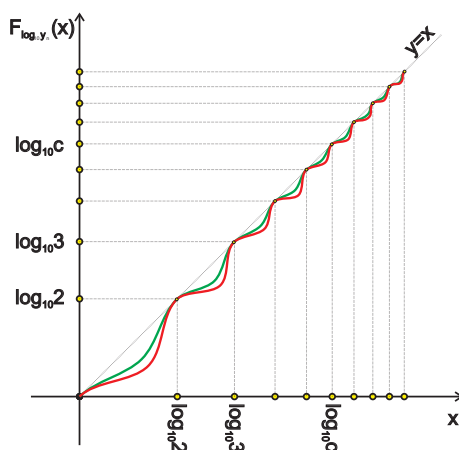
Obrázek 6: Na obrázku vlevo je modře znázorněn graf distribuční funkce posloupnosti $x_n = \log_{10} y_n$, kde posloupnost y_n je silně benfordovská. Vpravo je zeleně znázorněn graf distribuční funkce posloupnosti $x_n = \log_{10} y_n$, kde posloupnost y_n se „chová benfordovskovsky“, ale není silně benfordovská.

existuje posloupnost x_n , jejíž distribuční funkce je znázorněna na Obrázku 6 vpravo. Potom posloupnost $y_n = 10^{x_n}$ se „chová benfordovskovsky“, ale není silně benfordovská.

Ne pro každou posloupnost však existuje distribuční funkce. V takovém případě na to, aby se posloupnost y_n „chovala benfordovskovsky“, stačí, aby horní a dolní asymptotická distribuční funkce (ty jistě existují) posloupnosti $x_n = \log_{10} y_n$ pro každé $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ splňovaly:

$$\bar{F}_{\log_{10} y_n}(\log_{10}(c+1)) = \underline{F}_{\log_{10} y_n}(\log_{10}(c+1)) = \log_{10}(c+1),$$

tak, jak je to znázorněno na Obrázku 7. I v tomto případě posloupnost y_n není silně benfordovská, ale „chová se benfordovskovsky“.



Obrázek 7: Graf horní (zeleně) a dolní (červeně) asymptotické distribuční funkce posloupnosti $x_n = \log_{10} y_n$, kde se posloupnost y_n „chová benfordovskovsky“, ale není silně benfordovská.

Závěr

Viděli jsme, že zkoumání fenoménu známého jako Benfordův zákon může být dobrou motivací pro zavedení a zkoumání vlastností pojmů asymptotické a logaritmické hustoty, posloupností se stejnoměrným rozdělením a pro zobecnění asymptotické a logaritmické hustoty při hledání silně a slabě benfordovských posloupností.

Benfordův zákon vychází z intuice, ze zkušeností, z pozorování souborů číselných údajů. Jednou z otázek ale je, jak vlastně samotný Benfordův zákon formulovat. Přístupy mohou být různé a různé exaktní formulace vedou k různým výsledkům. V našem článku jsme se pokusili formulovat tvrzení Benfordova zákona pro deterministickou posloupnost kladných reálných čísel pomocí vztahu (4). Jak jsme viděli výše, existují posloupnosti, které nejsou silně benfordovské, přesto se chovají tak, jak bychom podle Benfordova zákona čekali.

Appendix

Naznačíme odvození logaritmické hustoty množiny A_c . Nejprve využijeme dobře známý fakt, že $LN(n) = \sum_{k \leq n, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, kde γ je takzvaná Eulerova konstanta. Odtud okamžitě plyne pravdivost následujícího tvrzení.

Věta 4.1 *Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$. Limita posloupnosti $\frac{LA(n)}{LN(n)}$ existuje právě tehdy, když existuje limita posloupnosti $\frac{LA(n)}{\ln(n)}$ a pokud tyto limity existují, pak se rovnají. To jest,*

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{LA(n)}{LN(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{LA(n)}{\ln(n)}.$$

Nyní můžeme určit hodnotu $\delta(A_c)$.

Věta 4.2 *Pro každé $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ platí*

$$\delta(A_c) = \log_{10} \left(\frac{c+1}{c} \right).$$

Důkaz

Chceme určit hodnotu limity (viz Věta 4.1)

$$\delta(A_c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_c(n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{a \in A_c, a \leq n} \frac{1}{a}}{\ln n}.$$

Odhadneme proto hodnotu součtu $\sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a}$ v závislosti na n . Uvažujme, která přirozená čísla a patří do množiny A_c a splňují podmínku $10^j \leq a < 10^{j+1}$. Nejmenší takové číslo a je rovno $c \cdot 10^j$ a největší je rovno $(c+1)10^j - 1$. A všechna přirozená čísla mezi nimi také patří do množiny A_c . Proto, označíme-li pro každé $j = 0, 1, \dots$

$$L_j = \sum_{\substack{a \in A_c \\ 10^j \leq a < 10^{j+1}}} \frac{1}{a}, \quad (7)$$

je

$$L_j = \sum_{c \cdot 10^j \leq a \leq (c+1)10^j - 1} \frac{1}{a} = \sum_{a \leq (c+1)10^j - 1} \frac{1}{a} - \sum_{a \leq c \cdot 10^j - 1} \frac{1}{a}. \quad (8)$$

Platí (důkaz přenecháme čtenáři za cvičení) $\sum_{a \leq n} \frac{1}{a} = \ln(n+1) + \gamma + g(n)$, kde γ je konstanta, a $g(n)$ splňuje nerovnosti $-\frac{1}{n+1} < g(n) < 0$. Proto

$$\begin{aligned} L_j &= \ln((c+1)10^j) - \ln(c \cdot 10^j) + \underbrace{g((c+1)10^j - 1) - g(c \cdot 10^j - 1)}_{\alpha(j)}, \\ L_j &= \ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + \alpha(j), \end{aligned} \quad (9)$$

kde

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(c+1)10^j} &< g((c+1)10^j - 1) < 0, \\ 0 &< -g(c \cdot 10^j - 1) < \frac{1}{c \cdot 10^j}. \end{aligned} \quad (10)$$

A tak $\alpha(j) = g((c+1)10^j - 1) - g(c \cdot 10^j - 1)$ splňuje pro každé $j = 0, 1, \dots$ podmínku

$$-\frac{1}{(c+1)10^j} < \alpha(j) < \frac{1}{c \cdot 10^j}. \quad (11)$$

Nyní už můžeme snadno odhadnout hodnotu součtu $\sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a}$. Pro dané n jistě existuje $j_n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$10^{j_n} \leq n < 10^{j_n+1}. \quad (12)$$

Podle (7) a (12) platí

$$\sum_{j=0}^{j_n-1} L_j \leq \sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a} < \sum_{j=0}^{j_n+1} L_j, \quad (13)$$

dosazením (9) do (13) obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{j_n-1} \left(\ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + \alpha(j) \right) &\leq \sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a} < \sum_{j=0}^{j_n+1} \left(\ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + \alpha(j) \right), \\ j_n \ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + \sum_{j=0}^{j_n-1} \alpha(j) &\leq \sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a} < (j_n+2) \ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + \sum_{j=0}^{j_n+1} \alpha(j). \end{aligned} \quad (14)$$

S využitím (11) dostaneme odhady

$$\sum_{j=0}^{j_n-1} \alpha(j) \geq \sum_{j=0}^{j_n-1} \frac{-1}{(c+1)10^j} \geq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-1}{(c+1)10^j} = \frac{-10}{9(c+1)} \quad (15)$$

a

$$\sum_{j=0}^{j_n+1} \alpha(j) \leq \sum_{j=0}^{j_n+1} \frac{1}{c \cdot 10^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c \cdot 10^j} = \frac{10}{9c}. \quad (16)$$

Použijeme odhady (15) a (16) v nerovnostech (14) a obdržíme

$$j_n \ln \left(\frac{c+1}{c} \right) - \frac{10}{9(c+1)} \leq \sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a} < (j_n + 2) \ln \left(\frac{c+1}{c} \right) + \frac{10}{9c}. \quad (17)$$

Z nerovností (12) plyne, že $j_n = \left[\frac{\ln n}{\ln 10} \right]$. Dosazením do (17) obdržíme odhady:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a}}{\ln n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{\ln n}{\ln 10} \right] \ln \left(\frac{c+1}{c} \right) - \frac{10}{9(c+1)}}{\ln n} = \frac{\ln \left(\frac{c+1}{c} \right)}{\ln 10}. \quad (18)$$

a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a}}{\ln n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left[\frac{\ln n}{\ln 10} \right] + 2 \right) \ln \left(\frac{c+1}{c} \right) + \frac{10}{9c}}{\ln n} = \frac{\ln \left(\frac{c+1}{c} \right)}{\ln 10} \quad (19)$$

Proto

$$\frac{\ln \left(\frac{c+1}{c} \right)}{\ln 10} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a}}{\ln n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{a \in A_c \\ a \leq n}} \frac{1}{a}}{\ln n} \leq \frac{\ln \left(\frac{c+1}{c} \right)}{\ln 10}.$$

Q.E.D.

Reference

- [1] BENFORD, F.: The law of anomalous numbers, Proc. Amer. Phil. Soc., 78(1938), p. 551-572.
- [2] BUMBY, R.; ELLENTUCK, E.: Finitely additive measures and the first digit problem, Fund. Math., 65(1969).
- [3] CIEGLER, J.; HELMBERG, G.: Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, Jber. Deutsch. Math.-Verein., 64 (1961), p. 1-50.
- [4] CIEGLER, J.: Methods of summability and uniform distribution mod 1, Compositio Math., 16 (1964), p.44-51.
- [5] HILL, T. P.: A statistical derivation of the significant-digit law, Statist.Sci., 10 (1995), p. 354-363.

- [6] Hill, T. P.: Base-invariance implies Benford's law, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), p. 887-895.
- [7] KOLIBIAR M.; LEGÉŇ A.; ŠALÁT T; ZNÁM Š.: Algebra a príbuzné disciplíny. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa, 1992. ISBN 80-05-00721-3.
- [8] KUIPERS, L.; NIEDERREITER, H.: Uniform distribution of sequences. Mineola, N.Y. : Dover Publications, 2006, ISBN 0-486-45019-8.
- [9] MIŠÍK, L.: Sets of positive integers with prescribed values of densities. Mathematica Slovaca, 52(3), 2002, p. 289–296.
- [10] NEWCOMB, S.: Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. Amer.J.Math., 4(1881), p. 39-40.
- [11] PINKHAM, R.S.: On the distribution of first significant digits. Ann. Math. Statist, 32(1961), p. 1223-1230.
- [12] RAIMI, R.A.: The First digit problem. The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 7, 1976, p. 521-538.
- [13] WEYL, H.: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77(1916), p. 313-352.

PŘÍKLADY MATEMATICKÝCH ÚLOH, V NICHŽ LZE POTKAT SUDOKU

Jan Jekl, Jaromír Kuben, Pavlína Račková, Vojtěch Růžička

Katedra matematiky a fyziky, Fakulta vojenských technologií technická, Univerzita obrany,
Kounicova 65, 662 10, Brno
jan.jekl2@unob.cz

Abstrakt: Sudoku je nejen logickou hádankou, ale také možným zdrojem matematických úloh z různých oblastí matematiky. A to proto, že sudoku lze ztotožnit s několika různými matematickými grafy. Lze ho také formulovat jako soustavu rovnic, což může být užitečné při výuce numerických metod a řešení soustav. Studenti se mohou naučit, jak reprezentovat reálný problém pomocí rovnic a jak jej vyřešit. Od soustavy pak není daleko k popisu sudoku pomocí binárního čísla. V článku se zaměříme na různé matematické objekty, pomocí kterých lze sudoku reprezentovat.

Klíčová slova: Sudoku; magický čtverec; matematický graf; soustava lineárních rovnic; binární proměnná

1 Úvod

Lidé se zabývají číselnými hádankami, které vyžadují doplňování čísel do mřížky, už od dávných dob. Pravděpodobně nejstarším příkladem zábavné matematiky jsou magické čtverce, kdy do čtvercové sítě 3×3 (nebo větší) doplňujeme čísla 1 až 9 tak, aby součet čísel v každém řádku, sloupci a úhlopříčce byl stejný. Tento součet se nazývá magický součet.

V 18. století se magickými čtverci zabýval i švýcarský matematik Leonhard Euler, který posléze formuloval nový typ čtverce, a to tzv. latinský čtverec. Je to čtvercová tabulka o $n \times n$ polích, která je vyplněna tak, že se každé číslo (symbol) vyskytuje v každém řádku a v každém sloupci právě jednou. Název latinský, dostal čtverec proto, že Euler místo symbolů používal písmena latinky. Latinské čtverce se používají v různých oblastech, jako je konstrukce samoopravňujících kódů a matematické hádanky, například sudoku.

Na konci 19. století se ve francouzských časopisech objevily číselné hádanky připomínající dnešní sudoku. Základem těchto hádanek byly magické čtverce, ze kterých byla odstraněna některá čísla. Pařížský deník *Le Siècle* publikoval v roce 1892 částečně dokončený magický čtverec 9×9 s vyznačenými sekcemi 3×3 . Nešlo o sudoku, protože se zde vyskytovala dvouciferná

	3		
1			4
3			2
	4		

4	3	2	1
1	2	3	4
3	1	4	2
2	4	1	3

Obrázek 1: Zadání shidoku (vlevo) a jeho řešení (vpravo).

čísla a k vyřešení byla potřeba spíše aritmetika než logika, ale klíčovou charakteristikou bylo to, že každý řádek, sloupec a vyznačená sekce měla mít stejný součet.

V roce 1895 společnost La France vylepšila hlavolam tak, že se jednalo téměř o moderní sudoku, a pojmenovala jej carré magique diabolique („dábelský magický čtverec“). Úprava od B. Meyniela spočívala v tom, že každý řádek, sloupec a přerušované úhlopříčky čtverce 9×9 obsahovaly pouze čísla 1 – 9, ale sekce 3×3 nebyly označeny. Přestože nebyly označeny, každá také obsahovala čísla 1 – 9, a dodatečné omezení na přerušovaných úhlopříčkách vedlo pouze k jedinému řešení. Tyto týdenní hádanky byly součástí francouzských novin jako L'Écho de Paris asi deset let, ale zmizely přibližně v době první světové války.

První hru, v nám dnes známé podobě, vytvořil v roce 1979 v USA Howard Garns, specialista na hádanky. Dell Magazines ji téhož roku uvedl na trh v New Yorku pod názvem Number Place. V dubnu 1984 Maki Kadži, ředitel japonské společnosti Nikoli, poprvé publikoval v měsíčníku „Getsukan Nikoli suto“ hru Number Place pod názvem „Suji wa dokushin ni kagiru“. Tento název dal později zkrácením vzniknout nám známému slovu: sudoku [2], [11].

Sudoku se dodnes těší jisté míře popularity. Nalezneme jej v novinách, časopisech i v samostatných publikacích. Proto se domníváme, že může nadále sloužit jako zdroj motivačních příkladů v průběhu výuky, viz také [6]. Přitom význam uvádění zajímavých příkladů v rámci výuky je jasný: Zaujmout studenta a probudit jeho touhu se samostatně učit, viz také [3], [5], [9].

Pouze pro úplnost připomeňme, že sudoku je 9×9 předvyplněná tabulka obsahující devět zvýrazněných předvyplněných 3×3 sekcí. Naším úkolem je doplnit do tabulky čísla od 1 do 9 tak, aby byly splněny následující požadavek: Každé číslo smí v každém řádku, sloupci a v každé z vyznačených oblastí vystupovat pouze jednou.

V příspěvku budeme spojitost mezi matematickými úlohami a sudoku ukazovat pomocí shidoku, což je jednodušší varianta sudoku, která pracuje pouze s tabulkou 4×4 . Pravidla jsou podobná jako u klasického sudoku: každé číslo od 1 do 4 se musí objevit pouze jednou v každém řádku, sloupci a v každé vyznačené oblasti 2×2 . A aby mělo neúplné shidoku jednoznačné řešení, musí být v tabulce zadána minimálně čtyři různá čísla, která však nelze do tabulky umístit zcela náhodně. Na obrázku 1 je uvedena jedna úloha shidoku a jeho řešení.

V tomto textu se zaměříme na matematické popisy shidoku. Přitom není obtížné uváděné výsledky zobecnit i na další podvarianty sudoku jakými jsou např. varianty 6×6 , 16×16 , diagonální sudoku a mnohé další. Hlavním rozdílem mezi podvariantami je, že 4×4 shidoku je tou nejjednodušší smysluplnou variantou, což čtenáři usnadní pochopení uvedených výsledků.

V rámci celého textu používáme standardní maticové označení, kde dvojice (i, j) reprezen-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obrázek 2: Tabulka shidoku s očíslovanými buňkami počínaje v levém horním rohu.

tuje buňku v i -tém řádku a j -tém sloupci počítáno shora dolů, respektive zleva doprava.

2 Teorie grafů

Z naší zkušenosti víme, že teorie grafů je obvykle vyučována až na vysoké škole. Přitom pojem matematický graf a jeho využití lze poměrně snadno vysvětlit již na střední škole. Některé objekty, jako je silniční síť nebo elektrická rozvodná síť, lze popsat pomocí matematického grafu snadno. U jiných objektů nemusí být způsob popisu očividný, například u sudoku. Každá buňka sudoku totiž může být považována za vrchol grafu a hrany mezi vrcholy pak reprezentují vztahy mezi buňkami. Dva vrcholy budou spojeny hranou, pokud jsou umístěny v původní buňce sudoku ve stejném řádku, sloupci nebo vyznačené oblasti. Grafům popisujícím sudoku se věnujeme v celé následující sekci.

2.1 Obarvení vrcholů

Mezi buňkami shidoku existuje pomyslný vztah, který určuje, že některé množiny buňek nemohou obsahovat stejná čísla. Buňka č. 4 vyznačená na obrázku 2 je tak například ve vztahu s buňkami označenými jako 1, 2, 3, 7, 8, 12, 16. Přitom si snadno rozmyslíme, že každá buňka je ve vztahu se sedmi jinými buňkami. Proto můžeme shidoku reprezentovat jako graf, který bude obsahovat:

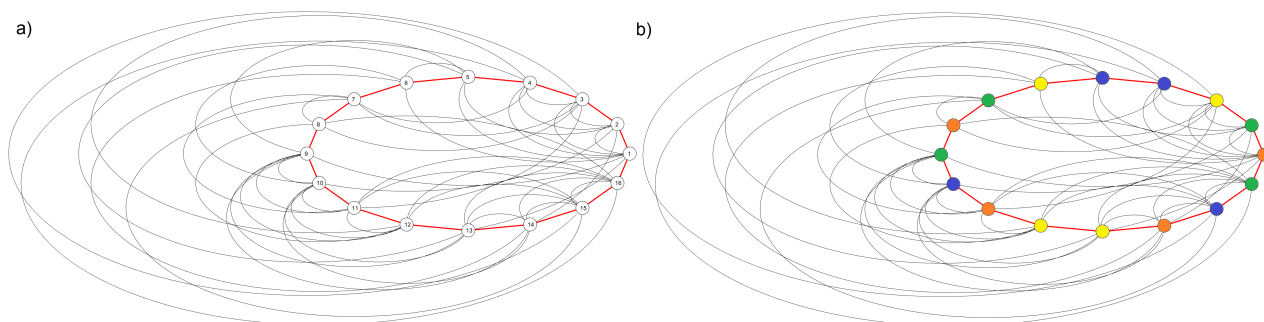
1. 16 vrcholů a to pro každou buňku jeden,
2. $\frac{16 \cdot 7}{2} = 56$ hran, které reprezentují, že jsou buňky propojených vrcholů ve vztahu.

Tento graf dosud není kompletní. Získali jsme pouze prázdné schéma shidoku, kterému však nyní chybí ještě čísla v buňkách. Čísla můžeme přiřadit příslušným vrcholům v grafu přímo. Každý vrchol si nese informaci, jaké má číslo. Výsledný graf vidíme na obrázku 3 a) spolu s vyznačenými vrcholy tak, jak odpovídají tabulce na obrázku 2.

V teorii grafů se však častěji uvádí úloha, ve které se vrcholům grafu přiřadí barvy tak, aby sousední objekty nebyly obarveny stejnou barvou. A vskutku, toto bychom mohli provést již v původní tabulce shidoku, kterou bychom mohli také řešit pomocí barev.

Když přiřadíme vrcholům grafu barvy, tak správné řešení shidoku musí splňovat, že žádné dva vrcholy propojené hranou nesmí mít stejnou barvu. Jedná se o úlohu, která je v teorii grafů poměrně běžná. Na obrázku 3 b) vidíme řešení úlohy 1.

Závěr: Uvedený graf shidoku lze použít jako motivační příklad při probírání teorie grafů. K ručnímu řešení se nám tato úloha nezdá vhodná, neboť i v poměrně malé 4×4 variantě



Obrázek 3: a) Červeně vyznačený šestnáctiúhelník jehož očíslované vrcholy odpovídají buňkám tabulky shidoku. Číslování odpovídá obrázku 2. Hrany zde reprezentují, že buňky odpovídající propojeným vrcholům nemohou obsahovat stejné číslo. b) Řešení úlohy 1, kde každé číslo v tabulce odpovídá jedné barvě. Propojené vrcholy neobsahují stejnou barvu.

shidoku je v uvedeném grafu mnoho nepřehledných hran. Je také možné, že tento nedostatek by se odstranil vhodnějším grafickým znázorněním než které je použito na obrázku 3. Přesto lze tuto úlohu využít tam, kde se teorie grafů kombinuje s výukou počítačových algoritmů.

2.2 Obarvení hran

Shidoku lze reprezentovat jako graf dalšími způsoby. Další možností je popis pomocí bipartitního grafu. Jde o graf, kde množinu vrcholů rozdělíme na dvě části, přičemž z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholů druhé části a naopak. Pokud jde z každého vrcholu jedné části hrana do každého vrcholu druhé části, mluvíme o úplném bipartitním grafu.

Je jasné, že každá buňka tabulky má jednoznačně přidělené číslo řádku a číslo sloupce. Dalo by se tedy říci, že buňka tabulky tvoří jakési spojení mezi těmito čísly. V tomto smyslu lze vytvořit úplný bipartitní graf, který bude obsahovat:

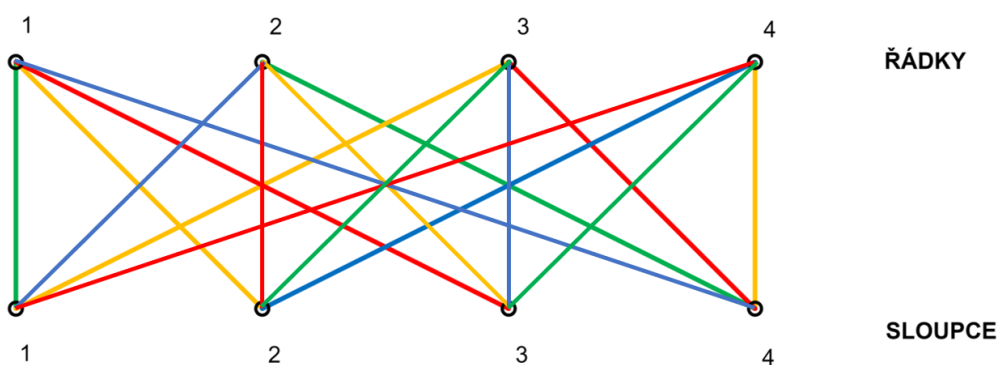
1. 8 vrcholů rozdělených do dvou tříd; vrcholy v jedné třídě budou reprezentovat čísla řádků (označme je $\check{R}1-4$) a zbývající vrcholy budou reprezentovat čísla sloupců (označme je $S1-4$),
2. $4 \cdot 4 = 16$ hran reprezentujících buňky tabulky, kde každý vrchol sloupce bude spojen s každým vrcholem řádku.

Takto popsaný graf nyní popisuje prázdné schéma shidoku. Hodnoty do grafu doplníme tak, že každé hraně přiřadíme právě jednu ze čtyř barev. Správné řešení shidoku pak musí splňovat následující podmínky:

1. z každého vrcholu vede právě jedna hrana od každé barvy,
2. hrany rozdělíme do 4 stejně velkých podskupin, kde každá z podskupin musí obsahovat hrany všech barev. Podskupiny musí reprezentovat vyznačené oblasti v tabulce. Příkladem jedné skupiny je $(S1, \check{R}3)$, $(S1, \check{R}4)$, $(S2, \check{R}3)$, $(S2, \check{R}4)$.

Řešení úlohy 1 pomocí tohoto grafu lze nalézt na obrázku 4.

Zatímco úloha obarvení vrcholů v předchozí podsekcí 2.1 je možná až příliš nepraktická na ruční řešení, tato forma zápisu shidoku je mnohem přehlednější. Z naší zkušenosti z festivalu Noc vědců 2023, kdy jsme úlohu prezentovali laické veřejnosti, víme, že úloha obarvení bipartitního



Obrázek 4: Úplný bipartitní graf, kde horní 4 vrcholy reprezentují čísla řádků a dolní 4 vrcholy čísla sloupců. Každá hrana zde reprezentuje jednu buňku tabulky. Barvy jsou hranám přiřazeny podle toho, jaká hodnota je do buňky vepsána. Uvedený graf odpovídá řešení shidoku 1.

grafu je s dopomocí zvládnutelná i pro člověka bez hlubších matematických znalostí. Přesto je však potřeba říci, že klasická 9×9 varianta sudoku by i v této podobě byla nejspíše řešitelná jen ve speciálních případech.

Závěr: Uvedený graf shidoku lze použít jako motivační příklad při probírání teorie grafů, ale také jako zajímavý příklad na cvičeních z matematiky. Klasickou 9×9 variantu sudoku lze také použít při výuce kombinované spolu s výukou algoritmů řešených na počítači. Vzhledem k relativní jednoduchosti a možnosti využití barev lze úlohu použít i u mladších studentů například při propagaci matematiky.

3 Soustava rovnic

S řešením soustav dvou rovnic o dvou neznámých se studenti mnohdy setkávají již na základní škole. Se složitějšími soustavami rovnic, a to převážně se soustavami lineárních rovnic, se žáci seznamují na střední škole. My se nyní zaměříme na řešení shidoku právě pomocí soustav lineárních rovnic. Tento způsob řešení sudoku spočívá v přepisu každé buňky tabulky na celočíselnou proměnnou v soustavě lineárních rovnic. Následující sekce přináší popis několika takových soustav. Další pak lze nalézt v nedávno publikovaném článku [6].

3.1 Diofantický systém

Nejprve přiřadíme každé buňce tabulky shidoku jednu celočíselnou proměnnou. Pravidla, která musí shidoku splňovat pak budeme reprezentovat pomocí rovnic. Získáme tak soustavu polynomiálních rovnic, jejíž všechny koeficienty a řešení jsou celá čísla. Takovou soustavu označujeme jako diofantický systém a jeho řešení bude reprezentovat vyřešené shidoku.

Jak už jsme uvedli, shidoku se skládá z 16 buněk, a pro každou buňku uvažujeme jednu proměnnou x_k , $k \in \{1, \dots, 16\}$. Toto propojení můžeme realizovat například přiřazením buněk $(i, j) \mapsto x_{j+4(i-1)}$, $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, při kterém projdeme buňky postupně po řádcích, počínaje levým horním rohem.

Shidoku nyní musí splňovat několik pravidel:

1. Každá buňka může obsahovat pouze čísla 1 až 4. Tento požadavek můžeme vyjádřit pro

každé k jako rovnici

$$\prod_{l=1}^4 (x_k - l) = 0.$$

Pokud by však již byla v některé buňce hodnota α zadána, pak stačí specifikovat pro příslušné k pouze rovnici $x_k = \alpha$.

2. V každém řádku se musí každá z hodnot 1 až 4 objevit právě jednou. Inspirujeme se u magických čtverců, kde víme, že součet hodnot ve všech řádcích (i sloupcích) musí být pokaždé stejný, tedy budeme požadovat, aby pro každý řádek i platilo

$$\sum_{l=0}^3 x_{i+l} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10. \quad (1)$$

Tato rovnice však sama o sobě nestačí, protože stejný součet by měl i řádek, který by obsahoval čísla 2, 2, 3, 3. Aby se vyskytlo každé z uvedených čísel v řádku opravdu právě jednou, tak je potřeba přidat dodatečnou podmínku také na součin přes řádek, a to

$$\prod_{l=0}^3 x_{i+l} = 4! = 24. \quad (2)$$

Nyní si snadno rozmyslíme, že variací s opakováním čísel 1 až 4, které řeší rovnici (2) není mnoho. Jsou to čtveřice 1, 2, 3, 4 a 2, 2, 2, 3. Přitom ale čtveřice 2, 2, 2, 3 nesplňuje rovnici (1). Proto rovnice (1), (2) skutečně zaručují, že se každá z hodnot 1 až 4 vyskytne v řádku právě jednou.

3. V každém sloupci i v každé z vyznačených oblastí tabulky se musí každá z hodnot 1 až 4 objevit právě jednou. Tento požadavek zapíšeme podmínkami analogickými k rovnicím (1) a (2). Pouze upravíme rozsah proměnných v součinu a v sumě.

Zadání úlohy 1 lze nyní popsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{array}{cccc} \prod_{l=1}^4 (x_1 - l) = 0 & x_2 = 3 & \prod_{l=1}^4 (x_3 - l) = 0 & \prod_{l=1}^4 (x_4 - l) = 0 \\ x_5 = 1 & \prod_{l=1}^4 (x_6 - l) = 0 & \prod_{l=1}^4 (x_7 - l) = 0 & x_8 = 4 \\ x_9 = 3 & \prod_{l=1}^4 (x_{10} - l) = 0 & \prod_{l=1}^4 (x_{11} - l) = 0 & x_{12} = 2 \\ \prod_{l=1}^4 (x_{13} - l) = 0 & x_{14} = 4 & \prod_{l=1}^4 (x_{15} - l) = 0 & \prod_{l=1}^4 (x_{16} - l) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \sum_{l=0}^3 x_{1+l} = 10 & \sum_{l=0}^3 x_{5+l} = 10 & \sum_{l=0}^3 x_{9+l} = 10 & \sum_{l=0}^3 x_{13+l} = 10 \\ \prod_{l=0}^3 x_{1+l} = 24 & \prod_{l=0}^3 x_{5+l} = 24 & \prod_{l=0}^3 x_{9+l} = 24 & \prod_{l=0}^3 x_{13+l} = 24 \\ \sum_{l=0}^3 x_{1+4l} = 10 & \sum_{l=0}^3 x_{2+4l} = 10 & \sum_{l=0}^3 x_{3+4l} = 10 & \sum_{l=0}^3 x_{4+4l} = 10 \\ \prod_{l=0}^3 x_{1+4l} = 24 & \prod_{l=0}^3 x_{2+4l} = 24 & \prod_{l=0}^3 x_{3+4l} = 24 & \prod_{l=0}^3 x_{4+4l} = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^1 x_{l+4m} = 10 & \sum_{l=3}^4 \sum_{m=0}^1 x_{l+4m} = 10 \\
 \sum_{l=9}^{10} \sum_{m=0}^1 x_{l+4m} = 10 & \sum_{l=11}^{12} \sum_{m=0}^1 x_{l+4m} = 10 \\
 \prod_{l=1}^2 \prod_{m=0}^1 x_{l+4m} = 24 & \prod_{l=3}^4 \prod_{m=0}^1 x_{l+4m} = 24 \\
 \prod_{l=9}^{10} \prod_{m=0}^1 x_{l+4m} = 24 & \prod_{l=11}^{12} \prod_{m=0}^1 x_{l+4m} = 24
 \end{array}$$

Poznamenejme, že zobecnění rovnic (1) a (2) by pro klasickou 9×9 variantu sudoku nefungovalo. A to proto, že kombinace 1, 2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9 by byla dalším řešením rovnic analogických k (1) a (2). Tuto situaci lze však obejít drobnou úpravou rovnic (1) a (2), viz [1].

