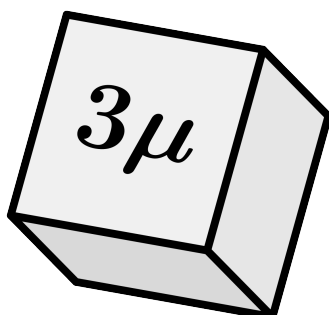


VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Sborník z 28. semináře

Moderní matematické metody v inženýrství



5. – 7. června 2023, Hradec nad Moravicí

konference3mi.vsb.cz

Jednota českých matematiků a fyziků, pobočka Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO
Katedra matematických metod v ekonomice, EkF, VŠB-TUO

Programový a organizační výbor

prof. RNDr. Radek Kučera, Ph.D.

RNDr. Jan Kotůlek, Ph.D.

Mgr. Zuzana Morávková, Ph.D.

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ing. Vanda Dubáčová

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

doc. Ing. Martin Čermák, Ph.D.

doc. Ing. Václav Friedrich, Ph.D.

© Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TUO

ISBN 978-80-248-4681-1 (on-line)

DOI 10.31490/9788024846811

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

po pětileté odmlce se opět koná ostravský seminář Moderní matematické metody v inženýrství. Je to již jeho 28. ročník. Přestávka měla dvě příčiny. První byla organizační změna týkající se některých matematických pracovišť na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava, kdy z celoškolské Katedry matematiky a deskriptivní geometrie vznikly dvě samostatné matematické katedry na Fakultě strojní a na Fakultě stavební. Tato pracoviště bylo potřeba stabilizovat. Druhou příčinou bylo omezení společenského života způsobené pandemií COVID-19. Na obnovení semináře se dohodly všechny matematické katedry VŠB-TUO pod záštitou ostravské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků. Dohodly se také, že se v pořádání semináře budou pravidelně střídat. V letošním roce je hlavním organizátorem Katedra matematiky a deskriptivní geometrie na Fakultě strojní.

Oproti minulosti doznal seminář několika změn. Nejviditelnější je změna místa konání. Namísto tradičních Beskyd proběhne seminář v Hradci nad Moravicí. Věříme, že malebné údolí řeky Moravice a státní zámek s bohatou historií spojenou s počátky českého království přispějí k atraktivitě semináře. Seminář je také rozdělen do dvou plnohodnotných sekcí: Matematika a její aplikace a Výuka a didaktika matematiky. K dnešnímu dni je přihlášeno 41 účastníků, kteří téměř rovnoměrně rozdělili své příspěvky mezi obě sekce. Většina přihlášených je z Ostravy, 11 účastníků přijede z různých matematických pracovišť v České republice. Další změnou je elektronický sborník recenzovaných příspěvků, který bude k dispozici již v průběhu semináře. Na semináři bude přednesen cyklus plenárních přednášek, který povede RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D., který ještě nedávno působil na celoškolské matematické katedře VŠB-TUO a nyní dorazí z Univerzity Palackého v Olomouci.

Jistě se shodneme, že matematika má mnoho různých podob. Věříme, že s co největším množstvím z nich se setkáme na semináři a že obnovený seminář se stane dobrým základem pro setkávání matematiků tak, jako tomu bylo v minulosti.

V Ostravě, 15. 5. 2023

Programový a organizační výbor

Obsah

Dlouhá Dagmar, Petr Volný, Jana Volná: Zkušenosti s tvorbou videí pro Průvodce Matematikou I	5
Janíková Miriam, Vladimír Polášek: Techambition ve výuce na VŠ	11
Jekl Jan, Jiří Jánský, Vojtěch Růžička: Definice zobecněných funkcí sinus a kosinus a rozbor případů, v nichž jsou porušeny předpoklady těchto definic	20
Kotůlek Jan: Math Support Centre na VŠB-TUO: Zhodnocení činnosti po (téměř) sedmi letech provozu	31
Kovář Petr, Yifan Zhang: Aplikace rozkladů grafů při paralelizaci numerických výpočtů hustých matic	40
Krček Jiří: Variační formulace difrakční úlohy na periodickém rozhraní	41
Kučera Radek, Vladimír Arzt, Jaroslav Haslinger, Václav Šátek: Numerical Solution of the Navier-Stokes System with the Stick-Slip Boundary Conditions	49
Lampartová Alžběta: 0-1 test chaosu a jeho aplikace v ekonomických modelech	53
Másilko Lukáš, Josef Rebenda: Vrstevnické hodnocení ve vysokoškolských matematických předmětech	54
Morávková Zuzana, Petra Schreiberová: Rozvoj matematických a inženýrských dovedností v rámci kroužku Junior univerzity	66
Motyčková Kristina, Marie Sadowská: Generování hexahedrálních sítí pomocí polycube deformace	73
Müller Ivo: Strukturovaný osobnostní dotazník PISP: jeho konstrukce a příklad použití na charakterizaci lidí bez domova ve srovnání s běžnou populací	74
Pátíková Zuzana, Lubomír Sedláček: Maths Support Centre při Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně	86
Příbylová Lenka: Úvod do neparametrické prediktivní inference	91
Rabasová Marcela: Střední hodnota náhodné veličiny	102
Rebenda Josef: Mathematics and Statistics Learning Support and the Power of Feedback	106
Rucki Pavel: Zajímavé důsledky přerovnění neabsolutně konvergentních řad	112
Smetanová Dana, Tomáš Náhlík, Ivo, Opršal, Zdeněk Dušek: Dobrá praxe Support Centra při VŠTE v Českých Budějovicích	124
Swaczyna Martin, Petr Volný: Příklady kinematických vazeb neovlivňujících pohyb částice	129
Tomečková Ivona: 2D Time dependent Stokes problem with Dirichlet-Neumann-Slip boundary conditions	147
Votoupal Václav, Monika Jahodová: Konstruktivní geometrie na akcích pro veřejnost	154
Seznam účastníků, program	161