Dále si položíme otázku, zda lze obě rovnice (1) a (2), vyžadované pro každý řádek, sloupec a oblast, zredukovat pouze na jednu rovnici. Toho bychom mohli dosáhnout například tak, že bychom do shidoku nedoplňovali čísla 1 až 4, ale místo nich první čtyři prvočísla, tj. hodnoty 2, 3, 5, 7. Rovnici $\prod_{l=1}^4 (x_k - l) = 0$ bychom tak pro každou buňku zapsali jako $(\tilde{x}_k - 2)(\tilde{x}_k - 3)(\tilde{x}_k - 5)(\tilde{x}_k - 7) = 0$ a rovnice (1), (2) bychom nahradili rovnicí $\prod_{l=0}^3 \tilde{x}_{i+l} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Závěr: Uvedené soustavy lze použít jako motivační příklad při výuce rovnic. I zde se uvedené soustavy nehodí k ručnímu řešení, ale spíše k procvičování algoritmů na počítači. Mimo jiné tak lze soustavu použít například při probírání Gröbnerových bází.

3.2 Soustava rovnic pomocí binárních proměnných

V následující části nalezneme jistý „lineární“ systém, který lze ztotožnit se shidokem. I nyní budeme uvažovat systém diofantických rovnic, ale tentokrát se zaměříme na jeho specifickou verzi. Zaměříme se na úlohu, která se někdy nazývá jako binární a spadá do oblasti optimalizace [12], přitom na ni jistě lze narazit i jinde. V binární úloze mohou proměnné nabývat pouze hodnot 0 nebo 1.

V předchozí podsekcí 3.1 jsme každé buňce (i, j) přiřadili jednu proměnnou x_k . Oproti tomu budou nyní každé buňce (i, j) tabulky přiřazeny čtyři proměnné. Pro každou buňku (i, j) budeme mít $y_{i,j,l}$, kde $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, které nabývají pouze hodnot 0 nebo 1. Přitom proměnná $y_{i,j,l}$ bude nabývat hodnoty 1 tehdy a jen tehdy, pokud se v buňce (i, j) nachází hodnota l . Existuje tak přímo vztah mezi proměnnou x_k z předchozí podsekcce 3.1 a proměnnými $y_{i,j,l}$, a to

$$x_k = \sum_{l=1}^4 l \cdot y_{i,j,l}.$$

Nyní jsme buňkám přiřadili proměnné. Zbývá nám zavést systém rovnic, jehož řešení bude totožné s řešením shidoku.

1. V buňce se může nacházet pouze jedno číslo, proto pro každé (i, j) musí platit rovnice

$$\sum_{l=1}^4 y_{i,j,l} = 1,$$

kteřá spolu s podmínkou, že proměnné nabývají pouze hodnot 0 a 1 zaručí, že pouze pro jedno $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ je $y_{i,j,l} = 1$.

2. V každém řádku a sloupci tabulky může být každé číslo pouze jedenkrát. Dostaneme rovnice

$$\sum_{i=1}^4 y_{i,j,l} = 1, \text{ pro } \forall j, l \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\sum_{j=1}^4 y_{i,j,l} = 1, \text{ pro } \forall i, l \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

3. Nakonec zbývá specifikovat požadavek, aby se ve vyznačených částech tabulky vyskytlo každé číslo právě jednou. Toho dosáhneme pomocí rovnic

$$\sum_{i=A}^{A+1} \sum_{j=B}^{B+1} y_{i,j,l} = 1, \text{ pro } \forall l \in \{1, 2, 3, 4\},$$

kde $A, B \in \{1, 3\}$. Konstanty A a B mají následující význam. Je-li např. $A = 3$ a $B = 1$, pak v předešlé sumě sčítáme členy odpovídající levé ($B = 1$) a dolní $A = 3$ části tabulky.

Uvedený systém obsahuje celkem $4 \times 4 \times 4 = 64$ binárních proměnných. Proměnné lze reprezentovat pomocí „třírozměrné“ matice, která obsahuje pouze čísla 0 a 1. Tato matice smí obsahovat hodnotu 1 právě jednou v každém:

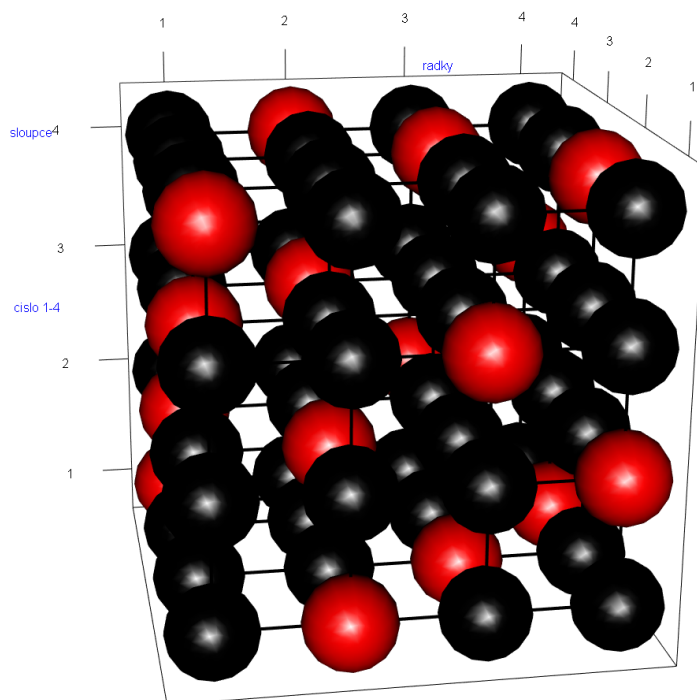
1. řádku,
2. sloupci,
3. hloubce (tj. ve směru kolmém na řádky i sloupce),
4. v podmaticích, které odpovídají vyznačeným částem tabulky shidoku pro každou z možných hloubek.

K uvedeným rovnicím musíme ještě přidat počáteční podmínky. Víme-li například, že se v buňce (i, j) nachází číslo l , pak položíme $y_{i,j,l} = 1$.

Úlohu shidoku nyní můžeme vnímat jako úkol obarvit předměty (například kostky, kuličky apod.) poskládané do třírozměrné tabulky pomocí dvou barev. Barvy budou reprezentovat hodnoty proměnných. Hodnota 0 může být například černá barva a hodnota 1 například červená barva. Dále požadujeme, aby předměty obarvené červenou barvou „sousedily“ (to kdybychom řekli, že spolu sousedí vždy, pokud jsou ve stejném řádku, sloupci, hloubce nebo vyznačené oblasti) pouze s předměty černé barvy. Správně vyřešené shidoku pak navíc musí obsahovat právě 16 červených a 48 černých předmětů. Situace je vizualizována v obrázku 5.

Binární úloha je zkoumána v oblasti celočíselného programování, ve které hledáme přípustné body (tj. řešení diofantické soustavy rovnic a nerovnic) a mezi nimi takový bod, jehož funkční hodnota optimalizované funkce je nejmenší/největší. V shidoku hledáme pouze přípustný bod a chceme, aby byl jediný. Přitom nemáme žádnou funkci, jejíž hodnotu bychom optimalizovali. Tyto rozdíly nám ale nezabraňují využít algoritmy optimalizace i k řešení shidoku a klasického 9×9 sudoku, viz [8], [4].

Zmiňme také, že úlohu shidoku řešenou pomocí barevných kostiček reprezentujících binární proměnné jsme zadávali na festivalu Noc vědců 2023 návštěvníkům Univerzity obrany. Z naší



Obrázek 5: Třírozměrná matice reprezentující řešení shidoku 1 pomocí obarvených koulí reprezentujících proměnné $y_{i,j,l}$. Černá barva reprezentuje na dané pozici, že je proměnná $y_{i,j,l} = 0$, červená pak $y_{i,j,l} = 1$.

zkušenosti je takto zadaná úloha příliš abstraktní, aby bylo možné ji v krátké době vysvětlit laickému publiku.

Závěr: Uvedená soustava může být využita jako motivační příklad při výuce rovnic. Jako praktický příklad ji lze použít při probírání teorie optimalizace, kde ji lze využít k procvičení tvorby soustavy [4].

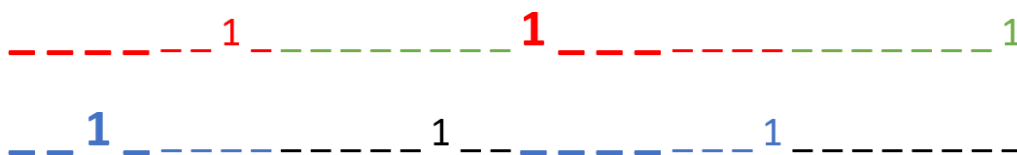
4 Další zajímavé příklady, kde lze nalézt sudoku

4.1 Binární číslo

V předchozí části jsme ukázali, jak lze reprezentovat shidoku pomocí soustavy rovnic s binárními proměnnými. Všimněme si nyní, že pomocí uvažované binární úlohy můžeme řešení shidoku reprezentovat také jako binární zápis čísla. Například tak, že bychom proměnnou $y_{i,j,k}$ ztotožnili s $64 - [k + 4(j - 1) + 16(i - 1)]$ -tou pozicí binárního čísla. To znamená, že třírozměrnou tabulku shidoku procházíme postupně přes hloubky, řádky a nakonec i přes sloupce, a na příslušnou pozici binárního čísla umístíme hodnotu proměnné $y_{i,j,k}$. Řešení úlohy zobrazené na obrázku 5 bychom pak mohli popsat jako číslo v binárním zápisu

$$0001001001001000100001000010000100101000000101000100000110000010_2.$$

Což je pak v desítkovém zápisu rovno 9440758856037836800_{10} . Takto popíšeme již vyřešené shidoku. Kdybychom jej však chtěli zadat jako úlohu k vyřešení, pak můžeme vytvořit částečně předvyplněné binární číslo, jehož pozice je třeba doplnit pomocí předepsaných pravidel. Tato



Obrázek 6: Binární zápis čísla reprezentující úlohu shidoku. Doplněná čísla odpovídající předvyplněným hodnotám tabulky. První čtyři pozice zleva odpovídají buňce v levém horním rohu tabulky. Každé 4 další pozice odpovídají další buňce, kde tabulku procházíme postupně po řádcích. Pozice vyznačené stejnou barvou odpovídají vždy jednomu kvadrantu tabulky shidoku. Tučně zvýrazněné pozice odpovídají prvnímu sloupci.

podoba je naznačena na obrázku 6, kde je číslo kvůli jeho velké délce rozděleno na dva řádky. Vyznačené jedničky zde odpovídají zadaným předvyplněným hodnotám.

Uvedené číslo musí splňovat několik pravidel a to:

1. Pozice vyznačené stejnou barvou musí obsahovat právě čtyřikrát číslo 1,
2. Šestnáct pozic vedle sebe odpovídajících dvěma barvám musí vždy obsahovat právě čtyřikrát číslo 1,
3. Šestnáct pozic odpovídajících sloupcům tabulky musí vždy obsahovat právě čtyřikrát číslo 1. Není jednoduché slovně popsat, o které pozice se jedná. Prvnímu sloupci však odpovídají pozice 1 až 4 počítáno zleva, dalších 12 pozic (pozice 5 až 16) patří jiným sloupcům a pozice 17 až 20 zase patří prvnímu sloupci. Takto pokračujeme s mezerami o 12 pozicích dokud nezískáme všech 16 pozic prvního sloupce. Viz také obrázek 6 s tučně vyznačenými pozicemi prvního sloupce.

Závěr: Tato úloha může být motivační při probírání čísel v různých číselných soustavách. Příklad lze tak uvést například při převádění čísel mezi různými číselnými soustavami. Je však potřeba zmínit, že samotné vysvětlení propojení čísla a shidoku zabere nemalé množství času.

4.2 Řešení soustavy diferenciálních rovnic

Nakonec uvedme ještě následující úlohu, která sama o sobě nesouvisí se shidoku, ale může sloužit jako zajímavý příklad kombinující dohromady shidoku s úlohami diferenciálních rovnic.

Zadání: Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = A_1y_1 + B_1y_2 + C_1y_3 + D_1y_4 + 1$$

$$y_2' = A_2y_1 + B_2y_2 + C_2y_3 + D_2y_4$$

$$y_3' = A_3y_1 + B_3y_2 + C_3y_3 + D_3y_4$$

$$y_4' = A_4y_1 + B_4y_2 + C_4y_3 + D_4y_4,$$

pokud víte, že:

1. partikulární řešení soustavy tvoří funkce

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= \frac{5}{12}x^2, \\ y_2(x) &= -\frac{5}{12}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{11}{30}, \\ y_3(x) &= -\frac{5}{12}x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6}, \\ y_4(x) &= \frac{5}{12}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{13}{30} \end{aligned} \right\},$$

2. koeficienty $A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$, udávají řešení shidoku, pokud je poskládáme do tabulky tak, jak vystupují v soustavě.

Řešení: Koeficienty A_i, B_i, C_i, D_i , následně určíme postupným dosazením partikulárního řešení do rovnic soustavy. Dosadíme-li do rovnice $y_1' = A_1y_1 + B_1y_2 + C_1y_3 + D_1y_4 + 1$, pak porovnáním levé a pravé strany dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{11}{30}B_1 - \frac{1}{6}C_1 + \frac{13}{30}D_1 + 1 \\ \frac{5}{6} &= \frac{B_1}{2} - \frac{C_1}{6} - \frac{D_1}{3} \\ 0 &= \frac{5}{12}A_1 - \frac{5}{12}B_1 - \frac{5}{12}C_1 + \frac{5}{12}D_1, \end{aligned}$$

což po úpravě dává

$$\begin{aligned} 0 &= -11B_1 - 5C_1 + 13D_1 + 30 \\ 5 &= 3B_1 - C_1 - 2D_1 \\ 0 &= A_1 - B_1 - C_1 + D_1. \end{aligned}$$

Nyní se pokusíme tuto soustavu vyřešit, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 &= 3B_1 - 2D_1 - 5, \\ A_1 &= 4B_1 - 3D_1 - 5, \\ 26B_1 &= 23D_1 + 55. \end{aligned}$$

U poslední rovnice nyní dostaneme, že

$$B_1 = D_1 - \frac{3}{26}D_1 + \frac{55}{26},$$

kde víme, že B_1 a D_1 jsou dvě různá celá čísla od 1 do 4. Výraz

$$-\frac{3}{26}D_1 + \frac{55}{26}$$

tedy musí udávat celé číslo a z možných voleb nám vychází, že nutně musí platit $D_1 = 1$ a $B_1 = 3$. Následně určíme $A_1 = 4$, $C_1 = 2$.

Obdobně postupujeme také u rovnice $y'_2 = A_2y_1 + B_2y_2 + C_2y_3 + D_2y_4$ do které když dosadíme, tak dostaneme po porovnání levé a pravé strany soustavu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= -\frac{11}{30}B_2 - \frac{1}{6}C_2 + \frac{13}{30}D_2 + 1 \\ -\frac{5}{6} &= \frac{B_2}{2} - \frac{C_2}{6} - \frac{D_2}{3} \\ 0 &= \frac{5}{12}A_2 - \frac{5}{12}B_2 - \frac{5}{12}C_2 + \frac{5}{12}D_2, \end{aligned}$$

Úpravou zde opět dostáváme, že

$$B_2 = D_2 - \frac{3D_2 + 40}{26},$$

což znamená, že pokud mají být B_2 a D_2 různá celá čísla od 1 do 4, tak musí platit, že

$$\frac{3D_2 + 40}{26}$$

je celé číslo a tedy $D_2 = 4$ a $B_2 = 2$. Z čehož pak určíme, že $A_2 = 1$, $C_2 = 3$.

K určení zbývajících koeficientů můžeme použít pozorování, že po dosazení do rovnice $y'_3 = A_3y_1 + B_3y_2 + C_3y_3 + D_3y_4$ musíme znovu dostat rovnici

$$-5 = 3B_3 - C_3 - 2D_3.$$

Přitom pokud doplníme již známé hodnoty do tabulky shidoku tak zjistíme, že $B_3 \in \{1, 4\}$, $C_3 \in \{1, 4\}$ a $D_3 \in \{2, 3\}$. Protože ale B_3, C_3 nemohou být stejné, pak nutně máme jen 4 možnosti, jak může rovnice $-5 = 3B_3 - C_3 - 2D_3$ dopadnout a to:

$$\begin{aligned} -5 &= 3 - 4 - 4, \\ -5 &= 12 - 1 - 4, \\ -5 &= 3 - 4 - 6, \\ -5 &= 12 - 1 - 6. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic je jediná správná, a to ta první, z čehož dostaneme $B_3 = 1$, $C_3 = 4$, $D_3 = 2$, a následně můžeme zbytek soustavy dořešit jako shidoku. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y'_1 &= 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 1 \\ y'_2 &= y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \\ y'_3 &= 3y_1 + y_2 + 4y_3 + 2y_4 \\ y'_4 &= 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 3y_4. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme tuto soustavu vyřešit pomocí obvyklých nástrojů matematické analýzy spolu

s informací, že již známe partikulární řešení. Dostaneme tedy výsledek jako

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= \frac{e^{10x}C_1}{100} + \frac{e^{3x}C_2}{9} + C_3x + C_4 + \frac{5x^2}{12}, \\ y_2(x) &= \frac{e^{10x}C_1}{100} - \frac{e^{3x}C_2}{9} + \frac{3C_3}{5} - C_3x - C_4 - \frac{5}{12}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{11}{30}, \\ y_3(x) &= \frac{e^{10x}C_1}{100} + \frac{2e^{3x}C_2}{9} - \frac{C_3}{5} - C_3x - C_4 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6}, \\ y_4(x) &= \frac{e^{10x}C_1}{100} - \frac{2e^{3x}C_2}{9} - \frac{2C_3}{5} + C_3x + C_4 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{13}{30} \end{aligned} \right\}.$$

Závěr: Úloha může sloužit jako zajímavý příklad kombinující teorii diferenciálních rovnic spolu se shidoku, čímž může doplnit obvyklé příklady na cvičeních nebo domácí úlohy.

Závěr

Sudoku lze využít jako motivaci při výuce teorie grafů, dá se také zkoumat spojení mezi sudoku, teorií grafů a polynomy. Lze ho formulovat jako soustavu rovnic, což může být užitečné při výuce lineární algebry a řešení rovnic. Studenti se mohou naučit, jak reprezentovat problém pomocí rovnic a jak je řešit. Je možné ho využít při řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Řešení konkrétního sudoku lze ztotožnit se zápisem binárního čísla. sudoku je možné použít k ilustraci základních principů teorie množin. Každý řádek, sloupec a oblast 3×3 lze chápat jako množinu, která musí obsahovat čísla od 1 do 9 bez opakování. Sudoku je příkladem kombinatorického problému, kde studenti mohou zkoumat různé permutace a kombinace čísel. To může být užitečné při výuce základů kombinatoriky a pravděpodobnosti. Může být součástí různých informatických úloh, které rozvíjejí informatické myšlení a digitální kompetence. Například kódování slov a obrázků. Další motivační úlohy a fakta týkající se sudoku lze nalézt např. v knize [10] nebo také v článku [7].

Poděkování

Tento příspěvek vznikl s podporou projektu DZRO Vojenské autonomní a robotické systémy.

Reference

- [1] ARNOLD, E., LUCAS, S., TAALMAN, L. 2010. Gröbner basis representations of Sudoku. *College Mathematics Journal*.
- [2] BELLOS, A. 2015. Alexova dobrodružství v zemi čísel, Dokořán, ISBN: 978-80-7363-534-3.
- [3] BERÁNKOVÁ E. 2024. Aplikační úlohy na využití exponenciálních funkcí, Sborník z 29. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, ISBN 978-80-248-4745-0.
- [4] BYNUM, M. L. et al. 2021. Pyomo – optimization modeling in Python. 3rd edition. Cham: Springer. ISBN 978-3-030-68927-8.

- [5] CHLÁDEK, P., SMETANOVÁ, D. 2024. Aplikované úlohy v základním kurzu matematiky, Sborník z 29. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, ISBN 978-80-248-4745-0.
- [6] JEKL, Jan. Sudoku pohledem matematiky: Odmocnina z jedné a soustava rovnic. ROZHLEDY matematicko-fyzikální, 2024, 99(2), 6-11. ISSN 0035-9343.
- [7] KATRNOŠKA, F., KRÍŽEK, M., SOMER, L. 2008. Magické čtverce a sudoku, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*.
- [8] Solve Sudoku Puzzles via Integer Programming: Problem-Based. Citováno 24.2.2025. mathworks.com/help/optim/ug/sudoku-puzzles-problem-based.html.
- [9] RABASOVÁ M. 2024. Zajímavé úlohy z pravděpodobnosti, Sborník z 29. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, ISBN 978-80-248-4745-0.
- [10] ROSENHOUSE, J., TAALMAN, L. 2011. Taking Sudoku seriously. ISBN 978-0-19-975656-8.
- [11] WIKIPÉDIA. Citováno 9. 3. 2025. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Sudoku>
- [12] ZEMÁNEK, P. 2021. Optimalizace aneb když méně je více. <http://www.math.muni.cz/~zemanekp/Optimalizace/Optimalizace.pdf>

ŠKÁLOVATELNOST METODY DISKRÉTNÍCH PRVKŮ S MODELEM BBM

VARGA Radek, ČERMÁK Martin

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra matematiky,
Ludvíka Podéště 1875/17, 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail na hlavního autora: radek.varga@vsb.cz

Abstrakt: Příspěvek se zaměřuje na škálovatelnost výpočetní náročnosti metody diskretních prvků využívající kontaktní model založený na prutových spojích. Tato metoda bývá zpravidla řešena explicitně, zejména kvůli častým změnám v kontaktní struktuře. V některých typech úloh, například při simulaci trhlin ve stavebních konstrukcích, jsou však změny v systému výrazně menší. To otevírá možnost využití méně obvyklého přístupu s implicitním řešením založeným na Newmarkově metodě. Studie se zaměřuje na analýzu výpočetní náročnosti této varianty při různých velikostech modelu, a to jak z hlediska počtu, tak i velikosti elementů. Porovnávají jsou různé typy numerických řešičů, včetně běžného explicitního přístupu. Cílem je posoudit efektivitu jednotlivých metod se zachováním patřičné praktické přesnosti a identifikovat vhodné přístupy pro konkrétní fáze výpočtu.

Klíčová slova: metoda diskretních prvků, model prutových vazeb, numerická škálovatelnost

1 Úvod

Metoda diskretních prvků (DEM) [2] v kombinaci s kontaktním modelem založeným na prutových spojích (BBM) [1] představuje numerický nástroj vhodný pro modelování úloh na pomezí spojitého a diskretního chování. Materiál je v tomto přístupu reprezentován jednotlivými nedeformovatelnými elementy, které mezi sebou interagují prostřednictvím kontaktů.

Tato metodika je tradičně využívána zejména v oblasti modelování interakce mnoha těles, například u sypkých hmot. V těchto případech dochází k častým změnám v kontaktní struktuře a k obecně nepředvídatelnému chování systému, což vede k preferenci explicitních výpočetních přístupů. Většina existujících studií se proto zaměřuje právě na explicitní řešení.

Tento příspěvek se věnuje aplikaci metody na odlišný typ úloh, kde výchozí charakteristika odpovídá spojitému chování a diskretní odezva vzniká až v důsledku postupného porušování materiálu, například šířením trhlin. V takových případech je možné předpokládat více strukturovaný vývoj systému a menší rozsah změn v kontaktech, díky čemu je efektivně možno využít

implicitních metod [5].

V této práci je testována efektivita různých výpočetních přístupů, konkrétně porovnání explicitního řešení s implicitním, a to jak s využitím přímé, tak i iterativní metody řešení soustavy rovnic. Zvláštní pozornost je věnována případům, kde je možné opakovaně využít rozklad matice systému. Tato možnost může výrazně zvýšit výhodnost přímého řešení v jednotlivých časových krocích.

2 Teoretické pozadí DEM-BBM

Jak bylo zmíněno, problematika DEM je založena na pohybu jednotlivých částic. Tuto skutečnost lze vyjádřit jako soustavu diferenciálních rovnic:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t), \quad \text{pro } t > 0, \quad (1)$$

kde t je čas, \mathbf{u} je vektor posunů, \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{C} matice tlumení, \mathbf{f}^{int} vektor vnitřních sil a \mathbf{f}^{ext} vektor vnějších sil.

Hmotnostní matice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, kde n_d je počet stupňů volnosti v systému, je diagonální matice obsahující hmotnosti a momenty setrvačnosti jednotlivých elementů.

Vektor vnitřních sil $\mathbf{f}^{\text{int}} \in \mathbb{R}^{n_d}$ lze vyjádřit jako lokalizovaný součet příspěvků jednotlivých kontaktů. Ty zahrnují tzv. *bounded* kontakty (vázané spoje mezi sousedními elementy) a dále *unbounded* kontakty, které se aktivují pouze při dotyku elementů bez předchozí vazby.

Matice tlumení $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ je tvořena na základě Rayleighova [3] tlumení jako:

$$\mathbf{C} = \alpha_c \mathbf{M} + \beta_c \mathbf{K}, \quad (2)$$

kde α_c, β_c jsou součinitele Rayleighova tlumení a \mathbf{K} je matice tuhosti, která je vytvořena jako součet lokalizovaných příspěvků jednotlivých kontaktů v daném čase:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{L}_k \mathbf{T}_k \mathbf{K}_k \mathbf{T}_k^\top \mathbf{L}_k^\top, \quad (3)$$

kde N_k je celkový počet kontaktů, \mathbf{K}_k je lokální matice tuhosti kontaktu, \mathbf{T}_k je transformační matice z lokálních do globálních souřadnic a \mathbf{L}_k je lokalizační matice.

Systém je přesně určen počátečními a okrajovými podmínkami ve formě:

$$\dot{\mathbf{u}}(t=0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \quad (4)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

kde \mathbf{v}_0 je rychlost elementů v čase $t=0$, \mathbf{u}_0 je posun v čase $t=0$ a matice \mathbf{B} obsahuje rovnice okrajových podmínek.

3 Časová diskretizace a délka kroku

V této práci je pro časovou integraci využita Newmarkova metoda [4], která poskytuje jednotný rámec pro explicitní i implicitní numerické schéma. Tato metoda je definována soustavou rovnic ve tvaru:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\langle n+1 \rangle} - \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{\langle n+1 \rangle} = \dot{\mathbf{u}}_{\langle n \rangle} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{\langle n \rangle}, \quad (6)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\langle n+1 \rangle} - \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{\langle n+1 \rangle} = \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{\langle n \rangle} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle n \rangle}, \quad (7)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{\langle n+1 \rangle} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{\langle n+1 \rangle} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_{\langle n \rangle} = \mathbf{f}_{\langle n+1 \rangle}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\langle n \rangle}^{\text{int}}, \quad (8)$$

kde $\langle n \rangle$ označuje n -tý časový krok, β a γ jsou součinitele Newmarkova schématu a Δt je délka časového kroku.

Časový krok je závislý na typu zvolené metody, ale také omezen fyzikální podstatou řešeného problému. Základním omezením je maximální délka kroku pro explicitní metody ve tvaru:

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}, \quad (9)$$

kde ω_{max} je nejvyšší vlastní frekvence systému, vypočtená jako největší vlastní číslo matice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

Další omezení časového kroku vyplývá z fyzikálních požadavků, například z omezení maximální rychlosti elementů, aby nedocházelo k nezachycení kontaktů nebo ke skokovému nárůstu sil:

$$\frac{v_{\text{max}}}{r_{\text{min}}} \cdot \Delta t < \alpha_r, \quad (10)$$

kde v_{max} je nejvyšší rychlost v systému, r_{min} je poloměr nejmenšího elementu a α_r je maximální povolený relativní průnik elementů (např. v %).

Další omezení vyplývají z nelineárních jevů, jako je šíření trhlin nebo vznik nových kontaktů. V těchto případech je nutné krok dále zkrátit, aby se minimalizovalo porušení fyzikálních podmínek. Taková omezení se často projeví až v průběhu výpočtu a mohou vést k nutnosti návratu zpět v čase a opakování kroku s menší hodnotou Δt .

4 Numerické experimenty

V této části jsou porovnány různé varianty numerického řešení z hlediska výpočetní efektivity. Zkoumány jsou následující přístupy:

- Explicitní schéma,
- Implicitní přímé řešení pomocí operátoru \, prostředí v Matlab (tzv. *full solver*),
- Implicitní přímé řešení s využitím Choleského rozkladu,
- Implicitní iterativní řešení metodou sdružených gradientů (CG) bez předpodmínění,
- CG metoda s předpodmíněním pomocí *ichol*,
- CG metoda s předpodmíněním na základě Gersgorinových intervalů.

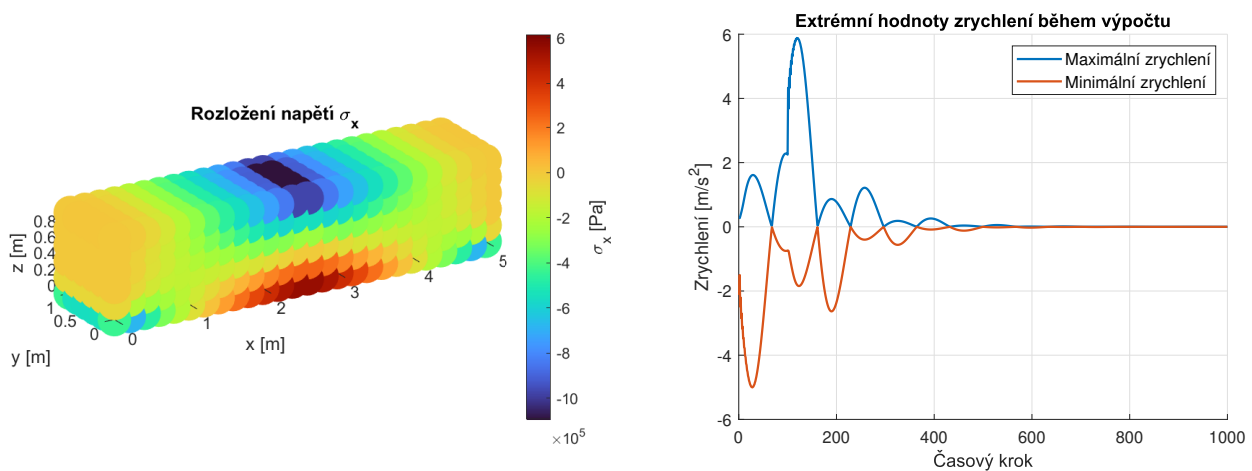
Hlavními sledovanými výstupy jsou:

- celkový výpočetní čas strávený v řešiči za celý průběh simulace,
- maximální čas trvání jedné iterace řešiče, s ohledem na scénáře, ve kterých není možné opakovaně využívat rozklad matice nebo předpodmínění.

Jako numerický model je zvolen kloubově uložený nosník s centrickým zatížením, které nepřesahuje kritickou mez pro vznik trhlin. Zatížení je aplikováno lineárně v čase až do $t = 0,01$ s, celková simulace probíhá do $t_{\max} = 0,1$ s. Pro explicitní schéma je použit časový krok odpovídající 20 % kritického kroku stability, pro implicitní metody je zvoleno $\Delta t = 10^{-4}$ s.