ZKUŠENOSTI S TVORBOU VIDEÍ PRO PRŮVODCE MATEMATIKOU I

DLOUHÁ Dagmar, VOLNÁ Jana, VOLNÝ Petr

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra matematiky,
Ludvíka Podéště 1875/17, 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail na hlavního autora: petr.volny@vsb.cz

Abstrakt: V příspěvku bychom se chtěli podělit o zkušenosti s natáčením krátkých komentovaných videí pro Průvodce k distanční výuce Matematiky I na VŠB-TUO. Průvodce byl vytvořen na základě potřeb a zkušeností s distanční výukou v době pandemie Covid-19, a tedy v době, kdy byly uzavřeny školy a výuku bylo nutné realizovat on-line. Smyslem Průvodce, který má podobu webové stránky, bylo umožnit studentům procházet tematicky veškeré materiály dostupné k výuce Matematiky I. Komentovaná videa pokrývají celou Matematiku I a slouží jako doplněk ke studiu matematiky. Rádi bychom popsali přístup a technické prostředky, které jsme pro tvorbu videí měli k dispozici.

Klíčová slova: matematika, distanční výuka, komentovaná videa

1 Úvod

Nedávná pandemie Covid-19 a s ní spojená řada opatření výrazným způsobem zasáhla vzdělávání na základních, středních i vysokých školách. Žáci, studenti a pedagogové byli nuceni čelit situaci, se kterou neměli žádné zkušenosti. Nutnost přejít okamžitě na distanční výuku si nikdo nedokázal představit.

Celý do té doby zaběhaný systém prezenční výuky bylo nutné okamžitě nahradit novým systémem, kdy na jedné straně byl student, na straně druhé pedagog a mezi nimi komunikační nástroj, který by je propojil. Hledalo se okamžitě vhodné softwarové řešení pro distanční výuku, ale s tím souvisela i nutnost hardwarových změn. Budeme-li hovořit za vysokou školu, tak asi se dá říci, že každý student měl k dispozici nějaké zařízení, ať už se jednalo o počítač, tablet, ale v podstatě pro komunikaci stačil i chytrý mobilní telefon.

Okamžitě jsme narazili na problém kapacity serverů, kdy se ukázalo, že není jednoduché streamovat velké přednášky pro řádově desítky studentů, a především, když se jednalo o velké množství současně streamovaných předmětů. Nicméně, kapacita serverů byla rychle posílena, a při tvorbě rozvrhů se přihlíželo při nasazování velkých přednášek na jejich rovnoměrné roz-

vrstvení v čase.

Další zajímavý problém se objevil na straně studentů. Ukázalo se, že ne každý student měl k dispozici dostatečně rychlý a stabilní internet, aby mohl on-line výuku absolvovat. Tuto potíž částečně řešilo nahrávání on-line přednášek a cvičení s možností pozdějšího shlédnutí, ale s tím, jak se délka on-line výuky dramaticky zvětšovala, snižovala se i ochota studentů podílet se na výuce aktivním přístupem. Jestli na začátku snaha studenty do výuky zapojit se jakž takž dařila, velmi brzy se typický průběh hodiny redukoval na stěnu mlčení ze strany studentů a neděláme si iluze o tom, kolik studentů se jen připojilo a výuky se neúčastnilo. Tyto problémy jsme detailně popsali v článku [1].