Úloha uvažuje malé deformace bez změn v topologii systému, a proto lze zanedbat změny v maticích \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} . Díky tomu je možné využít opakované použití rozkladů i předpodmínění v průběhu výpočtu.

Na obr. 1 je zobrazeno výsledné rozložení napětí σ_x v tělese. Na vedlejším obr. 2 je zachycen vývoj zrychlení v čase; je patrné, že délka simulace je dostatečná pro ustálení systému v rovnovážné poloze. Pro všechny provedené simulace je odchylka výsledků mezi metodami pod 1 %.



Obrázek 1: Výsledné napětí σ_x na modelovém nosníku.

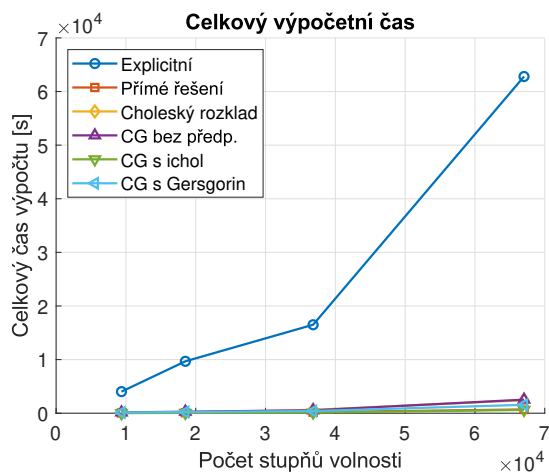
Obrázek 2: Vývoj a konvergence zrychlení během simulace.

Na obr. 3 je uvedeno porovnání celkového času všech metod v závislosti na velikosti úlohy. Explicitní metoda zde vykazuje výrazně vyšší náročnost, zejména pro větší modely, což odpovídá nutnosti použití velmi malého časového kroku.

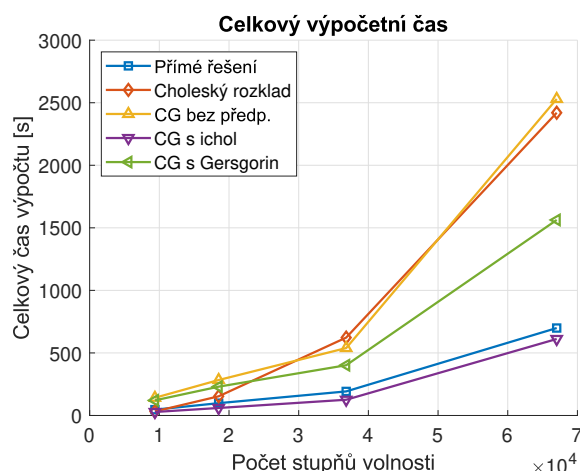
Pro lepší čitelnost je na obr. 4 uvedeno stejné srovnání bez explicitní metody. Nejlepšího výsledku z hlediska celkového výpočetního času dosahují dvě varianty – přímé řešení pomocí operátoru \backslash a metoda CG s předpodmíněním `ichol`. Ostatní varianty (Choleský rozklad, CG bez předpodmínění a CG s Gersgorinovými intervaly) vykazují s rostoucím rozměrem modelu výrazně vyšší nároky na čas.

Na obr. 5 je uvedeno porovnání výpočetního času potřebného k provedení jedné iterace řešiče, včetně případného výpočtu rozkladu či sestavení předpodmínění. Nejnižší čas zde vykazuje explicitní metoda, následována přímým řešením a opět metodou CG s `ichol`. Je však třeba zdůraznit, že nízký čas na jednu iteraci u explicitní varianty neznamená výhodu z hlediska celkové efektivity, jak je patrné z předchozích výsledků.

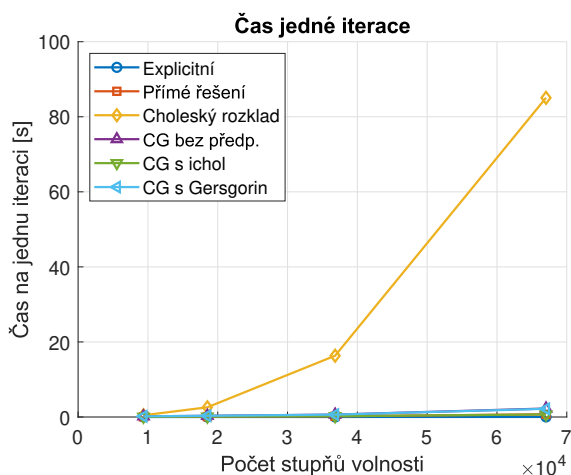
Na obr. 6 je pro větší přehlednost znázorněn tentýž graf bez zahrnutí varianty s Choleským rozkladem, která výrazně převyšovala ostatní řešiče v časové náročnosti jednoho kroku. Tento výřez umožňuje lépe porovnat ostatní metody. I zde se potvrzuje výhodnost přímého řešení a CG s `ichol`, zatímco předpodmínění pomocí Gersgorinových intervalů je ve všech případech pomalejší.



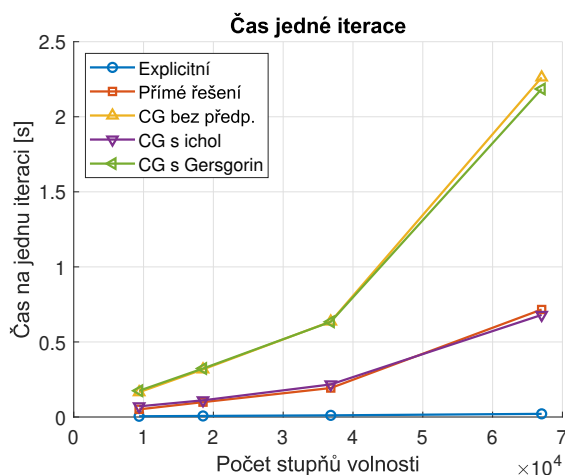
Obrázek 3: Celkový výpočetní čas jednotlivých testovaných metod v závislosti na velikosti úlohy.



Obrázek 4: Celkový výpočetní čas s vyřazením explicitní metody pro podrobnější znázornění.



Obrázek 5: Výpočetní čas jedné iterace včetně případné přípravy předpokládání a faktoriace.



Obrázek 6: Výpočetní čas jedné iterace s vyřazením Choleského rozkladu pro podrobnější znázornění.

Závěr

V rámci této studie bylo porovnáno několik metod pro výpočet soustavy rovnic vyplývající z formulace DEM-BBM. Příspěvek slouží jako výchozí analýza pro budoucí vývoj adaptivního řešiče, ve kterém bude volba numerické metody probíhat dynamicky v závislosti na konkrétním stavu řešené úlohy.

Pro zkoumané případy se jako nejvýhodnější ukázala přímá metoda založená na optimalizované knihovně v prostředí Matlab, která poskytla nejlepší poměr mezi výpočetní náročností a stabilitou. Tato výhoda však může být narušena při použití kratších časových kroků, které zlepšují podmíněnost soustavy a tím zvyšují efektivitu metod sdružených gradientů (CG).

Explicitní metoda, ačkoliv nevyniká v celkové efektivitě, dosahuje velmi nízké výpočetní náročnosti na jednu iteraci. Díky tomu může být výhodná v časově kritických fázích simulace,

například při vzniku trhlin nebo náhlém vytvoření nových kontaktů, kde jsou z fyzikálních důvodů vyžadovány velmi malé časové kroky.

Poděkování

Tato práce byla podpořena z prostředků Studentské grantové soutěže VŠB-TUO. Registrační číslo projektu je SP2025/089.

Reference

- [1] ANDRÉ, D., IORDANOFF, I., CHARLES, J.-L., NÉAUPORT, J., Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213, Elsevier, 2012, s. 113–125. DOI: 10.1016/j.cma.2011.12.002.
- [2] CUNDALL, P. A., A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems, In: *Proc. Int. Symposium on Rock Fracture*, 1971, s. 2–8.
- [3] LIU, W. K., GORMAN, D. J., Formulation of Rayleigh damping and its extensions, *Computers & Structures*, 57(2), 1995, s. 277–285. DOI: 10.1016/0045-7949(94)00611-6.
- [4] NEWMARK, N. M., A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3), 1959, s. 67–94. DOI: 10.1061/JMCEA3.0000098.
- [5] VARGA, R., ČERMÁK, M., Implicit and explicit Newmark method for discrete element method – beam bound model, *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Computational Structures Technology*, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 2024, Paper 10.2. DOI: 10.4203/ccc.9.10.2.

KOMPLEXNOST MOTIVAČNÍHO STYLU VÝUKY MATEMATICKÝCH PŘEDMĚTŮ NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH

CERMAN Zbyněk

Univerzita Tomáše Bati, Ústav matematiky, Nad Stráněmi 4511, 760 05, Zlín
e-mail na hlavního autora: cerman@utb.cz

Abstrakt: Otázku, kterou si jistě pokládá každý pedagog na vysoké škole je, jak co nejvíce zaujmout a motivovat své studenty. Jenže ne vždy se onen přístup povede. Navíc, výuka „zajímavějších“ předmětů je o poznání jednodušší, neboť se studenti pro danou látku nadchnou více, i s tím benefitem, že ji s největší pravděpodobností budou používat i nadále - nejen v průběhu studia, ale i po něm. Vrátime-li se ale k těm „méně šťastnějším“ předmětům, je třeba využít extra prostředky k tomu, abychom zájem i motivaci u studentů vyvolali. A právě matematiku bychom mohli zařadit na úplné dno této skupiny, což znamená, že patří k nejméně oblíbeným předmětům, čili učitelé matematiky mají tu nejtěžší úlohu, jak své studenty pro tento předmět nadchnout. Cílem tohoto článku je tedy ukázat jednu z možných a osvědčených cest k prolomení bariéry mezi matematikou a strachem ze strany studentů. Popíšeme si různé přístupy, jak zbavit studenty stresu, strachu a smutku z toho, že jim do cesty přišla matematika, i když (po zkušenostech ze střední) se s ní už nikdy v životě nechtěli setkat. Nicméně musíme podotknout, že jako každá učební metoda, tak ani tato není pro každého, neboť je založena především na přátelské atmosféře mezi vyučujícím a studenty, a také na nenásilném vedení.

Klíčová slova: antistresové prostředí, skupinová práce, bodový systém, nečekaná odměna

1 Antistresové prostředí

Předtím, než přistoupíme k samotné motivaci, je nutné se zaměřit na největšího zabijáka radosti a pozornosti u studentů. Tím není nic menšího než dobře známý stres a strach, ať už ve cvičeních či na přednáškách. Tímto se tedy dostáváme k prvnímu a nejdůležitějšímu bodu této učební metody, čímž je přátelské prostředí, kdy se studenti nesmí bát odpovídat na otázky na přednáškách a musíme je bez kritiky navádět ke správným odpovědím. Ve cvičeních je ovšem situace odlišná, neboť největším podporovatelem stresu je tabule. Vyvolávání k tabuli bylo a vždy bude u studentů probouzet paniku a hrůzu z toho, že se zesměšní před zbytkem třídy. Proto musíme hned v první řadě zapomenout na povinné chození k tabuli a nechat studenty,

ať se dobrovolně rozhodnou, zda chtějí či nechtějí využít tréninku u tabule.

Dobrovolnost by však sama o sobě nestačila, protože i tak by se studenti mohli cítit u tabule pod tlakem, že na ně všichni koukají. Přesně z tohoto důvodu tato metoda zakazuje vyvolávání k tabuli po jednom studentovi a naopak velmi podporuje práci ve skupinách. Abychom byli konkrétní, k tabuli chodí zásadně 3 studenti, kteří spolupracují na vyřešení daného příkladu.

Práce ve skupině má jednu obrovskou výhodu a tím je odpadnutí stresu, neboť všichni 3 studenti se soustředí čistě na sebe a na příklad a nevěnují pozornost tomu, co se děje za nimi. Navíc, jak už se praxí ukázalo, studenti tento styl chození k tabuli nazvali **PPP**, protože jeden student píše, druhý přemýšlí a třetí počítá.

2 Posílení motivace

S odpadnutím stresu se nyní můžeme konečně podívat na způsoby, jak nejlépe studenty motivovat, aby je matematika bavila a hlavně ji vnímali pozitivně i během semestru. Tím nejpřirozenějším přístupem je **bodový systém**. Většina zápočtových a zkuškových písemek je totiž hodnocena formou bodů a cílem studentů je samozřejmě pokořit onu minimální hranici zadanou vyučujícím. Pokud by tedy studenti dostali šanci, jak tyto body sbírat i v průběhu semestru a tím si ulehčit písemku, rázem by o jeden stupínek vzrostla jejich motivace.

Musíme si ovšem položit otázku, za co všechno mohou studenti získávat body během semestru. Jak už asi každý z nás očekává, odpověď není jednoznačná, neboť každý vyučující má svůj styl výuky a vždy lze body udělovat za něco jiného. Důležité ovšem je něco takového najít, aby studenti měli možnost body získávat. V následujících podkapitolách se podíváme na 4 potencionální případy zisku bodů, přičemž první tři bychom mohli zařadit do „obecné“ kategorie, kterou může využít většina vyučujících.

2.1 Aktivita ve cvičeních

Prvním případem je dobrovolná aktivita ve cvičeních, kdy studenti sami ze své vlastní vůle chodí k tabuli. Každou takovou dobrovolnou návštěvu můžeme ocenit libovolným počtem bodů v závislosti na samostatnosti, efektivitě či náročnosti příkladu. Pro zachování přátelského ducha by měl každý student ze skupiny dostat stejný počet bodů.

Na druhou stranu může ovšem nastat situace, kdy jsou studenti přemotivováni a k tabuli se hrnou za každé možné situace. Vědí totiž, že přátelské a antistresové prostředí je doplněno nápovědou ze strany učitele. Nikdy bychom neměli nechat studenty stát jen tak u tabule. Vždy je možné je nějak popostrčit, aby daný příklad zdárně vypočítali. Nicméně, i tak se mohou objevit studenti, kteří ani přes učitelovu radu netuší, jak dál postupovat, či nemají potřebné znalosti z přednášky. Pak je rozumné nepřípravené studenty posadit zpět do lavice (samozřejmě bez bodů) a vyzvat jinou skupinu studentů.

2.2 Aktivita na přednáškách

Dalším případem je zapojení studentů na přednáškách. „Klasická“ přednáška ve stylu dlouhého monologu přednášejícího může vést ke znudění studentů nebo k odmítnutí účasti na budoucích přednáškách. Pokud ale studenty zapojíme do výkladu, kupříkladu otázkami z probírané teorie, můžeme je tak udržet ve střehu. Ovšem je nutné upozornit, že studenty nevyvoláváme, ale necháváme je, ať se hlásí sami. V případě, že nikdo nebude znát správnou odpověď, tak body propadnou. Na druhou stranu, je opět pouze na nás, kolik bodů za správnou

odpověď na danou otázku udělíme. Komplikovanější otázky můžeme odměnit více body, popřípadě zvyšovat odměnu, pokud studenti dlouho odpovídají špatně, aby se do vyřešení problému zapojilo co největší množství studentů.

2.3 Vypracování dobrovolných domácích úkolů

Stejně jako v předchozích kapitolách, tak i zde je nutné se zaměřit na důležitost slova „dobrovolných“, neboť celá tato učební metoda je založena na tom, že studenty nesmíme do ničeho nutit. Veškeré získávání bodů během semestru je založeno na dobrovolné vůli studentů, tzn. že ti aktivnější budou mít o 3 měsíce později jednodušší zápočet i zkoušku.¹

Složitost domácích úkolů je už pak čistě v naší režii, kdy je otázkou, zda chceme, aby daný úkol vypracovala většina studentů, anebo jenom pár jednotlivců. Tato učební metoda počítá s druhou variantou, kdy se příklady zdají být na první pohled velmi složité, ale obvykle mají snadné či elegantní řešení. Tento krok pak donutí ty méně aktivní studenty úkoly ignorovat a ti pracovitější se naopak každým úkolem zlepšují. Aby byla pro studenty motivace o to větší, za domácí úkoly mohou získat nejvíce bodů ze všech 4 zmíněných kategorií. Opět se vše odvíjí od kvality domácího úkolu (počínaje správným postupem a výsledkem a konče protokolovou vizuální stránkou).

Navíc můžeme přidat ještě extra body za nízký počet domácích úkolů ze strany studentů. Pokud tedy nějaký domácí úkol vypočítá velmi malé procento studentů, pak můžeme udělit body navíc.

2.4 Opakovací testy

Jak už jsme si řekli dříve, tak poslední způsob pro získání bodů je velmi subjektivní, protože každý pedagog může mít své vlastní způsoby, za které bude udělovat body. Nicméně tato učební metoda využívá ověřování teoretických znalostí z přednášky, jelikož právě tyto znalosti jsou důležité pro úspěšné absolvování předmětu.²

Abychom byli konkrétnější, tak tato forma opakování využívá teoretické testy prostřednictvím systému Moodle, přičemž každému studentovi jsou po přednášce vygenerovány 3 náhodné otázky typu ABCD, které mohou být posléze použity i u samotné zkoušky.³ Je zřejmé, že následné ocenění může záviset nejen na složitosti otázek, ale i na jejich počtu (čím více otázek, tím hůře si mohou studenti napovídat).

V tuto chvíli již každý student ví, že pokud bude aktivně pracovat v průběhu semestru, tak bude mít jednodušší podmínky k získání zápočtu. Je samozřejmé, že jakmile student dosáhne požadované hranice pro zápočet, tak na konci semestru nemusí psát zápočtovou písemku, ale mají možnost si ji napsat. Okamžitá otázka je, proč by ji tedy měl psát? Odpověď je velmi snadná, neboť nadměrné množství bodů ovlivní i samotnou zkoušku. Jinými slovy, ti nejpilnější studenti si nejen zajistí hladký průběh zápočtové písemky (zápočet již mají, ale chtějí více bodů), ale nachystají si tím i dobré vstupní podmínky ke zkoušce. Je tedy možné nasbírat tolik bodů (včetně bodů ze zápočtové písemky), že student již bude mít zkoušku automaticky uznanou (výsledek hodnocení zkoušky závisí na počtu bodů).⁴

¹Povinné úkoly můžeme například použít tehdy, pokud jsou součástí zápočtu či zkoušky.

²Je ovšem možné ověřovat znalosti i ze cvičení.

³U zkoušky můžeme buď použít úplně stejné otázky, anebo zcela odlišné - jednodušší či složitější. Můžeme se například ptát jenom na základní pojmy (definice a věty).

⁴Tento krok může napomoci těm studentům, kteří nemají v oblíbené teorii a všechny potřebné body tak mohou získat jen a pouze samotným počítáním příkladů.

3 Nečekané odměny

Aby motivace ovšem nebylo málo, tak studenti v průběhu či na konci semestru mohou získat různé odměny za svou aktivitu a pracovitost, přičemž jim o nich nemusíme říci dopředu. Přeci jen moment překvapení je pro aktivnější studenty sladkou třešničkou na dortu. Navíc, kdyby o odměnách věděli studenti dopředu, mohli by toho velmi snadno zneužít. Proto je doporučeno každý rok odměny malinko měnit, aby si studenti nemohli zpětně dávat rady. Bonusem je pak pro pedagoga radost z očekávání, jak na jednotlivé odměny budou studenti reagovat. Nyní se tedy podíváme na několik možných odměn, v podobě bonusových bodů, které využívá popisovaná učební metoda:

1. Očividnou odměnou jsou body pro nejlepší studenty, konkrétně tedy například pro tři nejlepší studenty v ročníku na konci semestru v dané kategorii (aktivita ve cvičeních nebo na přednáškách, domácí úkoly a opakovací testy) nebo celkově.
2. Další odměnou jsou body za 100% docházku ve cvičeních nebo na přednáškách.
3. Pravidelné odevzdávání domácích úkolů či vyplňování opakovacích testů se též cení, tzn. můžeme udělit drobné body za to, když má student na konci semestru nadprůměrný počet vyřešených domácích úkolů či opakovacích testů.
4. Jedná se o speciální odměnu, kterou ovšem nelze vždy využít. Tato odměna počítá s tím, že daný předmět má více studijních kroužků studentů. Pak se totiž nabízí nechat kroužky studentů soupeřit mezi sebou. Je ovšem nutné podotknout, že tato „soutěž“ počítá s tím, že se studenti v daném kroužku vzájemně moc dobře znají a většinu předmětů mají společných.

Odměny samozřejmě nemusí mít podobu jen bonusových bodů. Je totiž zřejmé, že studenty můžeme odměnit jakkoliv za cokoli. Speciální odměnou tak může být například možnost skupinové zkoušky pro nadanější a pilnější studenty, anebo mít u sebe různé poznámky, ať už teoretické či praktické.

4 Konkrétní čísla pro předmět AUM/L1LMT - Matematika

Předmět AUM/L1LMT - Matematika je vyučován v zimním semestru na fakultě logistiky a krizového řízení Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a zahrnuje diferenciální a integrální počet funkce jedné reálné proměnné a úvod do lineární algebry. V zimním semestru 2024/2025 se předmětu zúčastnilo 68 studentů, kteří byli rozděleni do dvou studijních kroužků pro potřeby cvičení.

K udělení zápočtu je nutné získat alespoň 60 bodů ze zápočtové písemky - Příloha **A** (včetně bodů získaných během semestru) a mít maximálně 2 absence ve cvičeních. Přednášky jsou nepovinné, nýbrž doporučené, neboť docházka je sledována i zde. Pro získání zkoušky musí studenti odpovědět správně na 11 ze 20 teoretických otázek - Příloha **B**.⁵

⁵Zápočtová písemka **A** i zkuškový test **B** byly vygenerovány pomocí systému Moodle, přičemž pro zápočtovou písemku se využil modul STACK a pro zkuškový test se vybralo náhodně 20 otázek z 900 předpřipravených otázek.

4.1 Zisk bodů

- Návštěva u tabule: 1 až 4 body – v závislosti na obtížnosti příkladu a efektivitě či samostatnosti výpočtu, přičemž semestr má 14 týdnů.
- Správná odpověď na otázku: 1 až 3 body – v závislosti na obtížnosti otázky.
- Správně vypočítaný příklad z dobrovolného domácího úkolu: 1 až 5 bodů – v závislosti na detailním a kvalitním postupu, vzhledu a repetitivnosti, přičemž počet všech příkladů je 99.
- Vyřešení opakovacího testu: 0,15 až 0,9 bodů – bez závislosti na složitosti otázky (0,15 bodů je za pouhé vyplnění testu), přičemž počet všech témat je 13 a počet všech otázek je 900.

4.2 Odměny

- Tři studenti s nejvyšším skóre na konci semestru obdrží po řadě 9, 6 a 3 body, přičemž navíc obdrží ještě po řadě 6, 4 a 2 body za tři nejlepší místa v dané kategorii (cvičení, přednášky, domácí úkoly, Moodle testy). Vzhledem ke studijním kroužkům v daném předmětu je ještě navíc oceněný nejlepší student v daném kroužku 3 body, popřípadě stejným počtem bodů za nejlepší místo v dané kategorii.⁶
- Za 100% docházku na cvičení obdrží studenti 3 bonusové body a za přednášky obdrží 5 bonusových bodů. Pokud navíc byli studenti 100% v obou případech, pak je ještě čeká odměna v podobě 2 bodů. Celkem tak mohou získat až 10 bodů za docházku.⁷
- Koeficient odevzdanosti domácího úkolu činí 0,4, tzn. pokud student získá alespoň 1 bod z daného domácího úkolu, pak se mu automaticky přičte 0,4 bodu. Ve výsledku tedy může student získat $13 \cdot 0,4 = 5,2$ bonusových bodů jen za odevzdávání domácích úkolů.

Koeficient 100% správnosti opakovacího testu činí 0,3, tzn. pokud student odpoví na všechny 3 otázky správně, získá navíc 0,3 bodu. Dále, koeficient odevzdanosti opakovacího testu činí 0,2, tzn. pokud student vyplní opakovací test (i když by všechny otázky byly špatně), pak se mu automaticky přičte 0,2 bodu.⁸

Aby toho nebylo málo, tak studenti mají na konci semestru možnost si vyzkoušet zkoušku nanečisto, kdy jim Moodle vygeneruje náhodně 20 teoretických otázek. Tento test se též hodnotí, ale výsledný počet bodů je závislý nejen na počtu správných odpovědí, ale též i na pravidelném vyplňování opakovacích testů v průběhu semestru. Vzoreček pro výpočet je následující:

$$\frac{\text{Počet správných odpovědí} \cdot 0,3 \cdot (\text{Počet témat} + 1 - \text{Počet neodevzdaných testů})}{\text{Počet témat} + 1}$$

odkud máme zaručeno, že neaktivní studenti nemohou získat stejný počet bodů jako aktivní studenti. Pokud by tedy například student *X* celý semestr nic nedělal a z posledního testu získal plný počet bodů, tak nezíská žádný bod (protože výslednou hodnotu 0,43 zaokrouhlujeme dolů). Na opačné straně máme studenta *Y*, který celý semestr pravidelně

⁶O této odměně vědí studenti od začátku semestru.

⁷O této odměně se studenti dozví až na konci semestru.

⁸Tato odměna je tajná, nicméně bystrí studenti si ji mohou vypočítat z docházky.

vyplňoval opakovací testy a poslední závěrečný test napsal bez chyby. Pak jenom za tento test získá navíc 6 bodů.

- Skoro 100% účast na přednáškách (maximálně 3 absence) je odměněna předtermínem v podobě skupinové zkoušky, přičemž tento termín je pouze jeden a rozdělení do skupin je výhradně v roli vyučujícího (například podle počtu bodů, tzn. lepší studenti budou spolu ve skupině).
- „Souboj“ studijních kroužků se odvíjí od průměrného počtu bodů všech studentů z daného kroužku. Aby byla „soutěž“ spravedlivá, je doporučeno docházku pravidelně aktualizovat a ty studenty, kteří nechodí na cvičení, z docházky vymazat. Výsledné body jsou pak následující:
 - Všichni nadprůměrní studenti vítězného kroužku obdrží 5 bonusových bodů, ale všichni podprůměrní studenti obdrží „pouze“ 2 body.⁹
 - Všichni nadprůměrní studenti druhého kroužku obdrží 1 bonusový bod, ale všichni podprůměrní studenti neobdrží žádný bod.

4.3 Zápočet

Zápočtová písemka obsahuje 12 různě bodovaných příkladů podle složitosti v celkové výši 120 bodů, přičemž každý student na každém termínu dostane své vlastní zadání, protože vše se náhodně generuje pomocí systému Moodle a modulu STACK. Díky tomu se nabízí dvě možnosti, jak nechat studenty zápočtovou písemku absolvovat. Zprv, k termínu si donesou vlastní notebook či tablet a výsledky budou zapisovat přímo do systému Moodle, načež své výpočty napíšou na papír, který následně odevzdají zkoušejícímu. Zadruhé, veškerá „chytrá“ elektronika je zakázána a studenti vše píšou na papír, přičemž každý příklad je označen číslem zadání, podle kterého následně zkoušející může jednoduše najít správný výsledek.

Ještě můžeme dodat, že nedostatek času vede u studentů ke zvýšení stresu a chybovosti. Je proto doporučeno dát studentům tolik času, kolik potřebují. Kupříkladu, pro tento typ zápočtové písemky mají studenti k dispozici 4 hodiny čistého času, načež v průměru po 3 hodinách končí sami.

4.4 Zkouška

Zkouška je čistě teoretická a studenti musí na většinu ze 20 otázek typu ABCD odpovědět správně. Tentokrát je ovšem nastavený časový limit na 1 hodinu, protože odpovědět na 20 otázek zvládne průměrný student do půl hodiny a navíc se ukázalo, že pokud studenti moc dlouho přemýšlí nad danými otázkami, vede to k horším výsledkům.

Z předchozích odstavců již víme, že i zkoušku je možné si usnadnit v případě, že budou mít studenti před samotnou zkouškou více jak 100 bodů (včetně zápočtové písemky). Situace je pak následující:

- 110 bodů a více, student získá 1 bod ke zkoušce.
- 120 bodů a více, student získá 2 body ke zkoušce.
- 130 bodů a více, student získá 3 bod ke zkoušce, apod.

⁹Včetně průměrných. Nicméně průměr studentského kroužku může být desetinné číslo, avšak body studentů jsou celá čísla. Je tedy zřejmé, že průměrný student je spíše výjimkou.

- 210 bodů a více, student automaticky uspěl u zkoušky s hodnocením *E*. Má ovšem možnost si svou známku vylepšit.
- 290 bodů a více, student automaticky uspěl u zkoušky s hodnocením *A*.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že hranice 100 bodů zůstala nevyužita, neboť zde je prostor experimentovat s tím, jak studentům pomoci k úspěšnému splnění zkoušky. Počínaje možností okamžité opravy při neúspěšném splnění zkouškového testu a konče jakýmkoliv vlastnoručními teoretickými poznámkami.

4.5 Úspěšnost

Závěrem se můžeme podívat na studentské výsledky ze zimního semestru 2024/2025. Na začátku semestru se na předmět zapsalo 68 studentů, přičemž ale 10 z nich ukončilo studium během semestru. Ze zbylých 58 studentů úspěšně zvládlo zápočtovou písemku 41, kde deseti studentům se podařilo získat 60 a více bodů v průběhu semestru. Navíc, pět studentů pokořilo hranici 100 bodů.¹⁰ Zkoušku nezvládl pouze jeden student. Tím pádem, úspěšnost této učební metody je 70,69% v případě zápočtové písemky a 97,56% u zkoušky.¹¹ Na Obrázku 1 můžeme vidět několik vybraných studentů a jejich výsledky před zápočtovou písemkou.

Závěr

Metoda popsaná v tomto článku podporuje a zvýhodňuje nadanější, aktivnější a pilnější studenty. Naopak ty méně aktivní studenty motivuje k tomu, aby se během semestru i oni zapojili do výuky. V opačném případě buď budou muset zápočet i zkoušku zvládnout bez jakékoliv pomoci, anebo musí předmět opakovat příští rok ve snaze se tentokrát mnohem více projevovat a aktivně pracovat.

Na druhou stranu, jako každá jiná učební metoda, má i tato metoda jistě své negativní stránky. Například, není vůbec zaměřena pro ty typy studentů, kteří nejsou zvyklí pracovat samostatně (bez donucení). Tím, že je nikdo k ničemu nenutí, se v nich nemusí probudit ta stránka věci říkající, že to musí zvládnout, a přitom se může jednat o nadané, ale lenivé studenty. Dále by mohli být odstrčeni introvertní studenti, kteří se nechtějí zapojovat do skupinového řešení příkladů či hromadné konverzace na přednášce. Mají ovšem možnost pracovat doma na domácích úkolech či opakovacích testech. Je tedy možné tuto metodu ještě více zdokonalit tím, že je pro každého studenta možné najít takovou formu bodového ohodnocení, která mu bude vyhovovat.

¹⁰Nejvyšší počet bodů byl 163.

¹¹Podobné statistiky byly i v letním semestru 2023/2024, kde úspěšnost u zápočtů byla 75,54% u prezenčních studentů a 81,37% u kombinovaných studentů. Úspěšnost u zkoušky byla 87,95% u prezenčních studentů a 99,05% u kombinovaných studentů.

OSOBNÍ ČÍSLO	CVIČENÍ	PŘEDNÁŠKA	D. D. ÚKOLY	MOODLE	ODMĚNA	SKÓRE
L24432	25	3	42	15	35	<u>120</u>
L24386	19	16	5	17	15	<u>72</u>
L24402	15	4	26	9	17	<u>71</u>
L24385	23	25	2	1	16	<u>67</u>
L24388	11	18	5	16	15	<u>65</u>
L24749	24	19	0	5	10	58
L24406	17	3	7	15	15	57
L24433	20	0	8	14	10	52
L24434	10	3	1	19	15	48
L24425	16	0	4	14	8	42
L24750	14	10	0	12	5	41
L24393	6	0	7	18	8	39
L24397	14	3	4	11	4	36
L24404	19	7	1	4	1	32
L24391	2	1	2	18	9	32
L24392	9	2	1	15	1	28
L24438	14	0	0	9	5	28
L24428	10	0	0	11	5	26
L24794	4	0	0	15	5	24
L24387	9	0	1	13	0	23
L24414	21	0	0	2	0	23
L24430	8	4	0	8	3	23
L24421	1	3	3	13	0	20
L24746	5	2	3	2	5	17
L24416	15	0	0	0	2	17
L24440	8	0	0	5	3	16
L24412	2	0	1	8	5	16
L24405	9	0	1	1	0	11
L24426	1	0	0	5	0	6

Obrázek 1: Tabulka s bodovým hodnocením vybraných studentů před zápočty.



Úloha 1

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 5

Zadání: 177

[STACK question dashboard](#)

Určete definiční obor D_f funkce:

$$f(x) = \frac{\ln(9x + 54) + \sqrt{28 - 7x}}{x^2 - 2x - 15}$$

Výsledek:

$$D_f = (\square ; \square) \cup (\square ; \square)$$

Úloha 2

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 10

Zadání: 330

[STACK question dashboard](#)

Vypočítejte derivaci následující funkce pomocí pravidla pro derivaci součinu:

$$f(x) = \sin(2x^7) \cdot (2x)^3$$

Výsledek:

Upravená výsledná derivace odpovídá písmenu:

A)	$12x^2 \sin(2x^7) + 256x^3 \cos(2x^7)$	K)	$2 \cos(x^6) - 6x^2$
B)	$8x^2 \cos(14x^6)$	L)	$24 \sin(2x^7) + 16x^3 \cos(14x^6)$
C)	$14x^6 \sin(2x^7) - 24x^2$	M)	$2 \sin(x^6) + 6x^2$
D)	$24x^2 \sin(2x^7) + 112x^9 \cos(2x^7)$	N)	$14x^6 \cos(2x^7) + 24x^2$
E)	$112x^3 \sin(14x^6) - 12 \cos(2x^7)$	O)	$4x^2 \sin(x^6)$
F)	$28x^3 \cos(x) - x^2 \sin(x)$	P)	$12 \sin(14x^6)$
G)	$28x^3 \sin(x) + x^2 \cos(x)$	Q)	$4x^2 \cos(x^6)$
H)	$8x^2 \sin(14x^6)$	R)	$8x^3 \sin(2x^7) - 84x^2 \cos(2x^7)$
I)	$24x^2 \sin(7x^2) + 112x^9 \cos(7x^2)$	S)	$112x^9 \sin(2x^7) - 24x^2 \cos(2x^7)$
J)	$12 \cos(14x^6)$	T)	$336x^8 \cos(2x^7)$

Úloha 3

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

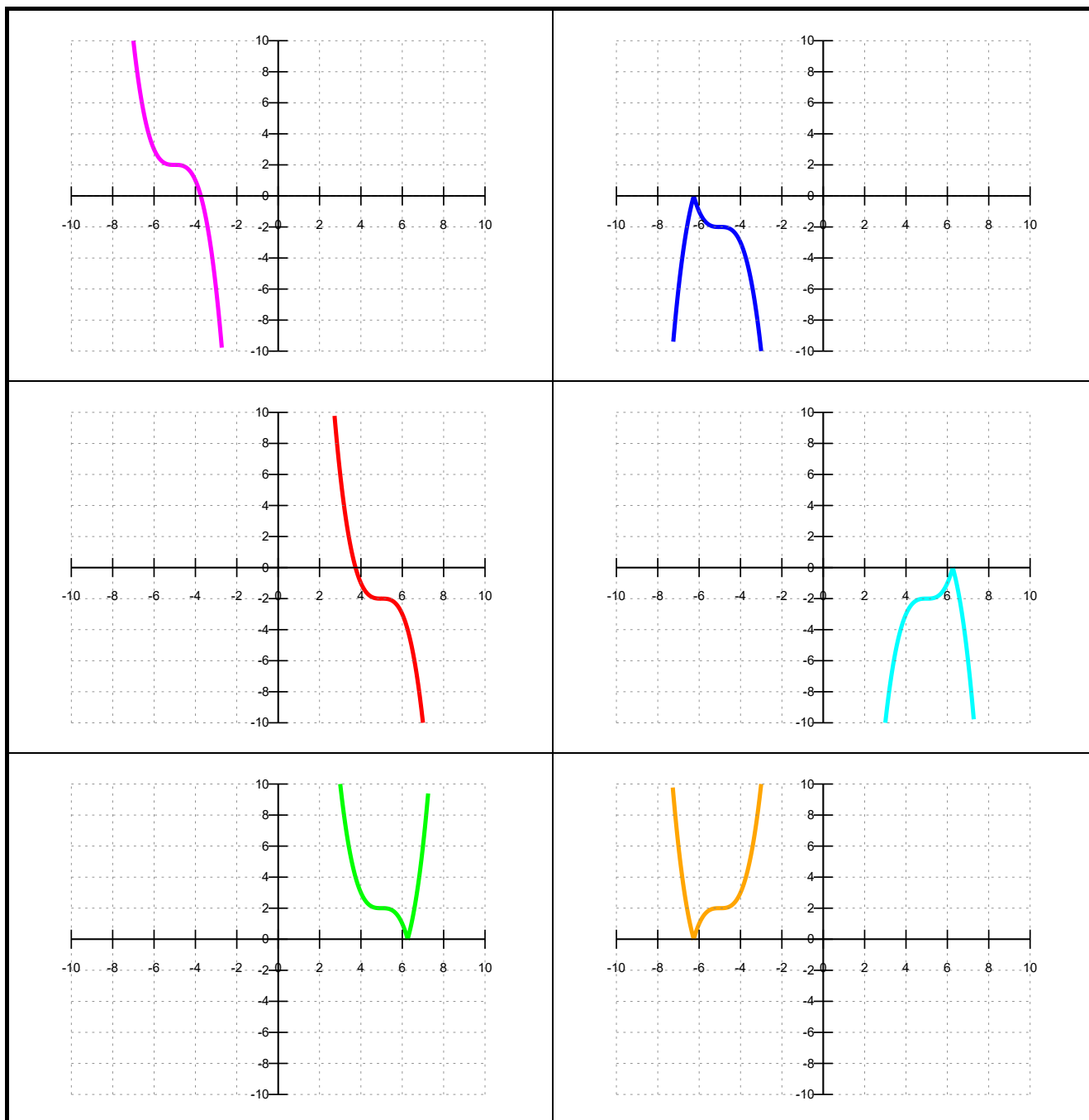
Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 5

Zadání: 1267

[STACK question dashboard](#)Nakreslete graf funkce $f(x)$ pomocí elementárních posunů a dosazením vhodných bodů:

$$f(x) = |(x - 5)^3 - 2|$$

Výsledek:

Odpovídající graf je označen barvou: 

Úloha 4

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 20

Zadání: 437

[STACK question dashboard](#)

Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = -x^3 + 63x^2 - 735x$$

Výsledek:

1. Vypočítejte nulové body (na dvě desetinná místa) a určete znaménka funkce $f(x)$:

$(-\infty; \text{[]})$	$(\text{[]}; \text{[]})$	$(\text{[]}; \text{[]})$	$(\text{[]}; \infty)$
[▾]	[▾]	[▾]	[▾]

2. Vypočítejte nulové body a znaménka první derivace $f'(x)$, a následně podle toho určete monotónnost funkce $f(x)$:

$(-\infty; \text{[]})$	$(\text{[]}; \text{[]})$	$(\text{[]}; \infty)$
[▾]	[▾]	[▾]
[] [▾]	[] [▾]	[] [▾]

3. Na základě tabulky první derivace $f'(x)$ určete lokální extrémů funkce $f(x)$:

$$L_{min} = \left[\text{[]} \text{[]} \right] \quad L_{max} = \left[\text{[]} \text{[]} \right]$$

4. Vypočítejte nulové body a znaménka druhé derivace $f''(x)$, a následně podle toho určete inflexi funkce $f(x)$:

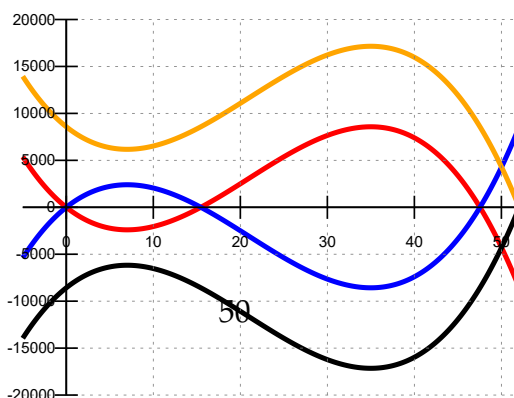
$(-\infty; \text{[]})$	$(\text{[]}; \infty)$
[▾]	[▾]
[] [▾]	[] [▾]

5. Na základě tabulky druhé derivace $f''(x)$ určete inflexní bod funkce $f(x)$:

$$I = \left[\text{[]} \text{[]} \right]$$

6. Shrňte všechny výše uvedené informace a rozhodněte o správném grafu pro funkci $f(x)$:

BARVA GRAFU? ▾



Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Úloha 5

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 5

Zadání: 237

[STACK question dashboard](#)

Vypočítejte limitu pomocí úprav daného výrazu nebo L'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{27x - 3x^3}{-3x^3 - 15x^2 - 18x}$$

Výsledek:

Konečná hodnota limity je:

Úloha 6

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 15

Zadání: 513

[STACK question dashboard](#)

Vypočítejte následující integrál pomocí substituční metody:

$$\int 150x^4 \cdot \cos(6x^5 - 6) dx$$

Výsledek:

Konečné řešení integrálu odpovídá písmenu:

A)	$(6x^5 - 6) \sin(150x^4) + C$	K)	$30x^5 \sin(x^6 - 6x) + C$
B)	$30x^5 \cos(x^6 - 6x) + C$	L)	$\cos(150x^4) + C$
C)	$5 \cos(6x^5 - 6) + C$	M)	$\sin(150x^4) + C$
D)	$5 \sin(6x^5 - 6) + C$	N)	$30x^4 \cos(30x^5) + C$
E)	$\sin(6x^5 - 6) + C$	O)	$30x^4 \cos(600x^3) + C$
F)	$(x^6 - 6x) \cos(30x^5) + C$	P)	$30x^4 \sin(30x^5) + C$
G)	$30x^4 \sin(600x^3) + C$	Q)	$5x \cos(6x^5 - 6) + C$
H)	$(6x^5 - 6) \cos(150x^4) + C$	R)	$(x^6 - 6x) \sin(30x^5) + C$
I)	$600x^3 \sin(30x^4) + C$	S)	$600x^3 \cos(30x^4) + C$
J)	$5x \sin(6x^5 - 6) + C$	T)	$0 + C$

Úloha 7

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 20

Zadání: 645

[STACK question dashboard](#)

Vypočítejte následující integrál pomocí metody per-partes:

$$\int 24x^2 \cdot \ln(7x^{15}) dx$$

Výsledek:

Konečné řešení integrálu odpovídá písmenu:

A)	$24x^2 \ln(7x^{15}) - 7x^{15} + C$	K)	$720 + C$
B)	$8x^3 \ln(7x^{15}) - 40x^3 + C$	L)	$48x \ln(105x^{14}) + C$
C)	$105x^{14} \ln(7x^{15}) - 48x + C$	M)	$7x^{16} \ln(24x^2) - 105x^{14} + C$
D)	$48x \ln(7x^{16}) + C$	N)	$48x \ln(7x^{15}) + 360x + C$
E)	$48x \ln(24x^2) + 7x^{16} + C$	O)	$7x^{16} \ln(7x^{15}) + 8x^3 + C$
F)	$\ln(7x^{16}) + \ln(105x^{14}) + C$	P)	$8x^3 \ln(105x^{14}) + C$
G)	$168x^{17} - \ln(168x^{17}) + C$	Q)	$7x^{15} \ln(24x^2) - 24x^2 + C$
H)	$105x^{14} \ln(7x^{15}) + 8x^3 + C$	R)	$56x^3 \ln(7x^{15}) + 320x^3 + C$
I)	$8x^3 \ln(7x^{16}) + C$	S)	$8x^3 \ln(24x^2) - 7x^{16} + C$
J)	$-40x^3 \ln(7x^{15}) - 400x^3 + C$	T)	$48x \ln(24x^2) + 105x^{14} + C$

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 15

Zadání: 789

[STACK question dashboard](#)

Nalezněte plošný obsah mezi křivkami na daném intervalu:

$$f(x) = x^3 + 4 \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{x}{2} \quad \text{na intervalu} \quad I = \langle 2, 3 \rangle$$

Výsledek:

Přesný finální obsah je: cm²

Úloha 9

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 5

Zadání: 1152

[STACK question dashboard](#)

Uvažujme následující matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & -14 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 2 \\ 0 & -18 & 14 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte matici \mathbf{X} danou předpisem:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}^T$$

Výsledek:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

Úloha 10

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 5

Zadání: 1232

[STACK question dashboard](#)

Vyřešte soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých s právě jedním řešením:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 + 1x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 6 \\ 3x_1 + -5x_2 + -3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Výsledek:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \right)$$

Úloha 11

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 5

Zadání: 370

[STACK question dashboard](#)

Zjistěte, zda vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ a \vec{u}_4 jsou lineárně závislé či nezávislé, přičemž

$$\vec{u}_1 = (4, 5, -5, -2) \quad \vec{u}_2 = (3, 3, -5, -1) \quad \vec{u}_3 = (-4, -5, 2, 4) \quad \vec{u}_4 = (0, 1, 1, 0)$$

Výsledek:

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ a \vec{u}_4 jsou lineárně 53
ZÁVISLÉ / NEZÁVISLÉ ↕.

Úloha 12

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 10

Zadání: 433

[STACK question dashboard](#)Zjistěte, zda vektor $\vec{v} = (20, 1, 1, -4)$ je lineární kombinací vektorů

$$\vec{u}_1 = (-2, 0, 0, 2) \quad \vec{u}_2 = (-3, -1, -1, -4) \quad \vec{u}_3 = (5, 0, 0, -2)$$

Výsledek:

Vektor \vec{v} lineární kombinací vektorů \vec{u}_1, \vec{u}_2 a \vec{u}_3 , přičemž v kladném případě jsou koeficienty kombinace $c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2 + c_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{v}$ následující (v záporném případě napíšeme nuly):

$$c_1 = \text{ } \quad c_2 = \text{ } \quad c_3 = \text{ }$$



Úloha 1

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Je-li D_f definiční obor funkce f a D_g definiční obor funkce g , jaký definiční obor bude mít funkce $f \cdot g$???

- A. $D_f \cup D_g$
- B. $D_f \setminus D_g$
- C. $D_f \cdot D_g$
- D. $D_f \cap D_g$

Úloha 2

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Ke každému obrazu existuje právě jeden vzor je zobrazení ...

- A. konstantní.
- B. prosté.
- C. periodické.
- D. sudé.

Úloha 3

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Neexistuje-li hodnota $k \in \mathbb{R}$ taková, že všechny funkční hodnoty $f(x)$ jsou menší nebo rovny než tato hodnota, tj. $\forall k \in \mathbb{R} \exists x \in D_f : f(x) > k$, jedná se o funkci ...

- A. omezenou zdola.
- B. neomezenou shora.
- C. omezenou shora.
- D. neomezenou zdola.

Úloha 4

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

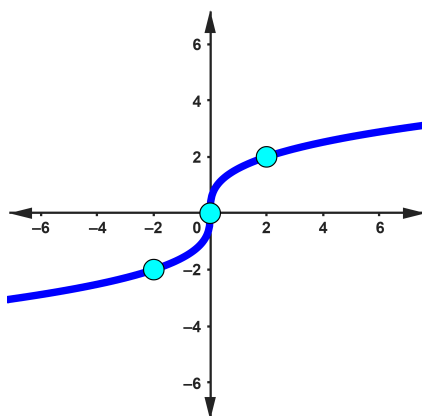
Je-li funkce f lichá, pak inverzní funkce f^{-1} ...

- A. bude sudá.
- B. nebude ani lichá ani sudá.
- C. bude lichá i sudá.
- D. bude lichá.

Úloha 5

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Na níže uvedeném grafu je funkce ...



- A. liché mocniny.
- B. sudé mocniny.
- C. sudé odmocniny.
- D. liché odmocniny.

Úloha 6

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Které dvě vlastnosti má funkce absolutní hodnoty, $y = |x|$???

- A. Je sudá a shora omezená.
- B. Je sudá a zdola omezená.
- C. Je lichá a zdola omezená.
- D. Je lichá a shora omezená.

Úloha 7

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Která z uvedených matematických formulí popisuje spojitost zleva funkce f v bodě $x_0 \in D_f$???

- A. $\forall O_\varepsilon(f(x_0)) \exists O_\delta^-(x_0) \forall x \in D_f \cap O_\delta^-(x_0) : f(x) \in O_\varepsilon(f(x_0))$
- B. $\forall O_\varepsilon(f(x_0)) \exists O_\delta^+(x_0) \forall x \in D_f \cap O_\delta^+(x_0) : f(x) \in O_\varepsilon(f(x_0))$
- C. $\forall O_\varepsilon^+(f(x_0)) \exists O_\delta(x_0) \forall x \in D_f \cap O_\delta(x_0) : f(x) \in O_\varepsilon^+(f(x_0))$
- D. $\forall O_\varepsilon^-(f(x_0)) \exists O_\delta(x_0) \forall x \in D_f \cap O_\delta(x_0) : f(x) \in O_\varepsilon^-(f(x_0))$

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Co znamená zápis: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$???

- A. Limita funkce f je rovna hodnotě x_0 pro proměnnou x blížíící se k bodu c .
- B. Limita funkce c je rovna hodnotě f pro proměnnou x_0 blížíící se k bodu x .
- C. Limita funkce f je rovna hodnotě c pro proměnnou x blížíící se k bodu x_0 .
- D. Limita funkce g je rovna hodnotě d pro proměnnou y blížíící se k bodu y_0 .

Úloha 9

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Jakou směrnici k má tečna k funkci $f(x)$ v bodě x_0 , která je rovnoběžná s osou y ???

- A. $k = 0$
- B. $k = -1$
- C. $k = 1$
- D. $k = \infty$

Úloha 10

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Proč se pro lokální aproximaci funkce využívá zejména polynom ???

- A. Protože polynom obsahuje jednoduché početní operace.
- B. Protože u každého polynomu lze velmi jednoduše vypočítat všechny jeho kořeny.
- C. Protože polynom je jednoduchá křivka na nakreslení.
- D. Protože polynom lze velmi jednoduše derivovat.

Úloha 11

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Která z uvedených mocninných funkcí má zápornou druhou derivaci v každém bodě svého definičního oboru ???

- A. Funkce liché odmocniny, například $f(x) = \sqrt[5]{x}$.
- B. Funkce sudé mocniny, například $f(x) = x^6$.
- C. Funkce sudé odmocniny, například $f(x) = \sqrt[6]{x}$.
- D. Funkce liché mocniny, například $f(x) = x^5$.

Úloha 12

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Řekneme-li, že bod x_0 je stacionárním bodem, jaká podmínka pro něj musí platit ???

- A. $f'(x_0) = 0$
- B. $f'(x_0) = 1$
- C. $f''(x_0) = 0$
- D. $f''(x_0) = 1$

Úloha 13

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Pomocí vzorce pro integraci součtu, zintegrujte: $\int e^x + \cos(x) dx = ???$

- A. $x^e \cdot \sin(x) + C$
- B. $e^x + \sin(x) + C$
- C. $e^{\ln(x)+\sin(x)} + C$
- D. $\ln(x) - \sin(x) + C$

Úloha 14

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Která z uvedených funkcí se rovná své integraci (až na konstantu C), tj. $\int f(x) dx = f(x) + C$???

- A. $\sin(x)$
- B. $\ln(x)$
- C. e^x
- D. $\arcsin(x)$

Úloha 15

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

V případě použití metody per-partes pro určitý integrál $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$ se ...

- A. musí přehodit meze a a b , tj. $[f(x) \cdot g(x)]_b^a - \int_b^a f'(x) \cdot g(x) dx$.
- B. musí přepočítat meze a a b , tj. $[f(x) \cdot g(x)]_{f(a)}^{g(b)} - \int_{f(a)}^{g(b)} f'(x) \cdot g(x) dx$.
- C. nemusí přepočítat meze a a b , tj. $[f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$.
- D. musí odstranit meze a a b , tj. $[f(x) \cdot g(x)] - \int f'(x) \cdot g(x) dx$.

Úloha 16

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Součin matic ...

- A. není asociativní.
- B. není asociativní krom případu, kdy jedna z matic je nulová.
- C. je asociativní ale jen tehdy, když jedna z matic je jednotková.
- D. je asociativní.

Úloha 17

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Kdy je daná nehomogenní soustava řešitelná podle Frobeniovy věty ???

- A. Pokud hodnost matice soustavy je menší než hodnost matice rozšířené.
- B. Pokud hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené jsou stejné.
- C. Pokud hodnost matice soustavy je větší než hodnost matice rozšířené.
- D. Pokud hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené jsou různé.

Úloha 18

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Jaký mezi sebou mají vztah dvě matice, které mají stejnou redukovanou trojúhelníkovou matici ???

- A. Obě matice musejí mít stejný počet řádků.
- B. Jsou řádkově ekvivalentní.
- C. Jsou vášnivě ekvivalentní.
- D. Obě matice musí být čtvercové.

Úloha 19

Moderní matematické metody v inženýrství 2025

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Lineární obal množiny vektorů M ve vektorovém prostoru ...

- A. je nejmenším podprostorem obsahující množinu M .
- B. je největším podprostorem obsahující množinu M .
- C. je libovolným podprostorem obsahující množinu M .
- D. není ani nejmenším ani největším podprostorem obsahující množinu M .

Úloha 20

Dosud nezodpovězeno Počet bodů z 1

Jeden z význačných vektorů má symbol \vec{o} . Který ???

- A. Inverzní vektor.
- B. Opačný vektor.
- C. Nulový vektor.
- D. Jednotkový vektor.

ZKUŠENOSTI S TVORBOU UČEBNÍCH MATERIÁLŮ V RÁMCI PROJEKTU NPO

DLOUHÁ Dagmar, JAROŠOVÁ Marcela, STRYJA Jakub, VOLNÁ Jana,
VOLNÝ Petr

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra matematiky,
Ludvíka Podéště 1875/17, 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail na hlavního autora: petr.volny@vsb.cz

Abstrakt: Chtěli bychom navázat na náš minulý příspěvek do konferenčního sborníku a sdílet naše zkušenosti s tvorbou studijních materiálů pro předmět Matematika I v rámci posledního roku trvání projektu NPO.

Klíčová slova: matematika, distanční výuka, pracovní listy, komentovaná videa

1 Úvod - projekt NPO

V příspěvku bychom chtěli zhodnotit činnost řešitelského kolektivu, který se podílel na přípravě pracovních listů a výukových videí v rámci projektu Národní plán obnovy pro VŠB-TUO pod číslem NPO_VŠB-TUO_MSMT-16605/2022. Práce na projektu byly zahájeny v únoru 2023 a byly ukončeny v prosinci 2024. Výstupem projektu byla sada pracovních listů pod názvem Pracovní listy pro předmět Matematika I a výuková videa pokrývající kritické části předmětu Matematika I vyučovaném na Fakultě stavební, na Fakultě bezpečnostního inženýrství a na Hornicko-geologické fakultě.

Pracovní listy jsou k dispozici nejenom studentům VŠB-TUO, ale stáhnout si je může každý, odkaz na stažení přikládáme:

<https://dspace.vsb.cz/handle/10084/155444>

Komentovaná videa jsou aktuálně navázána přímo na konkrétní předmět. Jednotlivé předměty jsou navázány na konkrétní studijní plány na fakultách. Na rozcestník vede odkaz

<https://www.vsb.cz/e-vyuka>

Zde je možné vyhledávat konkrétní předměty, nebo studijní programy jednotlivých fakult. Zkusme např. do pole vyhledávání předmětů zadat předmět Matematika I, objeví se seznam předmětů s tímto názvem a u každého je zároveň uvedeno jednoznačné identifikační číslo, prefix

230 patří naší katedře, Katedře matematiky na Fakultě stavební. Klikneme na zvolený předmět a objeví se karta s informacemi o tomto předmětu. Komentovaná videa nalezneme v sekci „Videa“. Poznamenejme, že pokud se v kartě předmětu nachází kategorie „DSpace“, nalezneme zde odkaz pro přímé stažení pracovních listů.

2 Pracovní listy

Pracovní listy pro předmět Matematika I představují základní informace pro každého studenta nejenom prvního ročníku a slouží jako podklad pro studium předmětu Matematika I. Obsahují v principu tři části.

Teoretická část pracovních listů je zamýšlena jako podpora přednášky. Obsahuje soubor základních pojmů, jejich definic a jsou zde uvedené věty, které považujeme za důležité při studiu matematiky na technické univerzitě. Student má možnost mít pracovní listy na přednášce, nemusí si tyto definice a věty přepisovat, ale může se více soustředit na jejich výklad a pochopení probíraného tématu.

Druhá část obsahuje sbírku řešených úloh, které jsou primárně určeny pro samostudium, nicméně je samozřejmě také možné použít tyto úlohy na přednášce při vysvětlování daného tématu.

Třetí část pracovních listů je věnována neřešeným úlohám. Záměrem je použít tyto příklady na cvičení a sjednotit tak výklad studentům od různých pedagogů.

Proběhla celkem intenzivní diskuse členů řešitelského týmu ohledně uspořádání pracovních listů. Ve starší verzi, na kterou jsme se rozhodli navázat, je uspořádání řešeno striktně v blocích, a to teoretická část, pak navazují řešené příklady a listy končí částí obsahující neřešené příklady. Pro novou aktuální verzi pracovních listů jsme se rozhodli uspořádání změnit, a to tematicky, podle jednotlivých témat. Např. chceme-li diskutovat téma „Tečna a normála funkce“, nalistujeme příslušnou část a můžeme si toto téma projít.

Pracovní listy pro předmět Matematika I

140 – Tečna a normála

Definice
 Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Přímkou t , procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a mající směrnici rovnou hodnotě derivace funkce f v x_0 nazveme tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 . Přímkou n , procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a kolmou k tečně nazveme normála ke grafu funkce f v bodě x_0 .

Věta
 Tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 je dána předpisem

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$
 Normála ke grafu funkce f v bodě x_0 je dána předpisem

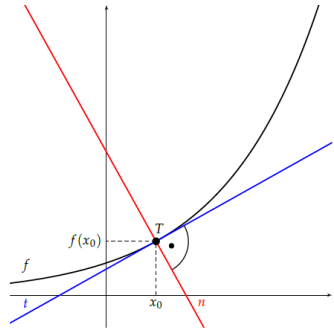
$$n: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Poznámka
 V bodě, ve kterém nemá funkce f derivaci, tečna neexistuje.

Poznámka
 Rovnici tečny lze přímo odvodit z diferenciálu funkce f v bodě x_0 ,

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$
 přičemž $y_0 = f(x_0)$, a tedy

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Obrázek 1: Tečna a normála - teorie

Pracovní listy pro předmět Matematika I

142 – Tečna a normála

Příklad

Určete rovnici tečny grafu funkce $f(x) = \frac{x}{x-1}$, která je rovnoběžná s přímkou $p: x + 4y - 4 = 0$.

K nalezení tečny potřebujeme její směrnici a bod, ve kterém se dotýká dané funkce. Víme, že hledaná tečna je rovnoběžná s přímkou p . Pro rovnoběžné přímky platí, že mají stejnou směrnici. Přímku převedeme na směrnicový tvar:

$$p: y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Směrnice p a tedy i směrnice tečny, je $-\frac{1}{4}$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Derivaci $f'(x)$ položíme rovnu $-\frac{1}{4}$ a vypočítáme x -ovou souřadnici tečného bodu.

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$(x-1)^2 = 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Rovnice má dvě řešení $x_1 = 3, x_2 = -1$ a existují dvě tečny rovnoběžné s přímkou p . Dosazením do funkce $f(x)$ dopočítáme souřadnice tečných bodů

$$T_1 = \left[3, \frac{3}{2}\right], \quad T_2 = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

Dosazením do vzorce tečny

$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

určíme rovnice tečen.

$$t_1: y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$t_2: y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Obrázek 2: Tečna a normála - řešená úloha

Pracovní listy pro předmět Matematika I

143 – Tečna a normála

Cvičení

Určete obecnou rovnici tečny t a normály n v dotykovém bodě T ke grafu funkce f dané předpisem:

a) $y = \frac{8}{4+x^2}$ $T = [2, ?]$ b) $y = \ln x$, $T = [e, ?]$

Tipy

směrnicový tvar rovnice tečny

$$t: y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice tečny

$$k_t = f'(x_0)$$

směrnicový tvar rovnice normály

$$n: y - y_0 = k_n(x - x_0)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice normály

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

obecná rovnice přímky

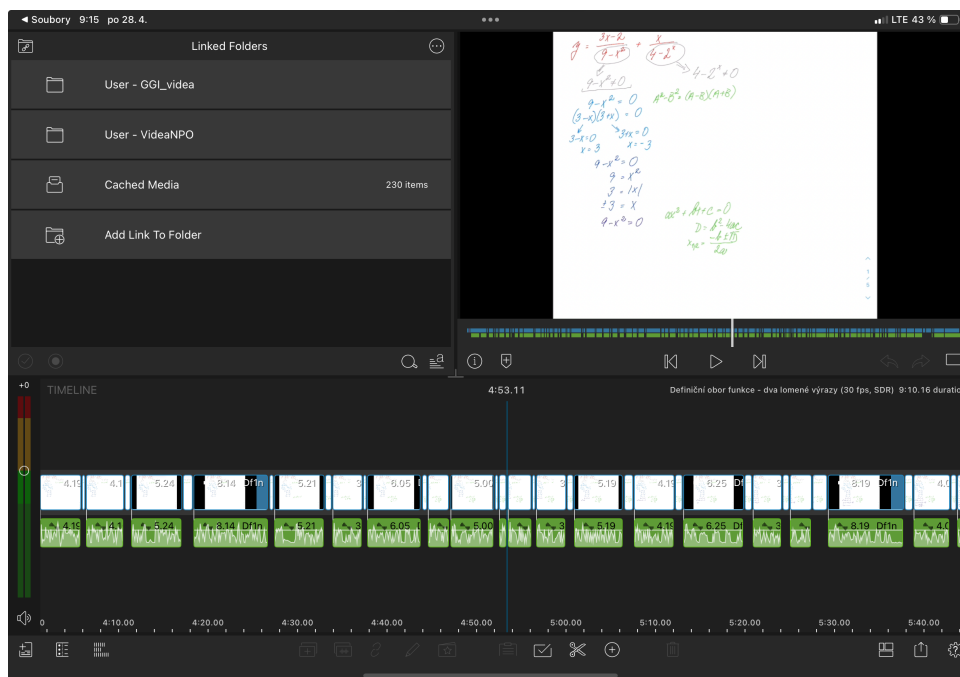
$$ax + by + c = 0$$

Obrázek 3: Tečna a normála - neřešená úloha

Tyto listy následují jeden za druhým, student nemusí text přeskakovat a má vše připravené na jednom místě.

3 Komentovaná videa

Videa byla nahrávána na iPad a střih s postprodukcí byl také realizován na iPadu prostřednictvím stříhové aplikace LumaFusion. Podstatnou změnou v aplikaci LumaFusion je nově přítomnost zvukového filtru „Sound Isolation“, který umožňuje odstranit šum na pozadí a zvýraznit hlas. Odpadl tak celkem komplikovaný řetězec úprav, kdy bylo nutné oddělit zvukovou stopu nahraného videa, aplikovat šumový filtr v aplikaci Brusfri a následně vše slepit a sestříhat v aplikaci LumaFusion.



Obrázek 4: Ukázka pracovního okna aplikace LumaFusion

Videa byla exportována v rozlišení 1280x720, formát MPEG4, kodek H.264.

4 Technické zajímavosti

Při tvorbě pracovních listů se vynořily určité technické snad ani ne problémy, ale spíše možnosti, jak udělat text hezčí z vizuálního hlediska. Rádi bychom se s Vámi o technické řešení podělili. Pracovní listy byly napsány v prostředí \LaTeX .

4.1 Uvozovky

Jednou a velmi často využívanou možností označení neurčitých limit jsou uvozovky. Podívejme se na jednoduchou úlohu. Určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Dosadíme limitní bod a v případě neurčité limity tuto tzv. neurčitost zvýrazníme prostřednictvím uvozovek,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}“.$$

Umístění uvozovek není příliš vhodné a celkově to nevypadá dobře.

Uvozovky jsme se rozhodli předělat, a to takto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}.$$

Nadefinovali jsme nový příkaz `\mathquotes`, který tento problém s nastavením pozice uvozovek řeší. V našem případě se jedná o `\mathquotes{\frac{0}{0}}`. Do preambule zdrojového souboru je nutné uvést následující kód:

```
\newsavebox{\mathbox}\newsavebox{\mathquote}
\newsavebox{\uvozovkylimity}
\makeatletter
\newcommand{\mathquotes}[1]{
  \savebox{\mathquote}{\text{' '}}
  \savebox{\uvozovkylimity}{\text{' '}}
  \savebox{\mathbox}{\displaystyle #1$}
  \ifdim\ht\mathbox=11.10289pt\relax
    \raisebox{-\dimexpr\ht\mathbox-0.25\ht\uvozovkylimity\relax}{' '#1}
    \raisebox{\dimexpr\ht\mathbox-\ht\mathquote\relax}{' '}
  \else
    \raisebox{-\dimexpr\ht\mathbox-0\ht\uvozovkylimity\relax}{' '#1}
    \raisebox{\dimexpr\ht\mathbox-\ht\mathquote\relax}{' '}
  \fi
}
\makeatother
```

4.2 Znaménko mínus v maticích

Další vizuální problém souvisel s tím, že pokud jsme v matici použili záporné číslo, znaménko mínus výrazně ovlivnilo rozestupy mezi jednotlivými sloupci matice. Rozhodli jsme se nadefinovat nový symbol „zkráceného znaménka mínus“,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{vs} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nový symbol se volá příkazem `\mm`. Aby fungoval, je nutné načíst balík `mathtools.sty`, tedy

```
\usepackage{mathtools}

\newcommand*{\mm}
{%
  \leavevmode
  \hphantom{0}%
  \llap{%
    \settowidth{\dimen0 }{\$0\$}%
    \resizebox{1.1\dimen0 }{\height}{\$-\$}%
  }%
}
```

4.3 Řádkově ekvivalentní úpravy, balíček gauss.sty

Balíček gauss.sty umožňuje při práci s maticemi vyznačit prováděné řádkové nebo sloupcové úpravy, my jsme používali jen řádkové úpravy. Balíček se načte na začátku příkazem

```
\usepackage{gauss}
```

Pak už stačí jen v matematickém prostředí používat `gmatrix`, ve kterém se za příkazem `\rowops` různě kombinují tři typy řádkových úprav:

`\swap` výměna dvou řádků,

`\mult` vynásobení řádku číslem,

`\add` přičtení násobku jednoho řádku k násobku jiného řádku.

Každý řádek matice je v prostředí `gmatrix` očíslovaný shora od nuly, tj. matice typu 3x3 má řádky 0, 1 a 2. Výslednou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow | \cdot 7 \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 5 \\ \leftarrow \end{array}$$

získáme, pokud použijeme kód

```
$$
\begin{gmatrix}[p]
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6 \\
7 & 8 & 9
\rowops
\swap{0}{1}
\mult{0}{\cdot 7}
\add[5]{1}{2}
\end{gmatrix}
$$
```

Nepovinný parametr `[p]` určuje typ závorky kolem matice, výsledek vypadá stejně jako při použití `pmatrix`.

V prostředí `gmatrix` jsou prvky matice zarovnávány na střed. V pracovních listech jsme zarovnávali prvky matic doprava, proto jsme ve zdrojovém souboru kombinovali `pmatrix` pro vysázení obsahu matice a `gmatrix` se stejným počtem řádků, ale bez prvků a bez závorek, pro vysázení řádkových úprav. Také jsme si upravili některé předdefinované příkazy balíčku `gauss`

```
\def\rowaddtolabel#1{\scriptstyle#1}
\newdimen\rowarrowsep\rowarrowsep=.1em
\newdimen\labelskip\labelskip=6pt
\newdimen\opskip\opskip=5pt
```

První řádek příkazu umožňuje zadávat násobek řádku matice, ke kterému přičítáme násobek jiného řádku, v původní verzi je zde symbol „+“. Zbývající řádky jen mění nastavení mezer mezi maticí, šipkami a násobky. Např. matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -1 \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 3 \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 2 \end{array}$$

měla zdrojový kód

```

$$
\begin{pmatrix*}[r]
1&2&3\\
0&2&4\\
0&\mm3&8
\end{pmatrix*}
\begin{matrix}
\\
\\
\rowops
\add[3][2]{1}{2}
\add[\mm1]{1}{0}
\end{matrix}
$$

```

5 Zamyšlení se nad přítomností výsledků ve studijních materiálech

Předkládáme kolegům následující úvahu, možná dotaz. Jedná se o věčné téma, je nutné či dokonce žádoucí uvádět u neřešených úloh výsledky? Jistě, pokud se jedná o nějakou sbírku úloh v knižní podobě, tak většinou sbírka obsahuje také řešení. Navíc, mít k dispozici řešení, je jedna z nejčastějších žádostí studentů, kteří s našimi pracovními listy pracují.

V našem kolektivu proběhla řada diskusí a pro tento příspěvek jsme si připravili malou anketku. Anketní otázka tedy zní:

Chceme mít v pracovních listech u neřešených úloh uvedeny také výsledky, ANO vs. NE?

Byli osloveni všichni členové řešitelského týmu a jejich reakce příkládáme.

Dagmar Dlouhá: „Motivace a potřeby při práci s pracovními listy jsou u výuky prezenčního a kombinovaného studia rozdílné. Vyplývá to ze specifických výzev a omezení, které každý typ výuky přináší.

Pokud vedu prezenční výuku, preferuji, aby výsledky nebyly zahrnuty, protože to podporuje samostatné myšlení studentů a zabraňuje možnosti opisování výsledků během cvičení. Na druhou stranu, u výuky v kombinovaném studiu, bych byla raději, aby byly výsledky zahrnuty. Díky nim by studenti kombinovaného studia, kteří tráví méně času ve škole, mohli svou práci doma efektivněji kontrolovat a samostatně se učit.

Vzhledem k rozdílnému formátu výuky bych uvítala vytvoření dvou verzí sbírky příkladů. Jednu verzi bez výsledků pro prezenční studenty a druhou verzi s výsledky pro studenty kombinovaného studia. Toto by umožnilo každé skupině využívat materiály, které nejlépe odpovídají jejich potřebám a vzdělávacím podmínkám.“

ANO / NE 1:0

Marcela Jarošová: „Ano, výsledky preferuji, protože tyto výsledky umožní studentům ověřit správnost jejich řešení.“

ANO / NE 2:0

Jakub Stryja: „Ahoj, výsledky nepreferuji. Svádí to studenty k počítání podle výsledků, kdy je špatný postup a dobře výsledek. Pokud už, tak na konci pracovních listů, ale i to je za mě zbytečné. Dnešní software si s příklady poradí a pokud někdo nutně potřebuje výsledek, může si ho lehce zjistit. Alespoň je to naučí se softwarem pracovat a dále se tím vzdělávat. Dnes jim software dodá i postup, a navíc se situace velmi dynamicky vyvíjí.“

ANO / NE 2:1

Jana Volná: „Uvádět výsledky v pracovních listech má určitě velký význam pro studenty, kteří pracovní listy použijí při samostudiu, ať už v kombinované formě studia nebo z důvodu zameškané výuky. Kontrola správnosti výsledků jim pomůže poznat, jestli při řešení příkladů postupují správně. V případě prezenčního studia se studenti vše potřebné dozvědí na výuce, takže výsledky nejsou potřeba. Vzhledem k různým typům studentů, kteří budou pracovní listy používat, jsem pro uvedení výsledků.“

ANO / NE 3:1

Petr Volný: „Nepreferuji uvádět výsledky neřešených úloh. Jde mi především o to, že studenti se pak při řešení úlohy snaží jednotlivé kroky řešení tzv. optimalizovat tak, aby se k uvedenému řešení dostali. Ještě zajímavější pak je, jeli ve výsledku neřešené úlohy chyba. I v takovém případě se najde řada studentů, kteří jsou schopni na chybně uvedený výsledek řešenou úlohu navést. Navíc, možnosti kontroly jsou v dnešní době značné, např. je možné pro ověření výsledku úlohy použít GeoGebra, což se také studentům na přednáškách a cvičeních snažím demonstrovat.“

ANO / NE 3:2

A vítězným názorem se stává: výsledky neřešených úloh v pracovních listech uvádět!

V aktuální verzi pracovních listů výsledky úloh neuvádíme. Naším záměrem je ale požádat o přidělení ISBN a případně vychytat nějaké chyby. Prostor pro přidání výsledků tedy stále ještě máme a výsledky neřešených úloh do pracovních listů přidáme.

Otázka: „Jaký názor na výsledky máte Vy?“

Závěr

V příspěvku jsme se snažili prezentovat naše zkušenosti s tvorbou studijních materiálů. Práce v našem kolektivu se nám velmi osvědčila a máme zájem i nadále se takové činnosti účastnit. Nabízí se pokračování předmětem Matematika II, ale především si myslíme, že by bylo určitě žádoucí podobným způsobem zpracovat i podklady pro předmět Deskriptivní geometrie.

Poděkování

Autoři děkují za podporu Katedře matematiky, Fakulta stavební, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava.

Reference

- [1] DLOUHÁ, D., HAMŘÍKOVÁ, R., MORÁVKOVÁ, Z., TUŽILOVÁ, M. Matematika I: Pracovní listy, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2014. ISBN 978-80-248-3323-1.
- [2] DLOUHÁ, D., JAROŠOVÁ, M., STRYJA, J., VOLNÁ, J., VOLNÝ, P.: Projekt NPO - Pracovní listy a videa do Matematiky I. In: Moderní matematické metody v inženýrství: sborník konference: 3. - 5. června, 2024, Čeladná, Česká republika. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2024. s. 14-19. ISBN 978-80-248-4745-0.
- [3] DLOUHÁ, D., VOLNÁ, J., VOLNÝ, P., Zkušenosti s tvorbou videí pro Průvodce Matematikou I. In: Moderní matematické metody v inženýrství: sborník konference: 5. - 7. června, 2023, Hradec nad Moravicí, Česká republika. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2023. s. 5-10. ISBN 978-80-248-4681-1.
- [4] VOLNÝ, P., VOLNÁ, J., DLOUHÁ, D., BOBKOVÁ, M., 2022. Guide to Distance Education of Mathematics I on VSB - TU Ostrava. *17th international conference DisCo 2022: Empowering Digital and Entrepreneurial Competences through E-learning.*

VZDĚLÁVÁNÍ BEZ BARIÉR: JAK CENTRUM SLUNEČNICE POMÁHÁ STUDENTŮM PŘEKONÁVAT VÝZVY V MATEMATICE A STATISTICE

Forstová Kuráňová Pavlína, Pulcerová Simona

VŠB TU Ostrava, Katedra matematických metod v ekonomice, 17. listopadu 2172/15
e-mail na hlavního autora: pavlina.forstova.kuranova@vsb.cz

Abstrakt: Tento příspěvek se zaměřuje na úspěšnost studentů se specifickými potřebami v matematických a statistických předmětech na Ekonomické fakultě Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava. V kontextu rostoucího počtu studentů se specifickými poruchami učení analyzujeme výsledky v předmětech Matematika pro ekonomy a Statistika pro ekonomy a porovnáváme je s výkonností běžné studentské populace. Na základě dat z Centra Slunečnice, které poskytuje podporu studentům se speciálními vzdělávacími potřebami, zjišťujeme, že navzdory různým výzvám dosahují tito studenti srovnatelných, a v některých případech i lepších, výsledků než ostatní studenti. Výsledky naznačují důležitost individuálního přístupu a potřebu inovace ve výukových metodách, zejména v oblasti kvantitativních předmětů.

Klíčová slova: Slunečnice, Specifické poruchy učení, Udržitelnost, Terciální vzdělávání, Úspěšnost studentů

1 Úvod

V posledních letech dochází k významným změnám v přístupu ke studentům se specifickými potřebami na vysokých školách. Zatímco dříve byly cílovou skupinou především studenti s fyzickým znevýhodněním, v současnosti roste podíl studentů se specifickými poruchami učení, psychickými obtížemi či chronickými onemocněními. Na tyto změny reagují univerzity prostřednictvím podpůrných center, která se snaží těmto studentům zajistit rovný přístup ke vzdělání.

Centrum Slunečnice při Ekonomické fakultě VŠB-TUO je příkladem takového podpůrného systému. Poskytuje studentům se specifickými nároky různé formy podpory – od technického zázemí přes konzultace a úpravy studijních podmínek až po psychologickou pomoc. Význam této podpory roste zejména v náročnějších studijních oblastech, jako je matematika a statistika, kde se znevýhodnění studentů často výrazněji projevuje.

V našem článku se proto zaměřujeme na analýzu vývoje počtu studentů zapojených do Centra Slunečnice a především na to, jak si vedou v předmětech Matematika pro ekonomy a

Statistika pro ekonomy. Porovnání s běžnou studentskou populací pak nabízí zajímavý pohled na efektivitu stávajících podpůrných opatření a může inspirovat k dalším krokům při zajištění rovného přístupu ke vzdělávání.

1.1 Co je Slunečnice a proč ji potřebujeme?

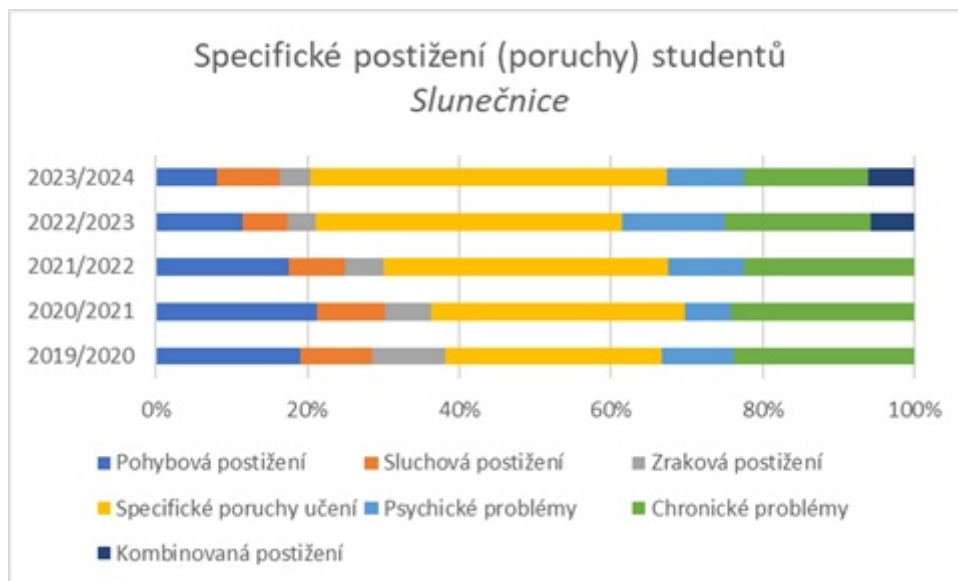
Slunečnice je centrum pro podporu studentů se specifickými potřebami na Ekonomické fakultě Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava. Jeho hlavním cílem je zpřístupnit vysokoškolské studium studentům se zdravotním nebo jiným znevýhodněním a pomoci jim překonávat překážky, které se mohou objevit během jejich akademického života. Centrum poskytuje individuální přístup ke každému studentovi, což zajišťuje vysokou kvalitu vzdělávání i při specifických potřebách.

Mezi služby, které Slunečnice nabízí, patří specializované studovny, individuální přístup při plnění studijních povinností, zázemí pro regeneraci a léčebné postupy, zapůjčení elektronických studijních materiálů a kompenzačních pomůcek. Dále poskytuje pomoc při komunikaci s pedagogy, konzultace s odborníky, tlumočnické a průvodcovské služby, a bezbariérový přístup do výuky podle potřeb studenta. V oblasti osobního rozvoje centrum pořádá skupinová setkání a vzdělávací akce. Kromě toho se zaměřujeme i na psychickou pohodu studentů, kterou podporuje skrze koučování, psychologické poradenství a rozvoj učebních stylů. Jejím posláním je pomoci studentům dosáhnout jejich cílů v souladu s jejich osobními a zdravotními potřebami [7].

V našem článku analyzujeme data od akademického roku 2019/2020 do akademického roku 2023/2024, což pokrývá období pěti let. Počet studentů v Centru Slunečnice vykazuje rostoucí trend a zároveň se zvyšuje počet různých typů znevýhodnění těchto studentů. Na počátku, téměř před dvaceti lety, se Slunečnice zaměřovala především na studenty s fyzickým znevýhodněním, jako jsou pohybová, zraková nebo sluchová postižení. V současnosti však stále více přibývá studentů se specifickými poruchami učení (např. dyslexie, dyskalkulie, dysgrafie) a studentů trpících psychickými problémy, jak ukazuje Tabulka 1 a Obrázek 1.

Tabulka 1: Počet studentů v akademických letech 2019/2020–2023/2024.

Akademický rok	2019/2020	2020/2021	2021/2022	2022/2023	2023/2024
Počet studentů	21	33	40	52	49
Pohybová postižení	4	7	7	6	4
Sluchová postižení	2	3	3	3	4
Zraková postižení	2	2	2	2	2
Specifické poruchy učení	6	11	15	21	23
Psychické problémy	2	2	4	7	5
Chronické problémy	5	8	9	10	8
Kombinovaná postižení	0	0	0	3	3



Obrázek 1: Specifické postižení (poruchy) studentů Slunečnice.

Specifické poruchy učení jsou nejpočetnější skupinou poruch u studentů v Centru Slunečnice. Tyto poruchy jsou neurologicky podmíněné obtíže, které ovlivňují schopnost člověka učit se a zpracovávat informace. Nejedná se o celkové snížení inteligence, ale o obtíže v konkrétních oblastech, jako je čtení, psaní nebo počítání.

V současném akademickém roce, znázorněném v Tabulce 2, je opět potvrzen rostoucí trend studentů se specifickými potřebami, stejně jako studentů trpících chronickými problémy. Lze tedy předpokládat, že tento trend bude pokračovat, což bude klást stále vyšší nároky na pedagogy, kteří se budou muset naučit efektivně pracovat s těmito studenty.

Tabulka 2: Počet studentů v Centru Slunečnice v akademickém roce 2024/2025.

Akademický rok	2024/2025
Počet studentů	66
Pohybová postižení	7
Sluchová postižení	2
Zraková postižení	1
Specifické poruchy učení	31
Psychické problémy	7
Chronické problémy	15
Kombinovaná postižení	3

Mezi hlavní typy specifických poruch učení patří [2], [5]:

- **Dyslexie** – obtíže se čtením, jako je pomalé a neplýnulé čtení, zaměňování písmen nebo problémy s porozuměním textu.
- **Dysgrafie** – problémy s psaním, např. nečitelný rukopis, pravopisné chyby nebo pomalé psaní.

- **Dysortografie** – specifické problémy s pravopisem, např. časté chyby i přesto, že student zná pravidla.
- **Dyskalkulie** – obtíže v oblasti matematiky, včetně problémů s počítáním, porozuměním číslům a matematickým operacím.
- **Dyspraxie** – porucha motorické koordinace, která ovlivňuje jemnou i hrubou motoriku, psaní nebo organizaci pohybů.

Specifické poruchy učení bývají diagnostikovány v dětství a mohou přetrvávat až do dospělosti. Pokud jsou podporovány vhodnými metodami, například individuální výukou nebo speciálními pomůckami, lze jejich dopad na vzdělávací proces minimalizovat [2], [5].

Na vysokých školách se však nemohou věnovat těmto poruchám tak intenzivně jako na základních nebo středních školách, kde mají studenti často přidělené asistenty a materiály přizpůsobené jejich potřebám. Na univerzitách se klade větší důraz na samostatnost studentů, což je pro jejich osobní rozvoj důležité, zároveň je však podpora a spolupráce pedagogů klíčová pro jejich úspěšné studium. Tento rozdíl činí výuku pro pedagogy složitější, protože musí hledat způsoby, jak reagovat na individuální potřeby studentů a zároveň podporovat jejich nezávislost.

Studenti se specifickými poruchami učení se často stydí za své znevýhodnění, což vede k tomu, že se jejich problémy často řeší až těsně před testem nebo zkouškou. V tomto okamžiku už není možné poskytnout efektivní pomoc, což studenty staví do obtížné situace. Pokud však student informuje vyučujícího na začátku semestru, umožní to přizpůsobení tempa výuky, což zvyšuje efektivitu vzdělávacího procesu [1], [4], [8].

Počet studentů se specifickými poruchami učení v Centru Slunečnice stále roste. Tito studenti mají přidělený čas navíc k plnění studijních povinností, který se pohybuje mezi 25 % a 30 %, u studentů s kombinovanými poruchami může být tento čas prodloužen až na 50 %. Tento typ úpravy však představuje značné výzvy pro pedagogy, kteří musí přizpůsobit prostor, metody výuky a reorganizovat plán výuky a zkoušení.

Tabulka 3: Úspěšnost dokončení studia v rámci Centra Slunečnice.

Akademický rok	2019/2020	2020/2021	2021/2022	2022/2023	2023/2024	Celkem
Úspěšné dokončení	2	5	6	9	9	31
Ukončení studia	3	3	5	14	8	33

Tabulka 3 ukazuje počet studentů, kteří v daném akademickém roce úspěšně dokončili studium a získali akademický titul, a také počet studentů, kteří studium ukončili předčasně z různých důvodů. Ukončení studia není vždy spojeno s neúspěchem ve studiu; mnozí studenti ukončili studium z osobních, zdravotních nebo psychických důvodů. Tento přehled nám pomáhá lépe porozumět výzvám, kterým studenti se specifickými potřebami čelí, a ukazuje, jak různé faktory ovlivňují jejich studijní cestu.

1.2 Udržitelnost v podpoře studentů se specifickými potřebami

Podobně jako v širším kontextu udržitelného rozvoje, je i v oblasti vzdělávání klíčové, aby podpora studentů se specifickými potřebami byla dlouhodobě udržitelná. Centrum Slunečnice,

kteří se zaměřuje na studenty s různými znevýhodněními, nejen že odpovídá na aktuální potřeby, ale také se připravuje na výzvy budoucnosti. Udržitelnost v tomto případě znamená nejen neustálé přizpůsobování se novým potřebám a výzvám studentů, ale také zajištění vyvážené podpory, která bude pro studenty efektivní i v dlouhodobém horizontu.

Tento přístup zahrnuje integraci materiální, psychologické a metodické podpory, která neohrožuje kvalitu vzdělání, ale naopak ji posiluje. Zajištění inkluzivního vzdělávacího prostředí, které podporuje všechny studenty bez ohledu na jejich specifické potřeby, je jedním z pilířů udržitelného rozvoje v rámci akademického systému. Centrum Slunečnice se tedy nestará pouze o současné potřeby, ale vytváří základy pro stabilní a rozmanitou podporu, která bude pokračovat i pro další generace studentů se specifickými potřebami.

1.3 Jak jsou na tom studenti s matematikou?

Na Ekonomické fakultě Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava se vyučují dva celofakultní matematické předměty: Matematika pro ekonomy a Statistika pro ekonomy. Tyto předměty jsou klíčové pro základní vzdělání každého studenta na fakultě. Kromě teoretických znalostí se v nich studenti učí aplikovat matematické dovednosti, které budou nezbytné v jejich profesním životě. Významnou roli v úspěchu studentů hraje i příprava, kterou měli před nástupem na vysokou školu, protože ta ovlivňuje jejich schopnost čelit náročnosti těchto předmětů.

Při výuce dochází k navázání na vědomosti získané na střední škole. Studenti, kteří mají silný základ v matematice a schopnost řešit matematické problémy, mají lepší předpoklady pro úspěšné zvládnutí studia. Mnozí studenti se specifickými poruchami učení nebo jinými znevýhodněními se již na nižších stupních vzdělávání naučili efektivně pracovat se svými obtížemi. Tito studenti přecházejí na vysokou školu s menšími problémy, protože si osvojili strategie, které jim pomáhají při studiu.

Naopak, studenti, kteří se začínají potýkat se specifickými poruchami učení až na vysoké škole, mohou čelit složitějšímu přechodu. Vysokoškolská výuka bývá rychlá, komplexní a vyžaduje samostatnost, kritické myšlení a schopnost efektivně organizovat čas. Pokud si studenti s těmito obtížemi včas neosvojí správné strategie, mohou mít problém přizpůsobit se studijním požadavkům [3], [6].

V těchto případech je velmi důležitou podporou Centrum Slunečnice, který studentům se specifickými potřebami poskytuje individuální přístup a pomoc. Program funguje jako cenný „partner“ pro studenty, kteří se připravují na samostatný život. Nabízí nejen speciální pomůcky a metodiky, ale také poradenství a pomoc při komunikaci s pedagogy, což studentům pomáhá lépe zvládat studium a překonávat překážky, které by jinak ohrozily jejich úspěch.

1.4 Porovnání úspěšnosti studentů v matematice a statistice

Výsledky z akademického roku 2023/2024 byly analyzovány v klíčových předmětech Matematika pro ekonomy a Statistika pro ekonomy. Práce se zaměřuje na rozdíly mezi běžnými studenty a studenty se specifickými potřebami zapsanými v Centru Slunečnice. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce.

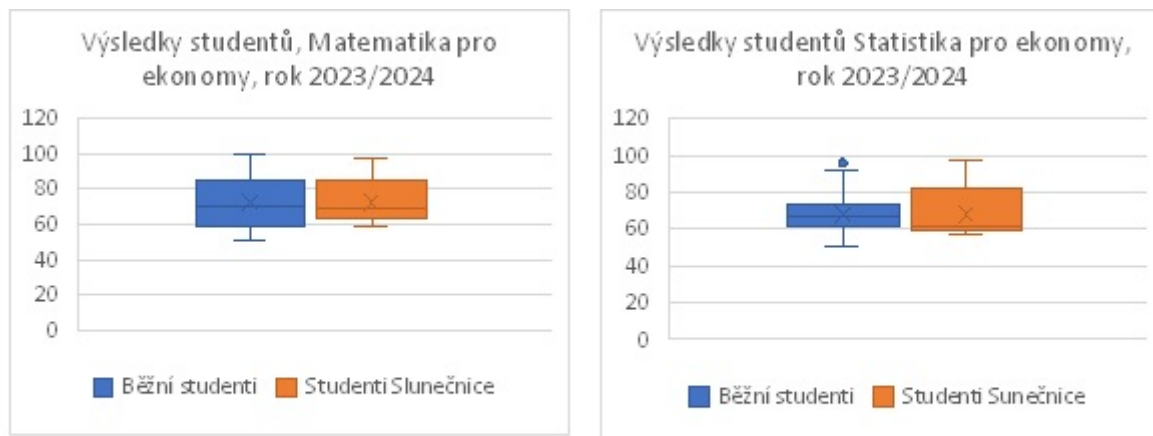
Tabulka 4: Základní srovnání běžných studentů a studentů Slunečnice v roce 2023/2024.

	Matematika pro ekonomy		Statistika pro ekonomy	
	Běžní studenti	Slunečnice	Běžní studenti	Slunečnice
Minimum	51	59	51	57
Maximum	100	97	100	97
Průměr	72,17	72,75	67,85	67,73
Medián	70	69	67	61
Počet	863	15	529	12
Úspěch u zkoušky	545	8	446	11
Poměr neúspěšných	0,37	0,47	0,16	0,08

Z výsledků vyplývá, že průměrné známky jsou mezi oběma skupinami velmi podobné, a to jak v matematice, tak ve statistice. U předmětu Matematika pro ekonomy je průměr u běžných studentů 72,17 %, u studentů Slunečnice 72,75 %. U Statistiky jsou výsledky téměř totožné — 67,85 % vs. 67,73 %.

Zajímavější jsou rozdíly v úspěšnosti u zkoušky. V matematice uspělo 63 % běžných studentů a 53 % studentů Slunečnice, ale ve statistice byla úspěšnost studentů Slunečnice vyšší než u běžných studentů (92 % vs. 84 %).

I když je počet studentů Slunečnice výrazně menší, výsledky naznačují, že tato skupina dosahuje srovnatelné výkonnosti. U některých předmětů dokonce vykazuje vyšší úspěšnost, což může odrážet efektivitu podpory, kterou tento program poskytuje.



Obrázek 2: Výsledky studentů v předmětech Matematika pro ekonomy a Statistika pro ekonomy v roce 2023/2024.

Závěr

Analýza ukazuje, že studenti se specifickými potřebami, zejména ti se specifickými poruchami učení, tvoří stále významnější část vysokoškolské populace. Centrum Slunečnice hraje klíčovou roli v podpoře těchto studentů, a to nejen v oblasti materiálního a organizačního zabezpečení, ale i v oblasti psychologické a metodické podpory.

Výsledky ukazují, že tito studenti dosahují v matematických a statistických předmětech srovnatelných výsledků jako jejich vrstevníci, a v některých případech dokonce vykazují vyšší míru úspěšnosti. Přesto je zřejmé, že jejich úspěch není samozřejmý – je podmíněn včasnou identifikací jejich potřeb, individuálním přístupem a připraveností vyučujících reagovat na různé učební styly a tempo učení.

Do budoucna bude nezbytné nejen rozšiřovat spektrum podpůrných opatření, ale také systematicky vzdělávat pedagogy v oblasti inkluzivního přístupu. Klíčovým aspektem zůstává schopnost vysokých škol vytvořit flexibilní a citlivé prostředí, které umožní studentům s různými potřebami uspět bez snížení nároků na kvalitu vzdělání.

Poděkování: Tento článek byl podpořen v rámci soutěže studentských grantů na Ekonomické fakultě VŠB-TU Ostrava v rámci projektu 'Diverzita udržitelného rozvoje: Interakce ekonomických, sociálních a environmentálních aspektů' (číslo projektu SP2025/050).

Reference

- [1] BROŽOVÁ, Dana. Poradenská podpora a možnosti edukace žáků s poruchami učení v širším smyslu. Brno: Masarykova univerzita, 2010. ISBN 978-80-210-5329-8.
- [2] Handbook of Adult and Continuing Education. Velká Británie: Taylor & Francis, 2024. ISBN 9781032919089.
- [3] KALEJA, Martin. Podpora terciárního vzdělávání studentů se specifickými vzdělávacími potřebami na Ostravské univerzitě v Ostravě. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7464-174-9.
- [4] Languages for Specific Purposes in Higher Education - Current Trends, Approaches and Issues: Brno, Czech Republic, 10-11 November 2017. [Brno]: [University of Technology.
- [5] MICHALOVÁ, Zdeňka. Specifické poruchy učení. Havlíčkův Brod: Tobiáš, 2016. ISBN 978-80-7311-166-3.
- [6] MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. Metodický pokyn ministryně školství, mládeže a tělovýchovy k vzdělávání žáků se specifickými poruchami učení nebo chování. Dostupné z: <https://msmt.gov.cz/vzdelavani/socialni-programy/metodicky-pokyn-ministryne-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-k-vzdelavani-zaku-se-specifickymi-poruchami-uceni-nebo-chovani>. [cit. 2025-04-09].
- [7] SLUNEČNICE - centrum pro studenty se specifickými nároky. Online. <https://slunecnice-ekf.vsb.cz/>. Dostupné z: <https://slunecnice-ekf.vsb.cz/>. [cit. 2025-03-12].
- [8] ZELINKOVÁ, Olga. Poruchy učení: dyslexie, dysgrafie, dysortografie, dyskalkulie, dyspraxie, ADHD. 11. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 9788073675141.

OD HISTORIE PŘES SOUČASNOST K BUDOUCNOSTI ANEB JAK OŽIVIT DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII

DLOUHÁ Dagmar, VOTOUPAL Václav

VŠB – Technická univerzita Ostrava, Katedra matematiky, Ludvíka Podéště 1875/17,
708 00 Ostrava - Poruba
dagmar.dlouha@vsb.cz

VŠB – Technická univerzita Ostrava, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie,
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava – Poruba
vaclav.votoupal@vsb.cz

Abstrakt: Článek se věnuje deskriptivní geometrii jako vyučovacímú předmětu. Na základě učebnic přináší přehled témat, kterým se deskriptivní geometrie věnovala od počátku 20. století do současnosti a uvádí přínosy jejího studia. Popisuje současný stav vyučovacímú předmětu a formuluje schopnosti a dovednosti, které jsou potřebné v praxi budoucích techniků, a na které lze výuku zaměřit. Článek rovněž stručně popisuje vývoj deskriptivní geometrie v závislosti na vývoji společnosti a přináší příklady konkrétních uplatnění v praxi společně s důvody pro zachování tohoto vyučovacímú předmětu.

Klíčová slova: deskriptivní geometrie, zobrazovací metody, výuka

Úvod

Článek vznikl za účelem zvýšení povědomí o potřebě inovovat deskriptivní geometrii jako vyučovacímú předmět, najít pro ni nové prostředky a témata tak, aby její přínos mohli využívat i další generace techniků. Je namířen proti omezování její výuky a bagatelizaci jejího významu. Inspirací článku bylo setkání vysokoškolských pedagogů *Kulatý stůl o deskriptivní geometrii*, které se konalo 30. ledna 2025 v Olomouci, na kterém se diskutovaly problémy snižujícího se zájmu o deskriptivní geometrii, záležitosti formy a náplně výuky na jednotlivých vysokých školách a možnosti zatraktivnění deskriptivní geometrie tak, aby nezanikla.

1 Historický exkurz

Deskriptivní geometrie, i když systematicky rozvinutá Gaspardem Mongem na konci 18. století, má své kořeny už ve starověku. Práce starověkých civilizací, jako jsou Egypťané a Řekové,

ukazuje rané použití geometrických principů, které se později staly základem pro deskriptivní geometrii. Egypťané, známí svými geometrickými a stavebními dovednostmi, využívali geometrii k navrhování pyramid a chrámů. Ve starověkém Řecku dosáhla geometrie sofistikovanější úrovně díky vědcům jako Eukleidés, jehož dílo „Základy“ vytvořilo východisko pro studium geometrie a zahrnovalo techniky, které se přímo dotýkají i deskriptivní geometrie.

Tato raná použití geometrie se zaměřovala především na praktické a umělecké aplikace, až Monge formalizoval a sjednotil tyto techniky do koherentního oboru. Mongeovo dílo spojilo dříve užívané techniky s novějšími metodami projekční geometrie, což vedlo k vývoji moderní deskriptivní geometrie jako disciplíny nezbytné pro technické aplikace, zejména ve vojenské a inženýrské praxi. Jeho kniha „Géométrie descriptive“ z roku 1799 se stala základním textem pro inženýry a architekty po celé Evropě.

Gaspard Monge měl několik důvodů, proč vyvinul po něm pojmenovanou zobrazovací metodu. Hlavní motivací byla potřeba efektivně zobrazit trojrozměrné objekty do roviny, což bylo kriticky důležité pro vojenské a inženýrské aplikace. V době francouzské revoluce, kdy Monge působil, bylo pro francouzskou vládu a vojenské účely klíčové přesně zobrazovat komplexní vojenské a technické struktury, jako jsou pevnosti a vojenské stroje.

Monge, jako profesor na École Polytechnique, kterou pomohl založit, si byl vědom potřeby inženýrů a vědců rozumět přesnému tvaru a rozmístění objektů ve třech dimenzích. Jeho zobrazovací metoda umožnila zlepšení a standardizaci výuky technických oborů, což bylo v souladu s jeho širší vizí vzdělávací reformy zaměřené na podporu vědeckých a technologických inovací ve Francii. Výsledkem bylo, že deskriptivní geometrie se stala základní součástí technického vzdělání a byla široce přijímána a využívána po celém světě.

Jednou z dalších významných zobrazovacích metod, která byla vyvinuta, je vojenská perspektiva. Tato metoda vznikla kolem roku 1600 a byla zvláště užitečná pro jednoduchou projekci pevností a městských plánů. U vojenské perspektivy je pohled z vrchu objektu nezkreslený, zatímco výška budovy je zobrazena v natočení o 45° vzhledem k základně, což umožňuje snadnější vizualizaci a méně technicky náročné kreslení ve srovnání s přísně ortogonálními projekcemi, které používal Monge. [3] Tato metoda byla přijata hlavně kvůli své jednoduchosti a efektivitě při plánování a konstrukci vojenských i civilních staveb. Nezkreslené zobrazení vrchního pohledu umožňovalo lépe pochopit rozložení bez nutnosti složitého geometrického výpočtu, což bylo v praxi velmi cenné zejména při návrhu pevností a urbanistických plánů.

Další zobrazovací metodou, která má velké využití nejen v uměleckých a designérských oborech, ale i v architektuře a stavebnictví je lineární perspektiva. Jako systematická zobrazovací metoda byla vyvinuta v období renesance, zejména díky dílu architekta Filippa Brunelleschiho a malíře Leonarda da Vinci. Tento objev umožnil realistické znázornění trojrozměrného prostoru do roviny a zásadně změnil způsob, jakým lidé zobrazovali svět kolem sebe.

V kontextu vývoje projekčních metod po Mongeovi je také důležité zmínit rozvoj projekční geometrie, která se začala rozvíjet jako samostatný obor v 19. století, založený na Mongeových pracích a dále rozvíjený jeho studenty a následovníky. Projekční geometrie se soustředila na vlastnosti a vztahy, které zůstávají invariantní při projekčních transformacích, což rozšířilo matematický a geometrický výzkum mimo tradiční rámce deskriptivní geometrie. [5]

Ve 20. století se deskriptivní geometrie rozšířila po celém světě. Tento rozvoj byl podpořen nástupem počítačové éry, která dramaticky změnila způsob, jakým byla geometrie vyučována a aplikována. Počítačová grafika, která začala nabývat na významu v druhé polovině století, umožnila mnohem komplexnější vizualizace a simulace, což vedlo k výraznému rozšíření možností využití deskriptivní geometrie.

2 Co říkají knihy

Jak jsme se zmínili v úvodu, o deskriptivní geometrii není velký zájem. Pro studenty je tento předmět obtížný a často si neuvědomují jeho přínosnost. Na některých technických univerzitách můžeme vidět jeho omezování nebo rušení. Pokud bude tato tendence přetrvávat a předmět se na vysokých školách stane okrajovým, zmizí postupně i ze školních vzdělávacích programů středních průmyslových škol stavebních a strojních a z gymnázií.

Je možné, že nepopularita předmětu je důsledkem zanedbávání výuky geometrie už na základních a středních školách. Geometrie bývá často tématem, které se probere jen stručně nebo se i vynechá, pokud dojde ke zpoždění výuky oproti učebnímu plánu. Při výuce geometrie je potřeba soustavně postupovat od jednoduchých vlastností a konstrukcí ke složitějším. Náročnější úlohy se řeší tak, že se rozloží na několik úloh základních, které se postupně provedou. Pokud žák nemá správnou představu o základních pojmech, ty složitější si osvojuje s velkými obtížemi.

Dobrou představu o významu deskriptivní geometrie si můžeme udělat pročtením učebnic. [6] Z jejich obsahu a úvodů se dozvíme, co jejich autoři považovali v době vzniku učebnice za důležité, která témata do učebnic zařadili a jaké přínosy výuky deskriptivní geometrie spatřovali. Podívali do některých učebnic a skript deskriptivní geometrie pro střední a vysoké školy vydané od počátku 20. století do současnosti na území dnešní České republiky a Slovenska. V obsazích učebnic se vyskytovala tato témata:

- technické kreslení,
- planimetrie,
- stereometrie,
- zobrazovací metody,
- zobrazení (afinita a kolineace),
- kuželosečky,
- křivky a plochy,
- projektivní geometrie,
- kinematická geometrie,
- geometrické osvětlení,
- teoretické řešení střech,
- reliéfy,
- topografické plochy,
- kartografie,
- fotogrammetrie,
- nomogramy.

Ve středoškolských materiálech se objevují zejména kuželosečky, zobrazovací metody a konstrukce základních úloh. Do vysokoškolských materiálů autoři zařadili zejména opakování planimetrie a stereometrie, zobrazovací metody, křivky a plochy a některá z uvedených témat odpovídajících konkrétnímu zaměření učebnice. Můžeme říci, že probíraná témata korespondují vždy s požadavky doby vzniku učebnice a s požadavky oboru, pro který byla primárně určena (stavebnictví, strojnictví, hornictví ad.)

Zaměříme-li se na úvody jednotlivých učebnic, zjistíme v čem bylo studium deskriptivní geometrie přínosné. Uvádíme nejčastěji zmiňované přínosy:

- rozvoj prostorové představivosti,
- dovednost správného naskicování či vyobrazení předmětů před jejich výrobou,

- znalost vhodných zobrazovacích způsobů pro různé potřeby,
- modelování,
- rozvoj logického myšlení,
- všeobecně výchovný cíl,
- přesné vyjadřování,
- přesné a úhledné grafické vyjadřování dle normovaných pravidel.¹

Kromě přímého využití poznatků deskriptivní geometrie v technické praxi, vnímali autoři uplatnění i v netechnických disciplínách a obecně v rozvoji každého jedince.

V současnosti je výuka deskriptivní geometrie pojímána převážně konstruktivně, tj. žáci a studenti se učí konstruovat pomocí rýsovacích pomůcek zadané objekty v některém promítání, využívají k tomu poznatků planimetrie a stereometrie a současně se učí o geometrických vlastnostech zobrazovaných objektů. Důraz je mnohdy kladený na to, jak dané objekty zkonstruovat, což přetrvává ve výuce z minulého století, kde byla tato dovednost potřeba v praxi právě při zhotovování technických výkresů. Dnes se ale výkresy ručně nekreslí a tento fakt bývá také jedním z prvních argumentů studentů při tvrzeních, že je deskriptivní geometrie „k ničemu.“ Nejméně v tomto ohledu je tedy deskriptivní geometrii potřeba aktualizovat. Neznamená to ovšem, že výuka probíhá zcela bez moderních technologií. Významným trendem je využívání softwaru, jako je GeoGebra, který studentům poskytuje dynamické 3D simulace. Tato technologie umožňuje nejen lepší prostorovou vizualizaci, ale také usnadňuje přechod mezi 3D objekty a jejich 2D reprezentacemi na papíře, což je tradiční výzva deskriptivní geometrie. [1]

Abychom mohli poznatky deskriptivní geometrie dobře využít i v budoucnosti, je pořebné provázat ji s ostatními obory, používat různé přístupy při řešení úloh (analytická, projektivní, diferenciální geometrie ad.), zvýšit důraz na logické odvozování a udržovat tematické zaměření pro konkrétní obory s velice konkrétními příklady z praxe. Zároveň jsme se snažili určit žádoucí kompetence, které může student v deskriptivní geometrii získat, a na kterých bychom mohli založit nový přístup k výuce. Některé zde předkládáme:

- schopnost správně, srozumitelně a názorně načrtnout či naskicovat předměty v prostoru, své návrhy atd.,
- schopnost pracovat s vysokou vizuální úrovní, mít úhledný a přehledný grafický projev,
- znalost možností zobrazení prostoru do roviny a jejich principu,
- znalost geometrických vlastností křivek a ploch užívaných v technické praxi, včetně aplikací v konkrétních příkladech,
- schopnost logického myšlení.

Pro ilustraci rozvedeme první bod. V dnešní době, kdy dominují digitální technologie a počítačové návrhy, je stále důležité i to, aby studenti uměli črtnat a rýsovat rukou. Ruční kreslení

¹Tomuto se věnuje samostatný středoškolský předmět Technické kreslení.

poskytuje základní pochopení geometrických principů a designu, což je klíčové pro hlubší porozumění složitějším konceptům v architektuře a inženýrství. Praktikování ručního kreslení může výrazně zlepšit prostorové vnímání studentů. Tato schopnost je nepostradatelná pro efektivní používání moderních 3D modelovacích a designových nástrojů. Zásadní je schopnost rychle a efektivně provádět náčrtky a úpravy návrhů během brainstormingových sezení nebo při práci v terénu, kde nemusí být k dispozici digitální technologie. Práce rukou podporuje kreativní myšlení a umožňuje návrhářům volně experimentovat s ideami bez omezení softwarových nástrojů. Vyučování ručního kreslení jako součásti studijního plánu může tedy poskytnout studentům užitečné dovednosti, které rozšíří jejich technické schopnosti a zvýší jejich konkurenceschopnost na trhu práce.

Porovnáme-li naše požadavky s přínosy uvedenými v učebnicích, zpozorujeme vysokou míru shody. Není tedy nutné měnit principy, které deskriptivní geometrie zastává a metody které využívá, je spíše potřeba zaměřit se na skutečné využití jejích poznatků v současném světě.

3 Kde všude je deskriptiva

Deskriptivní geometrie je základem pro vývoj moderních grafických a počítačových technologií, které dnes používáme pro zobrazení trojrozměrných objektů na dvourozměrné plochy. Přestože byly její metody v počátcích primárně zaměřeny na manuální kreslení a technické plánování, postupem času se staly nezbytnými pro pokročilé počítačové modelování a CAD systémy. Tyto systémy umožnily inženýrům a designérům modelovat složité objekty s přesností a provádět analýzy, které byly dříve velmi náročné nebo nemožné.

Dalším významným rozvojem bylo využití deskriptivní geometrie ve virtuální realitě a simulacích. V těchto prostředích jsou vytvářeny realistické 3D modely a prostředí, které lze použít v různých aplikacích od videoher po výcvikové simulace pro letecký a vojenský průmysl. Například v simulacích letu mohou piloti zažít hyperrealistické podmínky bez rizika skutečného letu, což je možné díky pokročilým technikám modelování založených na deskriptivní geometrii. [2] Aplikace deskriptivní geometrie najdeme i v biomedicíně inženýrství při vytváření složitých modelů lidského těla, což usnadňuje výzkum a vývoj v oblastech jako je protetika a rekonstrukční chirurgie.

Schopnosti deskriptivní geometrie zobrazovat objekty a analyzovat jejich geometrické vlastnosti, zůstávají základními stavebními kameny pro inženýrství, architekturu a design. Tato disciplína nadále ovlivňuje jak akademické, tak profesní praxe a zůstává nezbytná pro technické obory využívající vizualizační technologie. Univerzálnost deskriptivní geometrie se projevuje ve schopnosti poskytovat návrhářům a inženýrům přesné a efektivní nástroje pro modelování, což je zásadní pro rozvoj a implementaci inovací v moderním stavitelství a průmyslovém designu.

Široká aplikovatelnost deskriptivní geometrie zdůrazňuje její nezastupitelnou roli v moderní vědě a technice, kde přesnost a detailní porozumění prostorovým vztahům může mít zásadní význam pro úspěch a inovace. Vzdělávací programy na technických univerzitách proto nadále zdůrazňují deskriptivní geometrii jako základní součást studijních plánů.

Budoucnost deskriptivní geometrie se neustále vyvíjí díky integraci moderních technologií, jako je rozšířená realita a interaktivní softwarové nástroje. V oblasti vzdělávání se deskriptivní geometrie stále více obohacuje o digitální nástroje, které umožňují studentům lépe pochopit geometrické vlastnosti objektů. Například využití rozšířené reality v procesu výuky umožňuje studentům vidět a interagovat s 3D modely v reálném prostředí, což zlepšuje jejich schopnost pochopit složité geometrické koncepty a designové problémy. [4]

Toto směřování k integraci pokročilých technologií do výuky deskriptivní geometrie nejenže zvyšuje zapojení a pochopení studentů, ale také modernizuje celý vzdělávací proces tím, že přináší rychlejší a interaktivnější metody učení. Tyto inovace naznačují, že deskriptivní geometrie bude nadále klíčovým prvkem technického vzdělávání, adaptabilní na nové technologické trendy a potřeby budoucích generací studentů inženýrství, architektury a designu.

Závěr

Deskriptivní geometrie má pro akademický a profesní rozvoj budoucích techniků stále význam. Poskytuje jim základní nástroje pro vizualizaci a přesné zobrazení trojrozměrných objektů do roviny, což je zásadní dovednost, jak pro studenty strojího a stavebního inženýrství, tak pro studenty architektury. Studium deskriptivní geometrie významně přispívá k rozvoji prostorového vnímání. Tato schopnost je velmi důležitá pro návrh a realizaci technických projektů, protože umožňuje studentům správně pochopit a představit si složité prostorové vztahy, se kterými se setkají v praxi. Zároveň je deskriptivní geometrie významná pro efektivní využívání moderních nástrojů a technologií, které se staly standardem v průmyslu a znalost jejich principů je nezbytná pro jejich efektivní využití. V dnešním rychle se měnícím technologickém světě je důležité, aby byli absolventi inženýrství schopni adaptovat se na nové nástroje a přístupy. Znalosti deskriptivní geometrie jim poskytují pevný základ, který jim umožní lépe se orientovat v nových technologiích a inovačních procesech. Deskriptivní geometrie není jen o kreslení a modelování, ale také o analytickém myšlení a řešení problémů. Tyto dovednosti jsou přenositelné do různých oblastí technické praxe a podporují interdisciplinární přístup k řešení problémů.

Reference

- [1] CHIVAI, C. H., SOARES, A. A., CATARINO, P. 2022. Application of GeoGebra in the Teaching of Descriptive Geometry: Sections of Solids. *Mathematics 10 (17)*, 3034, ISSN 2227-7390, dostupné z: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/17/3034>.
- [2] MIGLIARI, R. 2012. Descriptive Geometry: From its Past to its Future. *Nexus Netw J 14*. ISSN 1522-4600.
- [3] MORAVCOVÁ, V. 2014. History of descriptive geometry with an emphasis to the boom of descriptive geometry in Austro-Hungarian Empire in the 19th century. *Czasopismo Techniczne, Nauki Podstawowe Zeszyt 1 NP (7)*, ISSN 0011-4561.
- [4] VORONINA, M. V., TRETYAKOVA, Z. O., KRIVONOZHKINA, E. G., BUSLAEV, S. I., SIDORENKO, G. G. 2019. Augmented Reality in Teaching Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics – Systematic Review and Results of the Russian Teachers' Experience. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15 (12)*, ISSN: 1305-8223.
- [5] WELLS, J. 2017. Projective geometry. *Differential and Complex Geometry: Origins, Abstractions and Embeddings*. Springer International Publishing, ISBN 978-3-319-58184-2.
- [6] ZAMBOJ, M. 2025. Výuka deskriptivní geometrie vzhledem k jejím transformacím v čase. *Kulatý stůl o deskriptivní geometrii*.

GRAFY MATEMATICKÝCH FUNKCÍ VE STACK ÚLOHÁCH V MOODLE

PÁTÍKOVÁ Zuzana, POLÁŠEK Vladimír

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky,
Ústav matematiky, Nad Stráněmi 4511, 760 05, Zlín
e-mail na hlavního autora: vpolasek@utb.cz

Abstrakt: V článku přinášíme krátký přehled možností, jak lze vytvářet úlohy s grafy matematických funkcí ve STACKu v systému Moodle. Na konkrétních úlohách popisujeme využití nástrojů softwaru Maxima, dále GeoGebry, TikZ a JSXGraph.

Klíčová slova: STACK, Moodle, Maxima, GeoGebra, TikZ, JSXGraph

1 Úvod

STACK je specializovaný nástroj integrovaný do systému Moodle, který umožňuje vytvářet a automaticky vyhodnocovat úlohy zaměřené především na matematiku, ale i další přírodovědné obory. Jednou z jeho silných stránek je možnost pracovat s grafy funkcí – ať už jde o jednoduché statické vykreslení, nebo o interaktivní grafy reagující na vstupy studentů. Tím, že jsou grafy součástí zadání, nápovědy nebo zpětné vazby (feedbacku), výrazně se zvyšuje názornost a didaktická hodnota těchto úloh.

V tomto článku se zaměříme na konkrétní způsoby, jak lze různé typy grafů do úloh ve STACKu implementovat. Na praktických příkladech ukazujeme, jak lze k vykreslení funkcí využít nástroje Maxima, GeoGebry, JSXGraph a TikZ. U každého z těchto nástrojů popisujeme technické možnosti, způsob propojení se STACKem i případná omezení. Cílem je nabídnout ucelený přehled a srovnání přístupů, které mohou sloužit jako inspirace nebo návod při vlastní tvorbě úloh.

2 Jak na grafy

Ve článku představíme vybrané konkrétní příklady matematických úloh, ve kterých je vykreslování grafů realizováno různými způsoby. Využíváme při tom náhodně generované proměnné (tzv. question variables), které umožňují vytvářet různé varianty úloh. K vykreslení grafů funkcí jsme použili nejprve příkazů počítačového algebraického systému Maxima, který

STACK využívá pro symbolické výpočty. Některé z těchto příkazů jsou ale modifikovány pro potřeby STACKu. Dále pak program GeoGebra umožňující tvořit interaktivní grafy ve známém prostředí a pak je zobrazit ve STACKu, a JavaScriptovou knihovnu JSXGraph. Vyzkoušeli jsme také TikZ, což je jeden z balíčků LaTeXu pro tvorbu grafiky, tedy grafů, diagramů a jiných schémat.

2.1 Maxima

Základním nástrojem pro vytvoření grafu ve STACKu za použití vygenerovaných proměnných je příkaz `plot`, který nabízí omezenou funkcionalitu standardního příkazu Maximy `plot2d`. Mnohé pokročilé možnosti nejsou dostupné – balíček `draw` není ve STACKu podporován a funkce `implicit_plot()` nefunguje, protože nerespektuje nastavení grafu a výsledné soubory nelze správně umístit. Základní přehled vlastností a návodů pro příkaz `plot` lze najít na stránce [5].

Obecně platí, že použití maxima grafu je řešení, které funguje pouze u základního statického vykreslení a není zde mnoho možností, jak výsledek v nastavení ovlivnit. Funguje například možnost více grafů v jednom obrázku, na druhou stranu, nefunguje například možnost vyplnit plochu ohraničenou křivkami.

2.2 GeoGebra

Implementací apletu z GeoGebry lze dosáhnout nejen statického, ale i dynamického chování grafů, které umožní, aby studentova reakce vyžadovala manipulaci s grafem či jinými objekty. První fáze tvorby úlohy zahrnuje přípravu GeoGebra apletu a jeho zveřejnění. Na stránkách geogebra.org je potřeba mít založen účet. Zde se připraví nová konstrukce. Objekty, které budou propojeny se STACKem potřebují mít stejný název v obou prostředích. Po nastavení počátečního stavu, skrytí algebraického okna a přizpůsobení velikosti okna je potřeba aplet uložit a publikovat, aby byl veřejně dostupný. Následně je potřeba zjistit ID apletu – je to poslední část URL (např. <https://www.geogebra.org/m/abcd1234>, odtud ID = `abcd1234`). Druhá fáze přípravy se odehrává v Moodle. V nově vytvořené STACK otázce se definují proměnné standardním způsobem. Do textu úlohy se vloží odkaz na vytvořený aplet a jeho nastavení podle typu úlohy i podle toho, čeho chceme úlohou dosáhnout. V nastavení očekávaných vstupů je potřeba nastavit `Forbid float` na `Ne`. Ve vyhodnocovacím stromu se nastaví vhodný test správnosti odpovědi.

2.3 JSXGraph

„JSXGraph je JavaScriptová knihovna pro interaktivní geometrii, vykreslování funkcí, grafy a vizualizaci dat ve webovém prohlížeči.“, (citováno z [4]). V běžné webové stránce, i v rámci Moodle, je nutné načíst externí javascriptové knihovny, případně i knihovnu MathJax pro kvalitní matematický text. Pokud je v systému Moodle aktivní plugin MathJax, není tuto knihovnu nutné načítat. Ze stránek [4] je přístup do databáze vypracovaných příkladů s využitím JSXGraph nejen v matematice, k materiálům z workshopů a konferencím, které se JSXGraph pravidelně věnují. „STACK poskytuje vlastní implementaci JSXGraph s některými klíčovými rozdíly a dalšími funkcemi“, (citováno z [2]). Zde je k dispozici také manuál k JSXGraph. V dokumentaci ke STACKu [6] nalezneme základní informace a doporučení, jak vytvořit úlohu s interaktivním grafem. Navíc je doporučováno při vytváření úloh používat editor zobrazující prostý text.

2.4 TikZ

TikZ je sada příkazů typografického systému TeX pro kreslení grafiky, viz [3]. Funguje v rámci libovolné webové stránky, nejen tedy STACKu, ale je nutné načíst externí nástroj TikZJax, viz [1]. TikzJax načteme tak, že do HTML kódu zahrneme následující řádky.

```
<link rel="stylesheet" type="text/css" href="http://tikzjax.com/v1/fonts.css">
<script src="https://tikzjax.com/v1/tikzjax.js"></script>
```

Případně zde můžeme uvést i další parametry, které umožní načíst určité balíčky v rámci TeXu nebo TikZ. Samotný kód obrázku v TikZ vkládáme mezi tag `<script>`

```
<script type="text/tikz">
...
</script>
```

Výstupem je statický obrázek. Stejně jako v případě systému Maxima i zde panují určitá omezení, ale TikZ má obecně širší využití.

3 Příklad 1 – statické vykreslení

Zadání hlavního ilustrativního příkladu zní: „Zapište předpis kvadratické funkce f definované grafem na následujícím obrázku. Přitom u členu x^2 v předpisu uvažujte koeficient $a = 1$.“ V testu pak úlohu studenti vidí jako na obrázku 1.

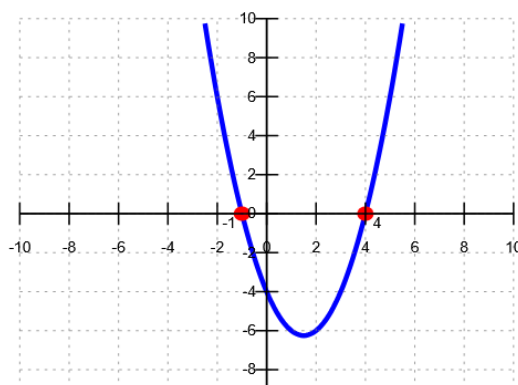
Úloha 1

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Zapište předpis kvadratické funkce f definované grafem na následujícím obrázku. Přitom u členu x^2 v předpisu uvažujte koeficient $a = 1$.

Question is missing tests or variants.

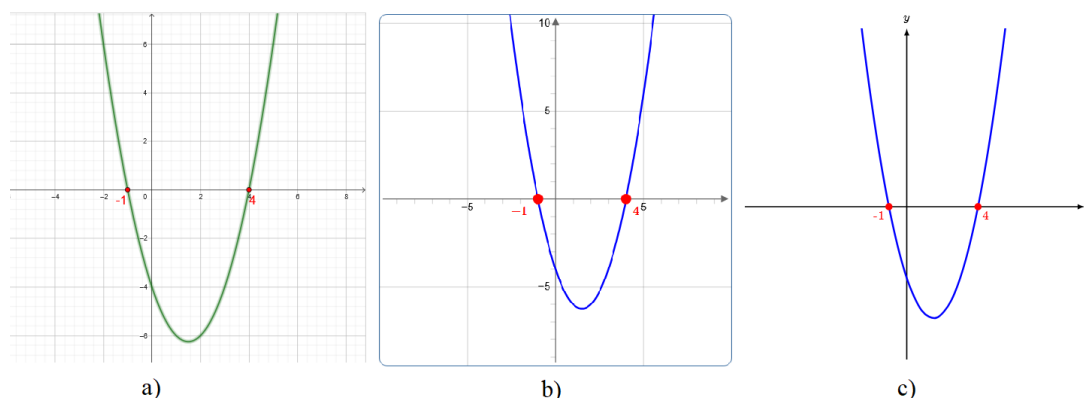


Zapište předpis funkce f .

Odpověď: $f : y =$

Obrázek 1: Příklad 1 – zadání úlohy

Graf na obrázku 1 byl vykreslen pomocí softwaru Maxima. Na tomto příkladu budeme pro srovnání ilustrovat, jak vykreslit obdobný graf i pomocí nástrojů GeoGebry, JSXGraph a TikZ. Jednotlivé výstupy lze vidět na obrázku 2.



Obrázek 2: Příklad 1 – a) GeoGebra, b) JSXGraph, c) TikZ

3.1 Maxima

Nejprve definujeme question variables. Náhodně, ale z vybrané množiny, generujeme průsečíky s osami, z nichž pak sestavujeme předpis kf kvadratické funkce, která se v zadání zobrazí. Body na osách pro zvýraznění průsečíků se souřadnými osami vykresluje jako kružnice. Rozpětí souřadných os je také v question variables. Není to sice úplně nutné, ale v případě dolní hranice osy y je hodnota y_{dm} generována ze vztahu pro výpočet vrcholu ze znalosti průsečíků. Ostatní parametry jsou konstantní, protože jsou dostačující pro graf kterékoliv kvadratické funkce definované z námi zvolených hodnot $d1$ a $d2$.

```
aa:1; /*koeficient u x^2 volime 1*/
d1:rand([-1,-2,-3,-4,-5]); /*levy prusecik s osou x*/
d2:rand_with_prohib(1,5,[-d1]); /*pravy prusecik s osou x*/

kf:aa*(x-d1)*(x-d2); /*predpis kvadraticke funkce generovany z pruseciku*/

/*body na osach vykresleny jako kruznice*/
bod1:[parametric, 0.2*cos(x)+d1, 0.2*sin(x), [x,0,2*%pi]]
bod2:[parametric, 0.2*cos(x)+d2, 0.2*sin(x), [x,0,2*%pi]]

/*nastaveni os*/
xdm:-10;
xhm:10;
ydm:-aa*(d1-d2)*(d1-d2)/4-2;
yhm:10;
```

V poli Text úlohy napíšeme zadání úlohy a vyvoláme graf. Odkazujeme se přitom na proměnné definované v question variables, proto je příkaz plot uvozen mezi symboly $\{@\dots\}$. Nakonec je vstupní pole pro odpověď.

<p>Zapište předpis kvadratické funkce (f) definované grafem na následujícím obrázku. Přitom u členu (x^2) v předpisu uvažujte koeficient $(a=1)$.</p>

Původní zadané hodnoty aa , $d1$, $d2$ se poté při vyvolání apletu v úloze změni na aktuální generované hodnoty. To zajistí nastavení `set="d1,d2,A__fixed,B__fixed,aa"`. Dvojitě podtržítka s označením „fixed“ za body zajistí, aby body A a B nešlo hýbat a graf tak zůstal statický. V textovém poli bude součástí zadání příkladu vyvolání apletu příkazem

```
[[geogebra set="d1,d2,A__fixed,B__fixed,aa"]]  
params["material_id"]="sw2fbddd"; [[/geogebra]]
```

3.3 JSXGraph

Graf ze zadání nyní vykreslíme pomocí JSXGraph. Využijeme stejné question variables jako v případě systému Maxima. V kódu grafu musí být question variables uvozeny symboly `{#...#}`. V poli text úlohy zapíšeme zadání a vytvoříme block pro JSXGraph s nastavením velikosti plátna, kde se vykresluje graf, nastavením os a dalším.

```
[[jsxgraph width='400px' height='400px']]  
var board = JXG.JSXGraph.initBoard(divid, { keepaspectratio : true,  
    boundingbox: [{#xdm#},{#yhm#}, {#xhm#},{#ydm#}], axis : true,  
    showCopyright: false, showNavigation:false });
```

Dále nadefinujeme potřebné body (circle) a jejich popisky (text). Nakonec vykreslujeme funkci `kf` a ukončíme plátno.

```
board.create('circle', [[#{d1#},0], [#{bodx1#},0]],  
    {visible:true,fixed:true, fillColor:'red',strokeColor:'red'});  
board.create('circle', [[#{d2#},0], [#{bodx2#},0]],  
    {visible:true,fixed:true, fillColor:'red', strokeColor:'red'});  
  
board.create('text', [#{d1-1.5#}, -0.7, function () { return  
    '\\(#{d1#}\\)'; }], {fixed:true, strokeColor:'red',useMathJax: true});  
board.create('text', [#{d2+0.4#}, -0.7, function () { return  
    '\\(#{d2#}\\)'; }], {fixed:true, strokeColor:'red',useMathJax: true});  
  
var f = board.jc.snippet('#{kf#}', true, 'x', true);  
board.create('functiongraph', [f,-10,10],{strokeWidth: 2,  
    strokeColor: 'blue',visible:true});
```

```
[[/jsxgraph]]
```

3.4 TikZ

Pro vykreslení grafu pomocí TikZ zavoláme nejprve nástroj TikZJax, viz podkapitola 2.4, a mezi tagy `script` vložíme kód TikZ. V kódu grafu musí být question variables uvozeny symboly `{@...@}`.

```
<script type="text/tikz">  
\begin{tikzpicture}[scale=0.5pt]
```

Vykreslíme souřadné osy jako rovné čáry zakončené šipkou, dále průsečíky s osami jako kružnice a jejich popisky.

```

\draw[line width=1pt,-latex] ({#xdm#},0)--({#xhm#},0) node[right] {$x$};
\draw[line width=1pt,-latex] (0,{#ydm#})--(0,{#yhm#}) node[above] {$y$};
\fill[red] ({#d1#},0) circle (2mm);
\fill[red] ({#d2#},0) circle (2mm);
\draw[red] ({#d1#},0) node[below left]{#{#d1#}};
\draw[red] ({#d2#},0) node[below right]{#{#d2#}};
    
```

Vykreslíme graf funkce (draw...plot), ale nejprve si nadefinujeme pomocí clip oblast, do které se graf vykreslí, aby se nepřesáhly výpočetní možnosti systému.

```

\begin{scope}
\clip ({#xdm#},{#ydm#}) rectangle ({#xhm#},{#yhm#});
\draw[blue,line width=1.5pt] plot[smooth,domain=-10:10]
(\x,{#aa#}*x*x-#{aa#}*#{d1#}*x-#{aa#}*#{d2#}*x+#{aa#}*#{d1#}*#{d2#});
\end{scope}
    
```

Zakončíme kód obrázku a celé TikZ.

```

\end{tikzpicture}
</script>
    
```

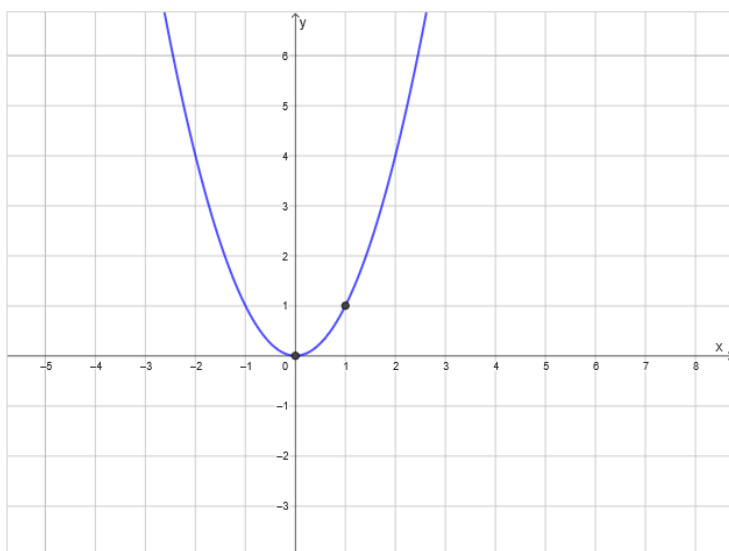
4 Příklad 2 – dynamické chování

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

 Úloha s vlaječkou



Znáznorněte v rovině graf kvadratické funkce ve vrcholovém tvaru $y = (x - 3)^2 + 1$. Potáhněte body pro získání požadovaného tvaru.

Obrázek 3: Příklad 2 – zadání úlohy

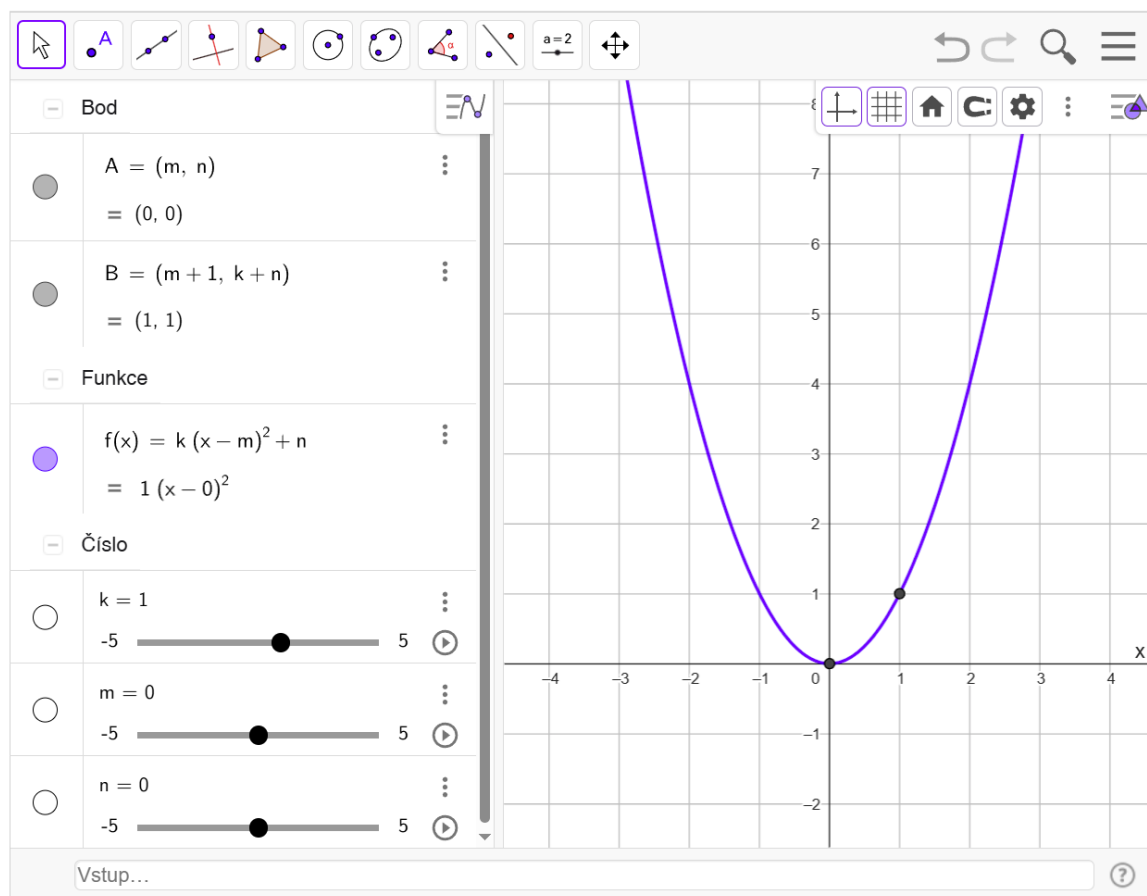
V dokumentaci a návodech pro STACK lze najít, jak vytvořit pomocí GeoGebry úlohu, kde student musí posunout přímkou, aby vyhovovala zadané rovnici (viz [6]). Stejná úloha slouží i

jako základní ukázka interaktivního grafu JSXGraph ve STACKu, a lze ji dohledat na stránkách [4], v odkazech na různé konference.

My jednoduché použití pro transformaci grafu kvadratické funkce na základě vrcholového tvaru ilustrujeme po jednotlivých krocích na úloze se zadáním: „Znázorněte v rovině graf kvadratické funkce ve vrcholovém tvaru $y = k(x - m)^2 + n$. Potáhněte body pro získání požadovaného tvaru (nejprve umístěte vrchol, poté druhý bod).“ Podobný typ úlohy jsme pro srovnání vytvořili i pomocí JSXGraph. Zadání úlohy, kterou popisujeme, vypadá v testu jako na obrázku 3, kde je graf vykreslený pomocí GeoGebry.

4.1 GeoGebra

Jak je u tvorby STACK úloh obvyklé, je vhodné začít od konce rozmyšlením celého procesu. Aby vyhodnocení správnosti úlohy bylo co nejjednodušší, rozhodli jsme se testovat správné umístění dvou bodů – vrcholu paraboly (A) a bodu „o jedna vedle“ (B). Nastavení GeoGebra apletu tedy obsahuje body A a B, jejichž konečná pozice se bude přenášet do STACKu. S ohledem na vrcholový tvar kvadratické funkce $y = k(x - m)^2 + n$ tedy budou body v souřadnicích $A = [m, n]$, $B = [m + 1, k + n]$. Viz obrázek 4.



Obrázek 4: Příklad 2 – GeoGebra aplet

V definovaných proměnných je nastaveno generování koeficientů (zde je otázkou, zda dovolíme, aby některé mohly být nulové nebo ne), předpis funkce a správné odpovědi.

```

mm:rand(9)-4; /*případně rand([-4,-3,-2,-1,1,2,3,4]) */
nn:rand(9)-4; /*případně rand([-4,-3,-2,-1,1,2,3,4]) */
kk:rand([-1,1]); /*případně rand([-4,-3,-2,-1,1,2,3,4]) */
ff:kk*(x-mm)^2+nn; /* předpis funkce pro zobrazení v úloze */
ta1:[mm,nn];
ta2:[mm+1,kk+nn];
    
```

Text úlohy obsahuje odkaz na aplet a jeho nastavení. Parametr `watch="A,B"` pošle hodnoty (souřadnice bodů) do STACKu, který na základě nich prověří správnost celkové odpovědi. Následuje zadání úlohy a ukrytí polí pro odpověď a validaci.

```

[[geogebra watch="A,B"]]
params["material_id"]="dk9z6e84";
[[/geogebra]]
    
```

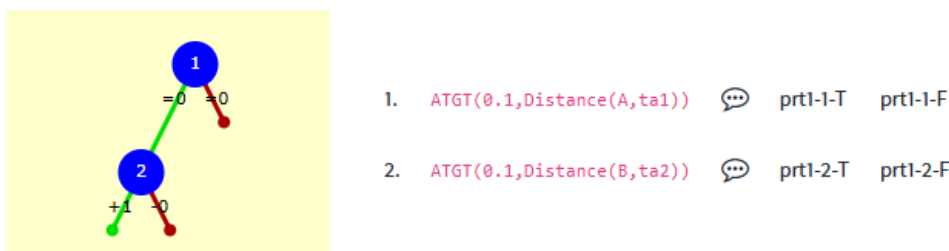
Znázorněte v rovině graf kvadratické funkce ve vrcholovém tvaru $(y = \{off\})$. Potáhněte body pro získání požadovaného tvaru (nejprve umístěte vrchol, poté druhý bod).

```

<p style="display:none">[[input:A]] [[validation:A]]</p>
<p style="display:none">[[input:B]] [[validation:B]]</p>
    
```

V nastavení Input: A, kromě povolení desetinných čísel, máme Model answer nastavený na `[float(mm),float(nn)]`, podobně u bodu B je Model answer `[float(mm+1),float(kk+nn)]`. Z důvodu různé reprezentace čísel uvnitř STACKu a GeoGebry nestačí vložit správné odpovědi `ta1` a `ta2`.

V nastavení Potential response tree (obrázek 5) používáme test `Num-GT` s nastavením `SAns` na hodnotě 0.1 a `TAns` na vzdálenosti posunutého bodu a správné odpovědi `Distance(A,ta1)` a `Distance(B,ta2)`.

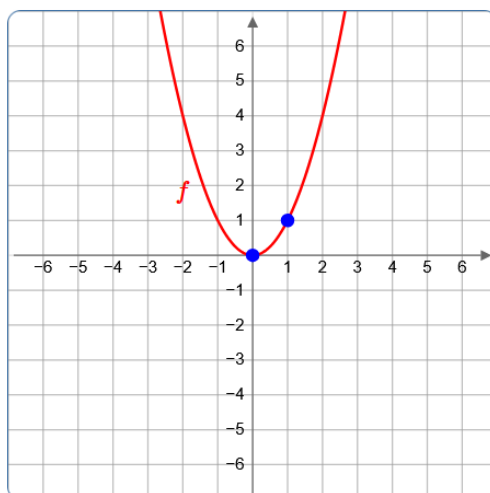


Obrázek 5: Příklad 2 – Potential response tree

4.2 JSXGraph

Za použití stejných proměnných question variables jako v případě GeoGebry lze vykreslit podobný graf i pomocí JSXGraph. Totéž platí i pro další nastavení a testování správnosti odpovědi. Kód úlohy se liší v podstatě jen ve způsobu vykreslování grafu.

Vytvoříme block pro JSXGraph s nastavením velikosti plátna, os a dalším. Důležité je uložit odpovědi studentů do proměnných, bodu A bude odpovídat `input-ref-ans1="inputans1"` a bodu B `input-ref-ans2="inputans2"`.



Obrázek 6: Příklad 2 – graf vytvořený pomocí JSXGraph

```
[[jsxgraph width = "360px" height = "360px" input-ref-ans1 = "inputans1"
  input-ref-ans2 = "inputans2"]]
JXG.Options.text.useMathJax = true;
JXG.Options.axis.ticks.minorTicks = 0;
var board = JXG.JSXGraph.initBoard(divid, {
  boundingbox: [-7, 7, 7, -7], axis: true, grid: true,
  showNavigation: false, showCopyright: false });
```

Dále nadefinujeme potřebné body a proměnné. Potřebujeme předpis funkce, kterou vykreslujeme, ten je vázán na souřadnice zvýrazněných bodů na grafu.

```
var p1 = board.create('point', [0,0], {color: 'blue', name: ' ',
  snapToGrid: true });
var p2 = board.create('point', [1, 1], {color: 'blue', name: ' ',
  snapToGrid: true });
var a = function(){return (p2.Y()-p1.Y())/(p2.X()- p1.X())/(p2.X()- p1.X());};
var f1 = function(x){return a()*(x-p1.X()*(x-p1.X()+p1.Y()));};
```

Další část kódu pro obrázek definuje, jak jsou na sebe vázány zvýrazněné body na grafu. Posouvat lze oběma body, bod druhý je vždy o 1 ve směru osy x doprava, ale záleží na nás, jaké nastavení zvolíme.

```
var dy = p2.Y() - p1.Y();
var dx = 1;

p1.on('drag', function() { p2.moveTo([p1.X()+dx, p1.Y()+dy]); });
p2.on('drag', function() { dx=p2.X()-p1.X(),dy = p2.Y() - p1.Y(); });
board.on('move', function(){ p2.moveTo([p1.X()+1, p2.Y()]); });
p2.on('drag', function() { p1.moveTo([p2.X()-1, p2.Y()-dy]); });
```

Vykreslíme graf funkce.

```
var curve = board.create('functiongraph', [f1],
    {name: function () {return '\\[f\\]';},strokeWidth: 2,
      strokeColor: 'red',visible:true,withLabel: true,
      label: {position:'lft',offset: [-20,10],fontSize:15,
        strokeColor: 'red'}} );
```

Vytvoříme provázanost odpovědi a příslušného bodu. Ukončíme plátno JSXGraph.

```
stack_jxg.bind_point(inputans1, p1);
stack_jxg.bind_point(inputans2, p2);
```

```
[[/jsxgraph]]
```

Výstup grafu vidíme na obrázku 6.

Závěr

V tomto článku jsme ukázali různé přístupy k vykreslování grafů v úlohách STACK v prostředí Moodle. Pro jednoduché statické grafy je nejnadhnější využití příkazů systému Maxima, které umožňují rychlou vizualizaci matematických funkcí přímo v otázkách. Pokud je cílem vytvoření interaktivních grafů, které reagují na vstupy studentů, nabízí se integrace GeoGebry nebo JSXGraph, které umožňují manipulaci s prvky grafu přímo v prostředí testu. TikZ poskytuje další alternativu pro přesné a profesionální zobrazení grafů, zejména v kontextu tištěných materiálů nebo předem připravených ilustrací.

Každá z těchto metod má své výhody i omezení. Zatímco Maxima poskytuje jednoduchou implementaci přímo v rámci STACKu, GeoGebra a JSXGraph umožňují vyšší míru interaktivity, ale vyžadují pokročilejší nastavení nebo propojení s externím nástrojem. TikZ je výborným nástrojem pro precizní tvorbu diagramů, avšak jeho využití v Moodle je limitováno potřebou externích pluginů. Výběr vhodné metody tedy závisí na konkrétním typu úlohy, didaktických cílech, ale také na zkušenostech a preferencích autora úlohy.

Reference

- [1] BRAY, B. TikZJax. [cit. 24. 3. 2025]. Dostupné z: <https://github.com/benrbray/tikzjax>
- [2] PESEK, I. JSXGraph Book. [cit. 24. 3. 2025]. Dostupné z: https://ipesek.github.io/jsxgraphbook/6_3_stack.html
- [3] PETERS, D. PGF/TikZ Manual. [cit. 24. 3. 2025]. Dostupné z: <https://tikz.dev/>
- [4] JSXGraph. [cit. 24. 3. 2025]. Dostupné z: <https://jsxgraph.org/wp/index.html>
- [5] Plots - STACK Documentation. University of Alberta. [cit. 24. 3. 2025]. Dostupné z: <https://eclass.srv.ualberta.ca/question/type/stack/doc/doc.php/CAS/Plots.md>.
- [6] STACK Docs. [cit. 24. 3. 2025]. Dostupné z: https://docs.stack-assessment.org/en/Specialist_tools/GeoGebra/GeoGebra/

ZAJÍMAVÉ ÚLOHY Z PRAVDĚPODOBNOTI II

RABASOVÁ Marcela

FS VŠB-TUO, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, 17. listopadu 2172/15, 708 00
Ostrava – Poruba
e-mail na hlavního autora: marcela.rabasova@vsb.cz

Abstrakt: Tento příspěvek volně navazuje na mé předchozí články, které rozvíjí téma ztraktivnění výuky předmětu Matematika III na Fakultě strojní Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, případně jiných předmětů ostatních vysokých škol, jejichž náplní je teorie pravděpodobnosti.

Klíčová slova: kombinatorika, pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost, nezávislé jevy

1 Úvod

Osnovy předmětu Matematika III na Fakultě strojní vypadají následovně:

1. Kombinatorika. Náhodné jevy, operace s nimi, pojem neslučitelnosti a úplnosti, jevové pole.
2. Definice pravděpodobnosti jevů - klasická, geometrická, statistická, axiomatická.
3. Podmíněná pravděpodobnost. Úplná pravděpodobnost. Bernoulliho posloupnost nezávislých jevů.
4. Náhodná veličina - diskrétní. Pravděpodobnostní a distribuční funkce.
5. Náhodná veličina - spojitá. Funkce hustoty a distribuční funkce. Charakteristiky náhodných veličin.
6. Základní typy rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny.
7. Základní typy rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny.
8. Zpracování statistického souboru.
9. Intervalové odhady - střední hodnota, rozptyl.

10. Testování hypotéz - testy parametrické.
11. Lineární regrese - regresní a korelační analýza.

Podstatným předpokladem úspěšného zvládnutí celého kurzu je pochopení základních principů teorie pravděpodobnosti a logických postupů, které se zde uplatňují. Proto je důležité, aby bylo do výuky zařazováno dostatek příkladů, které by nejen dobře ilustrovaly probíranou problematiku, ale které by rovněž zaujaly studenty svým tématem, aktuálností a spojitostí s praxí. V příspěvku se nejprve seznámíme se základními pojmy a vzorečky z teorie pravděpodobnosti, poté následuje několik zajímavých příkladů na jejich využití.

2 Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus je každý děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za kterých probíhá. Navíc se předpokládá, že je, alespoň teoreticky, neomezeně opakovatelný (např. hod kostkou).

Základní prostor Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu taková, že po provedení náhodného pokusu nastane právě jeden prvek Ω (např. u hodu kostkou $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Náhodný jev A je každá podmnožina Ω (např. u hodu kostkou $A = \{2, 4, 6\}$).

Jev opačný k jevu A značíme \bar{A} a definujeme jako jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A ($\bar{A} = \Omega - A$).

Jevy A a B *jsou neslučitelné (disjunktní)* právě tehdy, když nemohou nastat současně ($A \cap B = \emptyset$).

Jevy A_i , $i = 1, \dots, n$ *jsou navzájem (po dvou) neslučitelné* právě tehdy, když jsou neslučitelné všechny dvojice jevů A_i, A_j pro $i \neq j$.

Jevy A_1, \dots, A_n *tvorí úplný systém neslučitelných jevů* právě tehdy, když jsou po dvou neslučitelné a jejich sjednocením je množina Ω .

Definice 2.1 (Klasická (Laplaceova) definice pravděpodobnosti) *Je-li základní prostor Ω konečná neprázdná množina n elementárních jevů, které mají stejnou šanci výskytu, pak pravděpodobnost jevu A definujeme vztahem*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde m je počet výsledků příznivých jevu A a n je počet všech možných výsledků náhodného pokusu (počet prvků množiny Ω).

Věta 2.1 (O vlastnostech pravděpodobnosti)

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Definice 2.2 (Podmíněná pravděpodobnost jevu A jevem B) *Podmíněnou pravděpodobnost jevu A jevem B (nebo taky pravděpodobnost jevu A za předpokladu, resp. podmínky, že nastal jev B), kde $P(B) \neq 0$, značíme $P(A|B)$ a definujeme vztahem*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definice 2.3 (Nezávislé jevy) Platí-li $P(A) = P(A|B)$, nazýváme jevy A a B nezávislé jevy.

Věta 2.2 *Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.*

3 Příklady

První z uvedených příkladů je zajímavý svým překvapivým výsledkem a jeho zařazení do výuky by mohlo dopomoci přimět studenty k tomu, aby nedělali ukvapené závěry a svá rozhodnutí uměli odůvodnit matematickým výpočtem.

Příklad 3.1 *Aby otec povzbudil syna v jeho slibné tenisové kariéře, nabídne mu odměnu v podobě nejnovějšího iPhone, pokud vyhraje alespoň dva tenisové sety za sebou v třísetové sérii. Série se má hrát střídavě s otcem a šampionem klubu, tedy v pořadí otec-šampion-otec nebo šampion-otec-šampion. Šampion, kterého syn porazí s pravděpodobností 0,4, je lepší hráč než otec, jehož porážka synem má pravděpodobnost 0,8. Kterou sérii by si měl syn vybrat, pokud chce odměnu získat?*

Řešení: Označme následovně tyto jevy:

A ... syn získá odměnu,

A_i ... syn vyhraje i -tý set ($i \in \{1, 2, 3\}$),

A_1, A_2, A_3 ... nezávislé jevy

Spočítejme nejprve pravděpodobnost získání odměny v případě série „otec-šampion-otec“, která se jeví jako lepší volba:

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)] = \\ &= 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,384. \end{aligned}$$

A jaká je pravděpodobnost získání odměny v případě série „šampion-otec-šampion“?

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\ &= 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = 0,512. \end{aligned}$$

Druhá z možností má větší pravděpodobnost, syn by si tedy měl vybrat sérii „šampion-otec-šampion“, což by zřejmě bez znalosti tohoto výpočtu neudělal.

Další příklad vede k řešení úlohy, která je známá pod názvem „narozeninový problém“. Z poměrně jednoduchého zadání pak můžeme dojít k závěru označovanému jako „narozeninový paradox“.

Příklad 3.2 *Vyberme náhodně skupinu 23 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva lidé z této skupiny mají narozeniny ve stejný den?*

Řešení: Tento příklad nejsnáze vyřešíme pomocí jevu opačného. Označme následovně tyto jevy:

A ... alespoň dva lidé ze skupiny 23 lidí mají narozeniny ve stejný den,

\bar{A} ... žádní dva lidé ze skupiny 23 lidí nemají narozeniny ve stejný den

$$P(\bar{A}) = \frac{V_{23}(365)}{V'_{23}(365)} = \frac{365!}{(365-23)!} \simeq 0,493$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \simeq 0,507$$

Pravděpodobnost, že alespoň dva lidé z náhodně vybrané skupiny 23 osob mají narozeniny ve stejný den, je tedy vyšší než 50%, což je jistě překvapivé zjištění.

V teorii pravděpodobnosti je narozeninovým problémem označována úloha vypočítat minimální počet lidí, v jejichž skupině je alespoň 50% pravděpodobnost nalezení dvojice se stejným dnem narozenin. Narozeninovým paradoxem je pak označována skutečnost, že tento počet (23) je mnohem menší než intuitivní odhad. Pro skupinu 57 a více lidí je pak tato pravděpodobnost už více než 99%, postupně rostoucí až ke 100% pro 366 lidí (za předpokladu že pracujeme s rokem o 365 dnech).

Poslední z příkladů se týká tématu, které se u studentů těší největší oblibě, tématu hazardních her. Všechny hazardní hry jsou realizovány tak, aby vklad do hry byl větší než střední hodnota výhry, což zajišťuje provozovateli (sázkové společnosti, kasinu apod.) kladný zisk. I když je každá hazardní hra pro hráče nevýhodná, existují mezi nimi významné rozdíly. Ty spočívají zejména v tom, kolik procent vložené částky připadne v průměru provozovateli hry. Následující příklad pak přináší mimo jiné porovnání některých hazardních her právě z tohoto úhlu pohledu.

Příklad 3.3 *Stanovte pravděpodobnosti následujících výher:*

1. *výhra v jednom tahu Sportky v k -tém pořadí (pro $k \in \{1, \dots, 5\}$),*
2. *výhra ve francouzské ruletě*
 - (a) *při sázce na jedno číslo,*
 - (b) *při sázce na červenou/černou (případně na liché/sudé či nízké/vysoké číslo)*
3. *výhra v americké ruletě*
 - (a) *při sázce na jedno číslo,*
 - (b) *při sázce na červenou/černou (případně na liché/sudé či nízké/vysoké číslo)*

Řešení:

1. Ve hře Sportka sázející tipuje šest čísel ze čtyřiceti devíti. V každém tahu je nejdříve vylosováno šest čísel a poté jedno číslo dodatkové. Soutěžící získává výhru podle těchto pravidel:
 1. pořadí ... uhodnuto šest tažených čísel,
 2. pořadí ... uhodnuto pět tažených čísel a číslo dodatkové,
 3. pořadí ... uhodnuto pět tažených čísel,
 4. pořadí ... uhodnuta čtyři tažená čísla,
 5. pořadí ... uhodnuta tři tažená čísla.

Označme A_k jev "výhra v jednom tahu Sportky v k -tém pořadí", $k \in \{1, \dots, 5\}$.

$$P(A_1) = 1 \cdot \binom{49}{6}^{-1} \simeq 7,2 \cdot 10^{-8}$$

$$P(A_2) = \binom{6}{5} \cdot 1 \cdot \binom{49}{6}^{-1} \simeq 4,3 \cdot 10^{-7}$$

$$P(A_3) = \binom{6}{5} \cdot \binom{42}{1} \cdot \binom{49}{6}^{-1} \simeq 1,8 \cdot 10^{-5}$$

$$P(A_4) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} \cdot \binom{49}{6}^{-1} \simeq 9,7 \cdot 10^{-4}$$

$$P(A_5) = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} \cdot \binom{49}{6}^{-1} \simeq 1,8 \cdot 10^{-2}$$

2. U francouzské rulety je hrací kolo rozděleno na 37 dílů očíslovaných od 0 do 36. Z čísel od 1 do 36 má polovina červenou a druhá polovina černou barvu, polovina z nich je sudá a druhá polovina lichá a polovina z nich jsou čísla nízká (1-18) a druhá polovina čísla vysoká (19-36). Výjimku tvoří číslo nula, které má barvu zelenou a nepočítá se do žádné z výše uvedených skupin. Pravděpodobnost výhry je tedy:

(a) $\frac{1}{37}$

(b) $\frac{18}{37}$

3. U americké rulety je oproti francouzské ruletě jedno číslo navíc, je jím zelená dvojitá nula (00). Pravděpodobnost výhry je tedy o něco málo menší než u rulety francouzské, a to:

(a) $\frac{1}{38}$

(b) $\frac{18}{38}$

V případě rulety je navíc známá velikost výhry. Při výšce vkladu v je výhra $35 \cdot v$ v případě a) a $1 \cdot v$ v případě b). Můžeme tedy pro oba případy vypočítat očekávaný zisk kasina, jakožto střední hodnotu náhodné veličiny X (zisk kasina). Dosazením do vzorce

$$E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p(x_i)$$

dostáváme u francouzské rulety:

(a) $E(X) = v \cdot \frac{36}{37} - 35v \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37}v \simeq 2,70\%v$

(b) $E(X) = v \cdot \frac{19}{37} - v \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37}v \simeq 2,70\%v$

U americké rulety je díky jednomu zelenému políčku navíc očekávaný zisk kasina ještě větší, a sice:

(a) $E(X) = v \cdot \frac{37}{38} - 35v \cdot \frac{1}{38} = \frac{2}{38}v \simeq 5,26\%v$

(b) $E(X) = v \cdot \frac{20}{38} - v \cdot \frac{18}{38} = \frac{2}{37}v \simeq 5,26\%v$

Očekávaný zisk kasina z určité hazardní hry je označován jako „house edge“ (výhoda domu, kasina). House edge tedy udává, jakou část z každé hráčovy sázky získává dlouhodobě kasino. Hodnota house edge se liší hru od hry a musí být uvedena v herní listině každé hry. Pokud je například house edge nastavena na 5%, tak z každé hráčem vsazené koruny získává kasino dlouhodobě 5 haléřů. Pro hráče je samozřejmě výhodnější, když je house edge co nejnižší. Tabulka 1 ukazuje porovnání některých hazardních her z hlediska house edge [1].

Název hry	House Edge
Blackjack	0,28 %
Francouzská ruleta	2,70 %
Americká ruleta	5,26 %
Chuck-a-luck	7,9 %
Hrací automaty	od 20 % (v závislosti na typu)
Keno	25 %

Tabulka 1: House edge (výhoda kasina) pro různé hry

V české legislativě se nepoužívá pojem „house edge“, v nejobecnější rovině jej ale lze chápat jako statistickou výhodu provozovatele hazardní hry, tedy podíl z hazardní hry, který v dlouhodobém průměru připadne provozovateli. Zákon č. 186/2016 Sb. o hazardních hrách upravuje pro některé druhy hazardních her povinná rozmezí pro výherní podíl. Jedná se o statistickou hodnotu vyjadřující procentuální část z celkově přijatých vkladů, která je v dlouhodobém průměru a v souhrnu všech uskutečněných her ze souboru nejméně 100 000 her konkrétní hazardní hry nastavena k výplatě na výhrách. Tabulka 2 uvádí přehled zákonem stanovených rozmezí pro výherní podíly či úhrnné ceny výher v České republice (totalizátorová hra je zde definována jako hazardní hra postavená na principu uhodnutí příležitosti se společným fondem sázejících). Obecně se tak u nás standardní house edge online heren pohybuje v řádu jednotek procent, u kamenných heren může dosahovat i desítek procent nebo maximálního povoleného limitu. Nelegální herny, které nemají licenci a porušují tedy zákon už jen samotnou svou existencí, nastavují u svých her i enormní house edge, který se může pohybovat i nad 50%.

Druh hazardní hry	Zákonem stanovený výherní podíl / stanovená úhrnná cena výher (procenta z herní jistiny/vkladů)
Technická hra (např. ruleta)	75 % - 100 %
Loterie	40 % - 80 %
Tombola	40 % - 80 %
Bingo	40 % - 80 %
Totalizátorová hra	40 % - 90 %

Tabulka 2: Zákonem stanovený výherní podíl / stanovená úhrnná cena výher

4 Závěr

Závěrem lze konstatovat, že zařazení příkladů s praktickým a zajímavým využitím do výuky předmětu Matematika III představuje efektivní nástroj, jak přiblížit studentům statistiku jakožto užitečný nástroj, který nachází uplatnění v různých oblastech života. Pokud jsou tyto

příklady vhodně zvolené a nejsou příliš náročné, může to studenty významně povzbudit v jejich studiu, stávají se aktivnější a zapojují se více do učebního procesu, což vede k hlubšímu porozumění a lepšímu zapamatování učiva a k dosažení lepších studijních výsledků.

Reference

- [1] Michael Shackleford. *House Edge*. Dostupné online: <https://wizardofodds.com/gambling/house-edge/> [Přístup: 6. května 2025].

ANALÝZA CHÝB ŠTUDENTOV V PÍ SOMNÝCH PRÁCACH Z OBLASTI INTEGRÁLOV

JANÍKOVÁ Miriam, STAŠOVÁ Olga

Fakulta elektrotechniky a informatiky Slovenskej technickej univerzity v Bratislave,
Ústav informatiky a matematiky, Ilkovičova 3, 841 04, Bratislava
miriam.janikova@stuba.sk

Abstrakt: V príspevku sa zameriavame na analýzu chýb študentov v písomných zápočtových prácach z oblasti integrálov, ktoré sú kľúčovou témou vo vysokoškolskom technickom vzdelávaní. Výsledky ukazujú, že medzi najčastejšie chyby patrí nesprávny výber integračnej metódy, nepozornosť pri výpočtoch a problémy s aplikáciou základných integračných techník. Skúmali sme aj rozdiely medzi slovenskými a ukrajinskými študentmi. Na základe zistení z našej analýzy navrhujeme zlepšenia v didaktickom prístupe.

Kľúčová slova: integrálny počet, technické vzdelávanie, didaktika matematiky, analýza chýb

1 Úvod

Integrály predstavujú jednu z nosných tém matematiky vo vysokoškolskom technickom vzdelávaní. Výpočet určitých a neurčitých integrálov, zvládnutie metód ako substitúcia, per partes alebo rozklad racionálnych funkcií sú pre budúceho inžiniera kľúčové. Napriek tomu často dochádza k systematickým chybám, ktoré sú pre pedagógov významnou spätnou väzbou. Chyby v riešení poukazujú na hlbšie didaktické problémy v procese osvojovania si základných pojmov a metód integrálneho počtu.

Výskum v oblasti didaktiky matematiky opakovane poukazuje na to, že integrály sú pre študentov náročné najmä kvôli ich viacstupňovému riešeniu a potrebe správnej voľby metódy (napr. per partes, substitúcia). Podľa Tall a Vinnera [3] študenti často nerozlišujú medzi intuitívnym chápaním matematického pojmu („concept image“) a formálnou definíciou („concept definition“), čo vedie k systematickým chybám. Ďalšie výskumy (napr. Artigue [1] Rasslan & Tall [2]) ukazujú, že výučba integrálneho počtu často prebieha bez dostatočného prepojenia na geometrické, fyzikálne či aplikované súvislosti, čo obmedzuje porozumenie pojmu určitého integrálu. Z didaktického hľadiska je preto dôležité identifikovať konkrétne typy chýb, ktoré študenti robia, analyzovať ich početnosť, hľadať ich príčiny a možnosti ich odstránenia.

Cielom tohto príspevku je analyzovať najčastejšie chyby študentov v rámci zápočtových

písomných prác z oblasti integrálov a navrhnutí odporúčania pre zlepšenie didaktického prístupu.

2 Popis dát a ich analýza

2.1 Popis dát

Analyzovali sme písomnú zápočtovú prácu z predmetu Matematika 2, ktorú písalo 209 študentov Fakulty elektrotechniky a informatiky Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Títo študenti sú zapísaní na odbory Informačné a komunikačné technológie, Elektronika a Robotika a kybernetika. Obsahom zápočtovej práce boli určité a neurčité integrály. Predmet Matematika 2 má dotáciu prednáška 2 hodiny týždenne a cvičenie tiež 2 hodiny týždenne.

Zápočtové práce boli vo verziách A , B , C , D , E a F , pričom mohli študenti získať max. 20 bodov.

V každej skupine boli 4 úlohy, a to:

1. úloha – obsahovala 4 jednoduché integrály, spolu za 4 body
2. úloha – skupiny $A - D$: 1 integrál riešiteľný pomocou rozkladu na parciálne zlomky, skupiny E a F : 2 integrály, jeden riešiteľný pomocou doplnenia na štvorec typu „ $\ln + \arct$ “ (4 body) a jeden s jednoduchou goniometriou (2 body)
3. úloha - 1 integrál zameraný na riešenie pomocou substitučnej metódy (skup. A , B , F : 5 bodov, skup. C , D , E : 4 body)
4. úloha - 1 integrál zameraný na riešenie pomocou metódy per partes (skup. A , B , F : 5 bodov, skup. C , D , E : 6 bodov)

Pri analýze dát sme okrem skupiny písomnej práce brali ohľad aj na štátnu príslušnosť študentov, a to z dôvodu vysokého zastúpenia študentov z Ukrajiny. Zaujímalo nás, či sa v rámci chýb slovenských a ukrajinských študentov budú vyskytovať výraznejšie rozdiely. Z celkového počtu 209 študentov bolo 127 zo Slovenska, 68 z Ukrajiny a 14 z iných krajín (Ruská federácia, Bielorusko, Srbsko a i.).

2.2 Analýza dát

Úloha 2.1 maximálny možný bodový zisk: 4

priemerný bodový zisk: 3, 43 (85,8%)

priemerný bodový zisk SR : 3, 41

priemerný bodový zisk UA: 3, 45

Najčastejšie sa vyskytujúcou chybou je chyba pri jednoduchom integrovaní, t.j. chyba v tej časti príkladu, kedy už stačí iba použiť integračný vzorec. Takéto chyby robili aj študenti, ktorí zvládli nasledujúce príklady vyžadujúce náročnejšie integračné metódy. Prevažne sa tu vyskytovala chyba integrovania cez prirodzený logaritmus v úlohách typu

$$\int \frac{1}{x^a}; \quad a \in \mathbf{R} \wedge a \neq 1$$

a nesprávne integrovanie konštanty. Okrem drobných numerických chýb, chýb z nepozornosti, zlého krátenia a rozdelenia zlomkov alebo vyhodnotenia funkčných hodnôt goniometrických funkcií sa s vysokou mierou výskytu objavujú chyby pri práci s racionálnym exponentom (a taktiež

druh chyby	početnosť výskytu (abs.)	početnosť výskytu (v %)	početnosť výskytu SR (v %)	početnosť výskytu UA (v %)
chyba v jednoduchom integrovaní	50	23,9	24,4	23,5
malá chyba (numerická, znamienko a pod.)	36	17,2	19,7	13,2
chyba pri práci s rac. exponentom	33	15,8	16,5	14,7
+/- c	24	11,5	13,4	8,8
nezvládnutie 1-ného z integrálov	21	10,0	9,4	11,8
chyba v dosadení hraníc určitého integrálu	12	5,7	3,9	10,3
nezvládnutie 2-ch integrálov	3	1,4	1,6	1,5

Tabulka 1: Početnosť chýb v 1. úlohe

aj problém so sčítaním 2-ch zlomkov). Túto skutočnosť bude do budúcnosti potrebné zohľadniť v rámci úvodných opakovacích matematických kurzov a taktiež v rámci matematických doučovaní, ktoré náš ústav zabezpečuje.

Čo sa týka porovnania slovenských a ukrajinských študentov, výraznejší rozdiel pozorujeme v položke malých chýb, ktorých robili ukrajinskí študenti menej, mali však väčší problém s dosádzaním hraníc pri určitom integráli.

Úloha 2.2 maximálny možný bodový zisk: 6

priemerný bodový zisk: 3, 41 (56,8%)

priemerný bodový zisk SR : 3, 26

priemerný bodový zisk UA: 3, 79

V skupinách A až D bol v 2. úlohe jeden integrál riešiteľný pomocou rozkladu na parciálne zlomky. Test so skupinou A až D malo 138 študentov a najčastejšou chybou bol v tomto prípade nesprávny rozklad integrandu na parciálne zlomky (počet výskytov: 29). Ďalej študenti zvolili nesprávny postup a k rozkladu na parciálne zlomky sa ani nedostali, alebo neuviedli žiaden výpočet (počet výskytov: 28). Treťou najčastejšou príčinou neúspechu bol síce správne zvládnutý rozklad na parciálne zlomky, ale nedointegrovanie alebo nesprávne zintegrovanie rozloženého integrandu (počet výskytov: 18).

Test so skupinou E alebo F malo 71 študentov. V skupinách E a F mali študenti vyriešiť 2 integrály. Prvý bolo potrebné v menovateli upraviť na štvorec a viedol k riešeniu typu „ln+arctg“. Maximálny bodový zisk zaň boli 4 body. Druhý príklad bol jednoduchý integrál s goniometrickými funkciami, za ktorý mohli študenti získať najviac 2 body.

Práve prvý z uvedených príkladov robil študentom problémy, najčastejšie študenti volili nesprávny alebo žiadny postup (počet výskytov: 53). Iba 8 študentov získalo 5 až 6 bodov, čo je málo cez 11%, zatiaľ čo v skupinách A až D získalo 5 až 6 bodov 42 študentov, čo je málo cez 30%. Do budúcnosti bude zrejme potrebné sa viac zamerať na tento typ príkladov.

Medzi chybnými riešeniami slovenských a ukrajinských študentov sme nespozorovali výraznejšie odchýlky, ukrajinskí študenti však boli v riešení tejto úlohy úspešnejší.

Úloha 2.3 maximálny možný bodový zisk: 4 (C, D, E)/5(A, B, F)

priemerný bodový zisk: 2,28/2,81 (57,0%/56,2%)

priemerný bodový zisk SR : 2,29/2,95

priemerný bodový zisk UA: 2,36/2,83

druh chyby	početnosť výskytu (abs.)	početnosť výskytu (v %)	početnosť výskytu SR (v %)	početnosť výskytu UA(v %)
nesprávny alebo žiaden postup	32	15,3	13,4	11,8
nesprávny výber integračnej metódy	31	14,8	14,2	14,7
malá chyba (numerická, znamienko a pod.)	24	11,5	14,2	8,8
nesprávny postup v úpravách (napr. rozdelenie súčtu pod odmocninou a pod.)	20	9,6	10,2	10,3
správne zvolená metóda, nesprávny výpočet	18	8,6	9,4	8,8
nesprávny rozklad súčinu v integráli	5	2,4	3,1	1,5
nedokončený výpočet	3	1,4	1,6	1,5

Tabulka 2: Početnosť chýb v 3. úlohe

Každá skupina mala v 3. úlohe 1 integrál zameraný na integráciu pomocou metódy substitúcie. Okrem najčastejšej chyby, kedy študenti volili úplne nesprávny alebo žiadny postup, bol veľkým problémom výber vhodnej integračnej metódy. Až 31 študentov sa snažilo dané príklady vyriešiť pomocou metódy per partes, čo ale nevedlo k správnejmu výsledku, a v postupe sa buď pomýlili, alebo príklad nedoriešili.

Okrem malých chýb napr. z nepozornosti študenti používali nesprávne úpravy ako rozdelenie súčtu pod odmocninou na súčet dvoch odmocnín alebo rozklad súčinu v integráli na súčin dvoch integrálov.

Medzi riešeniami (či už správnymi alebo chybnými) slovenských a ukrajinských študentov sa nevyskytli výraznejšie rozdiely, ukrajinskí študenti robili menej malých chýb.

Úloha 2.4 maximálny možný bodový zisk: 6 (C, D, E)/5(A, B, F)

priemerný bodový zisk: 2,75/2,93 (45,8%/58,6%)

priemerný bodový zisk SR : 2,70/2,89

priemerný bodový zisk UA: 2,94/3,23

druh chyby	početnosť výskytu (abs.)	početnosť výskytu (v %)	početnosť výskytu SR (v %)	početnosť výskytu UA(v %)
malá chyba (numerická, znamienko a pod.)	56	26,8	22,8	36,8
chyba v per partes	50	23,9	26,7	19,1
nesprávny alebo žiaden postup	36	17,2	16,5	16,2
nesprávny rozklad súčinu v integráli	15	7,2	7,1	5,9
nedokončený výpočet	14	6,7	4,7	8,8
chyba v jednoduchom integrovaní	9	4,3	3,9	4,4
chybne zvolená metóda	3	1,4	1,6	1,5

Tabulka 3: Početnosť chýb v 4. úlohe

Každá skupina mala v 4. úlohe 1 integrál zameraný na integráciu pomocou metódy per partes. V skupinách C, D, E bolo potrebné per partes použiť $2x$, v skupinách A, B, F stačilo $1x$.

Študenti robili najčastejšie malé chyby ako zabudnutý koeficient, zátvorka alebo zlé znamienko, ďalej nesprávne používali metódu per partes (najčastejšie sa stávalo, že obe zložky zderivovali, príp. zintegrovali). Tak, ako aj v 3. úlohe, rozkladali súčin v integráli na súčin dvoch

integrálov. Výrazne menej často sa tu však vyskytuje chyba z dôvodu nesprávne zvolenej integračnej metódy, čo nám len potvrdzuje doterajšie skúsenosti, že študenti majú tendenciu používať oveľa častejšie metódu *per partes* než substitúciu bez ohľadu na vhodnosť jej použitia.

3 Návrhy na skvalitnenie výuky

V rámci úvodných opakovacích kurzov a poskytovaných doučovaní sa viac zamerať na:

- prácu s racionálnym exponentom
- prácu s goniometrickými funkciami
- operácie so zlomkami, krátenie v zlomkoch

V rámci prednášok a cvičení z predmetu Matematika 2 a v rámci poskytovaných doučovaní sa viac zamerať na:

- integrovanie pomocou vzorcov
- riešenie integrálov lomenej racionálnej funkcie typu „ $\ln + \arctg$ ”
- vhodný výber integračnej metódy a súčin v integráli

Záver

Výsledky analýzy chýb študentov v písomných zápočtových prácach z oblasti integrálov poukazujú na niekoľko kľúčových problémov, ktoré ovplyvňujú úspešnosť študentov. Medzi najčastejšie chyby patrí nesprávny výber integračnej metódy, nepozornosť pri výpočtoch, a problémy s aplikovaním základných integračných metód, ako je substitúcia a *per partes*. Ďalším výrazným problémom sú nedostatočné vedomosti z oblasti stredoškolskej matematiky.

Rozdiely medzi slovenskými a ukrajinskými študentmi neboli výrazné a podrobnejšie ich analyzujeme v príspevku.

Na základe zistení navrhujeme zamerať sa na posilnenie výučby, úvodných kurzov a doučovaní v oblastiach ako práca s racionálnymi exponentami, goniometrickými funkciami, operácie so zlomkami a správny výber integračných metód. Implementácia týchto zmien môže viesť k zlepšeniu porozumenia a úspešnosti študentov v oblasti integrálneho počtu.

Reference

- [1] ARTIGUE, M. 2012. Teaching and learning analysis. In: *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education*.
- [2] RASSLAN, S., TALL, D. 2002. Students' understanding of the definite integral concept. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*.
- [3] TALL, D., VINNER, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

MSLS AND THE POWER OF FEEDBACK, PART 2: RIGHT TO AN EFFECTIVE FEEDBACK

REBENDA Josef

Brno University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Communication,
Department of Mathematics, Technická 2848/8, 616 00 Brno, and CEITEC BUT, Purkyňova
656/123, 61200 Brno
e-mail na hlavního autora: rebenda@vutbr.cz

Abstrakt: In an earlier work, mathematics and statistics learning support (MSLS) service was considered as an agent providing effective feedback which should be an integral part of the process of learning mathematics. The conclusion was that MSLS provision perfectly fits within constructivist approach to feedback and should be promoted with this perspective. In this paper, we first recall the main challenges to MSLS provision. Then we include some sustainability strategies and real world examples of MSLS service developments. Finally, we introduce the concept of “right to an effective feedback” that could be an option how to promote the perspective of MSLS as and integral part of a university.

Klíčová slova: mathematics and statistics learning support, constructivist approach to feedback, learner-centred feedback, feedback as a part of the learning process, right to an effective feedback

1 Introduction

The paper is a continuation of the conference paper [6] titled “Mathematics and Statistics Learning Support and the Power of Feedback”. The preceding paper was concluded by the following invitation to act: “We should push forward the cultural shift in the views held of MSLS centres by universities and by the centres themselves to ensure that MSLS services play their full role in universities.”

In this paper, we continue with the idea of the view of MSLS as an integral part of the learning process where feedback could be provided in an efficient way. In Section 2, we start by identifying the challenges that many MSLS facilities all over the world are confronted with. In Section 3, we continue by exploring the possibilities of overcoming those challenges and promoting sustainability of MSLS services within the current MSLS framework. In Section 4, we present several examples of recent development of a MSLS provision. In Section 5, we introduce the main concept of the paper, “right to an effective feedback.” Finally, we conclude

by a new call for action.

2 Challenges to MSLS provision

The main idea of the paper [6] was that MSLS services have the potential to address the needs for effective feedback provision in learning mathematics. Practically, it means that, without noticing it, universities and other higher education institutions have developed an environment where all the requirements of the constructivist approach to feedback as described in [6] can be fulfilled. The key part is “without noticing it.” Consequently, faculty or university managements do not consider MSLS services being an integral part of the faculty or the university, which is often reflected in the (lack of) institutional and/or financial support or even termination of the services.

Further, it was mentioned in [6] that “the focus of MSLS tends to be on building mathematical and statistical fitness, confidence and transferability, all with reference to specific courses being taken by the students”. That could be a kind of contradiction in some cases when the assessment is oriented on mathematical performance rather than mathematical fitness. Students then focus on exams, that is, performance only, and have little interest in building mathematical fitness and confidence. Their motivation to seek feedback is limited and usually the feedback itself does not continue beyond the task level (feedback about the task, or FT, see [6]).

Another statement in [6] says that “learning progress is measured by the learner’s satisfaction, and that is the part where the learner’s feedback comes into action. It is very important because it contributes to improvement of the quality of provided services, and to tutors’ learning as well.” However, many students, especially in their first year, encounter the MSLS services for the first time in their life. Usually, they are positively surprised that something like MSLS is available, and give feedback that is mostly positive. Again, this could lead and often leads to a paradoxical situations when tutors turn down invitations to training events because the learners’ feedback is mostly positive, so “all is good” and there is no need to “waste time” on training.

Let us summarise the challenges identified in the preceding paragraphs:

- How to motivate university management to consider MSLS services being an integral part of the university?
- How to motivate students to seek feedback?
- How to motivate tutors to become more interested in professional development in the form of regular training events?

It can be deduced from the text in this section that all three questions, representing serious challenges, have the same foundation: it is the non-formality of the MSLS services. Recall the definition of MSLS from [4]: MSLS can be defined as “any extra, optional, non-compulsory programme or facility that assists students in developing mathematical and/or statistical confidence and skills during their enrolled study in a degree course, whether undergraduate or postgraduate, but with no credit associated with the learning support programme. Sometimes, such learning support may be aligned with specific components of the degree course, but its assistance is optional and supplementary to the designated activities of the programme attaining credit towards a degree.” Since the MSLS services are extra-curricular, students are not

obliged to use them, tutors are not interested in professional development, and university managements do not feel any responsibility for developing or maintaining the services. Hence, we observe another paradoxical phenomenon when the main strength, that is, the non-formality, is at the same time the main weakness of the MSLS concept.

3 Sustainability strategies within the current MSLS framework

In this section we will reflect about how to achieve sustainability within the framework of the MSLS concept as defined in [4].

The position of MSLS is usually based on understanding of benefits and impact of the MSLS service by faculty or university management. It might also be based on the profit/cost ratio in some cases. Therefore, it is important to collect evidence that the MSLS services actually help students. There are graduates who would not have completed their degree without using the MSLS, and it is good to ask them if they would be willing to write a brief testimony. It should be pointed out that a university's budget benefits from reducing students' dropout rate. Also, there is research literature available on such topics which could support understanding the benefits of MSLS provision by the management.

University staff are often in the position that they have not enough time. To allocate more time on MSLS for them, grant funding can be used to pay staff expenses. If money can be sourced, or bid for, to create a deliverable outcome, which could be branded by the funder, then staff might be more motivated to contribute or collaborate.

It is always helpful to have a good "track record" with funders who might have more sources of money available in the future. One possibility is to informally contact the key decision-makers at the funding agency with a project update. For example, to give evidence, if there is any, of sustainability, impact and growth beyond the funding period.

Another motivator could be a system of professional development such as the Fellowship of the Higher Education Academy (FHEA) scheme in the UK. In this sense, getting involved with the **sigma** Network, a professional association for those working in (or with an active interest in) mathematics and statistics support in higher education, was interesting for MSLS practitioners in the UK. Attending and contributing to network meetings was a specific source of evidence for meeting the professional standards required by the FHEA scheme.

A strong pre-requisite of success is having a group of motivated maths support "activists" who could lead by example, and be prepared to work on behalf of the sector as a whole. Sometimes only few people want to follow, but nevertheless the activism is rewarding for those who are committed to their mission of supporting students on their learning journey.

Summary of the strategies for sustainability of an MSLS service within the framework of the MSLS concept as defined in [4] could be formulated in one sentence: Convincing management, students, tutors, funders, basically everybody including ourselves, the MSLS practitioners. Such strategies can be more or less successful, which can be observed in the following examples.

4 Examples of success and decline of MSLS services

A rather successful example of sustainable MSLS service can be found at Coventry University in the UK. The MSLS facility called **sigma** Maths and Stats Support began in the early 1990s and has developed into a large and robust service. The services offered by the MSLS

facility today include the following means of support [1]:

- Free access for students across all undergraduate and postgraduate degree programmes as well as all research students needing help with mathematics or statistics;
- Large Maths and Stats Support Centre in the Library open for over 35 hours across 6 days a week during semester and reduced hours otherwise;
- One-to-one online support available for 25 hours per week for those who prefer this;
- Drop-in sessions with no bookings required, just walk in to the Maths and Stats Support Centre or visit the **sigma** website and we will help;
- One-to-one pre-booked appointments (online or in person) for mathematics if you require more extensive support;
- Learning resources to take away and core textbooks for reference, covering a wide range of topics in mathematics and statistics;
- Online workshops to revise and consolidate pre-university mathematical topics;
- Numerical Reasoning workshops;
- Statistics Advisory Service for students using statistics in their studies or research.

However, it should be noted that today's success of the MSLS facility was based on the personal efforts and long-term contribution and commitment of Professor Duncan Lawson who was at the beginning of the **sigma** in 1990s and has been awarded Times Higher Award for his work in the MSLS in 2011.

Another story of success with a different ending can be found at La Trobe University in Australia. The paper [2] describes the expansion of a model of cross-disciplinary mathematics support, entitled the Maths Skills Programme, that had grown to include a suite of programmes for many and varied disciplines, accommodating diverse needs. Those Maths Skills Programmes ranged from Physics, Chemistry and Biology through various programmes on topics in mathematics and statistics to programmes like Nursing, Engineering, and Sports Biomechanics. The paper presents a study based on data from 2010 to 2018 with a very positive and encouraging outcomes. In Conclusion, it is mentioned that “the study has shown that the model of support is sustainable, and adaptable to various disciplines” and that the “commitment became a successful and rewarding way forward at our university and it was particularly appreciated by the students.” However, currently there is no information about the Math Skills Programmes on the university website which indicates that this successful programme is no longer available.

Similar situation happened at Masaryk University in Brno, the Czech Republic. The Maths and Stats Support Centre under the Faculty of Economics and Administration was the first MSLS facility established in the Czech Republic [3]. Even though the centre operated for years and there is evidence that it helped students in accommodating their needs significantly, support from the faculty management has been discontinued and the facility has been closed recently.

Further, there is anecdotal evidence of similar developments at other universities collected in spring 2025 through conversations during **sigma** Coffee Mornings, informal online meetings organised by practitioners connected with the **sigma** Network. Colleagues from the UK and

Australia shared their experience with MSLS services being reduced, turned down or terminated.

The preceding examples suggest how we should look at the current situation from a more general perspective. The MSLS services established in line with the concept defined in [4] are under pressure at many universities currently, and their position at universities is rather fragile in general.

We recall that the position of MSLS is usually based on understanding of benefits and impact of the MSLS service by faculty or university management. It might also be based on the profit/cost ratio in some cases. However, the examples described above illustrate that such approach is not sustainable. We, the practitioners, know that the MSLS services help students, and we also know that there are graduates who would not have completed their degree without using the MSLS. Some of the practitioners even might have collected evidence for that. There might be calculations how much money it saves/brings to the university to prevent students from dropping out. There is research published on such topics. However, there is nothing that can stop managements from cutting down or terminating the MSLS provision, just because MSLS services are extra-curricular, by definition.

5 Right to an effective feedback

We need to start looking at MSLS from a different perspective. The key question is: How can we make MSLS an integral part of curriculum? We will reflect about how to transform the concept of MSLS and all the related good practice into a part of the curriculum or the whole system.

Some institutions have tried “embedding” the MSLS into courses or modules. Such embedding could have various forms and outcomes that might be more or less positive, as reported in the paper [5]. However, it is important to note that courses or modules can be redesigned and the MSLS part could be cut away any time anyway. It follows that we need a stronger idea of sustainability that does not depend on lecturers, departments, faculties or universities.

One of the options could be to consider feedback as an integral part of curriculum, or higher education studies in general. We can call it “the right to an effective feedback.” If we could somehow incorporate this “right” into academic culture and practice, we could then argue that MSLS provides a suitable and natural environment where this “right” could be fulfilled for those learners who need personal, specific, tailored feedback.

There were several open questions raised in the report [5], one of them being: “Should one-size fit all?” The answer comes naturally, one size does not fit all. For many students automated feedback provided through an LMS, a computer aided assessment system or even a sort of Artificial Intelligence would be the most effective, or effective enough. However, there will always be learners who need something else, in particular, personal feedback by a human tutor. That is where the “the right to an effective feedback” should be applied and where we, MSLS support practitioners and the networks like **sigma** Network or Pi Network, can and should contribute by providing effective feedback and the means for professional development.

Another open question is: “Will students use their right to an effective feedback? If they do, how?” It is obvious that different students can choose different approaches, depending on their motivation to seek feedback. As we observed in Section X, such motivation is often limited due to the discrepancy between learning goals and the content of exams. The situation could be improved by delegating more responsibility for their learning on students. That could be

promoted by engaging them in defining their learning goals. If we continue in this direction, it might lead to the need for personalised learning goals tailored to individual students. Consequently, forms and milestones of assessment or evaluation of students performance should be reconsidered.

Conclusion

We conclude by claiming that the conclusion of the preceding paper [6] remains valid: “MSLS provision perfectly fits within constructivist approach to feedback and should be promoted with this perspective.” This perspective should be accepted within the context of the role of MSLS in students’ learning in general as proposed in this paper, that is, the provider of personal, specific, tailored and effective feedback. However, such role should be defined formally in the academic hierarchy on a level that is higher than the university level. To achieve this, we should push forward the cultural shift in the views of learning goals and assessment by academia as a whole: by education authorities, university managements, lecturers and students. Professional networks of MSLS practitioners like **sigma** Network or Pi Network should play a crucial role in this cultural shift.

Reference

- [1] Coventry University website (2025). <https://www.coventry.ac.uk/study-at-coventry/student-support/academic-support/sigma-maths-and-stats-support/>
- [2] JACKSON, D. C. (2022). Sustainable multi-disciplinary mathematics support. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53:6, 1343-1362. DOI: 10.1080/0020739X.2020.1819572
- [3] KRÁLOVÁ, M., CHVÁTAL, M., MATULOVÁ, M. & ČERNÁ, T. (2023). Math and Stats Support Centre at Masaryk University in Brno. In *Handbook of Good Practice in Providing Mathematics and Statistics Learning Support*, 53-61. <https://msls-net.ceitec.cz/files/463/263.pdf>
- [4] MacGILLIVRAY, H. & CROFT, T. (2011). Understanding evaluation of learning support in mathematics and statistics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42:2, 189-212. DOI: 10.1080/0020739X.2010.519801
- [5] MEHBALI, M. & ROBERTS, L. (2017). Maths Support provision through embedded classes at LSBU. *MSOR Connections*, 16(1), 3-14. DOI: 10.21100/msor.v16i1.632
- [6] REBENDA, J. (2023). Mathematics and Statistics Learning Support and the Power of Feedback. In *Sborník z 28. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*, 106-111, ISBN 978-80-248-4681-1. DOI: 10.31490/9788024846811

Název: Sborník z 30. semináře Moderní matematické metody v inženýrství

Editoři: doc. RNDr. Petr Vodstrčil, Ph.D. a kolektiv

Autoři: Kolektiv autorů

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2025, 1. vydání

Počet stran: 113

Vydala: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Neprodejné

ISBN 978-80-248-4824-2 (on-line)

DOI 10.31490/9788024848242