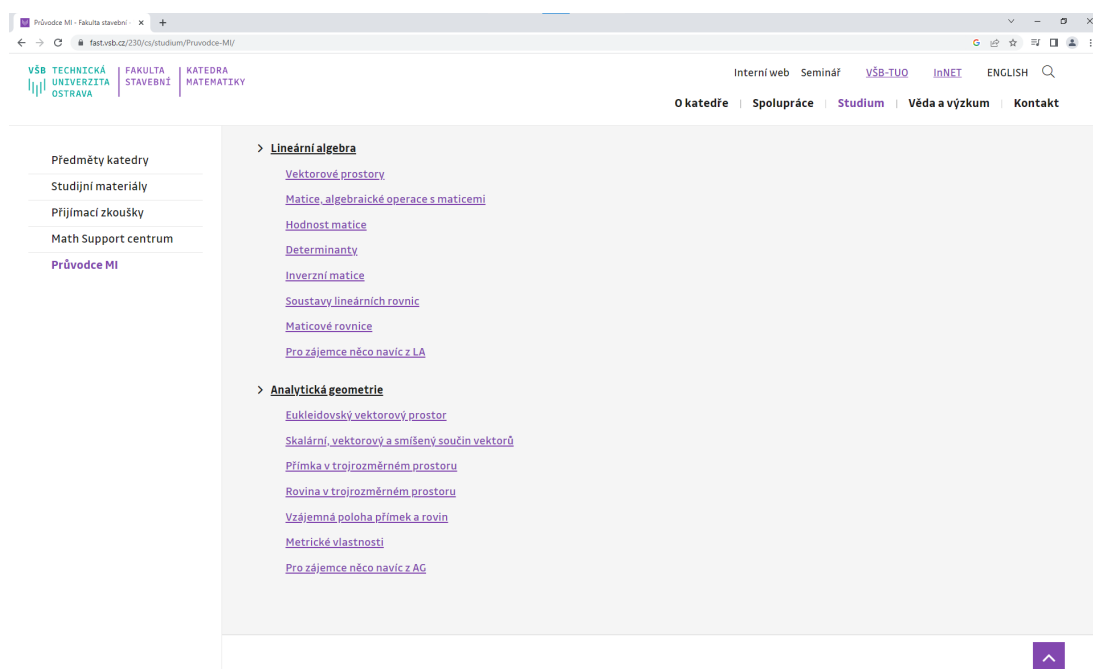
2 Průvodce k distanční výuce Matematiky I

Průvodce byl vytvořen s podporou projektu RPP2021/1, Průvodce distančním studiem předmětu Matematika I, Projekty FRVŠ (MŠMT), hlavní řešitel D. Dlouhá.

Jedná se o webovou stránku,

<https://www.fast.vsb.cz/230/cs/studium/Pruvodce-MI/>.

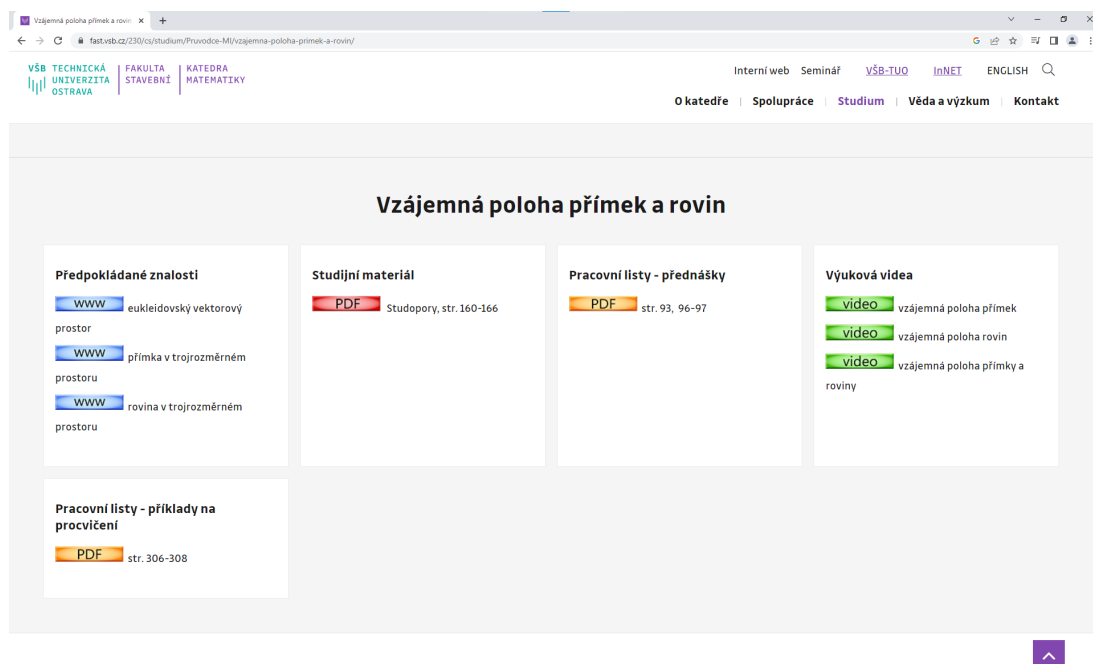
Na této stránce student nalezne obsah předmětu Matematika I rozdělený do čtyř základních kategorií, funkce jedné proměnné, diferenciální počet, lineární algebra a analytická geometrie.



Obrázek 1: Průvodce Matematikou I

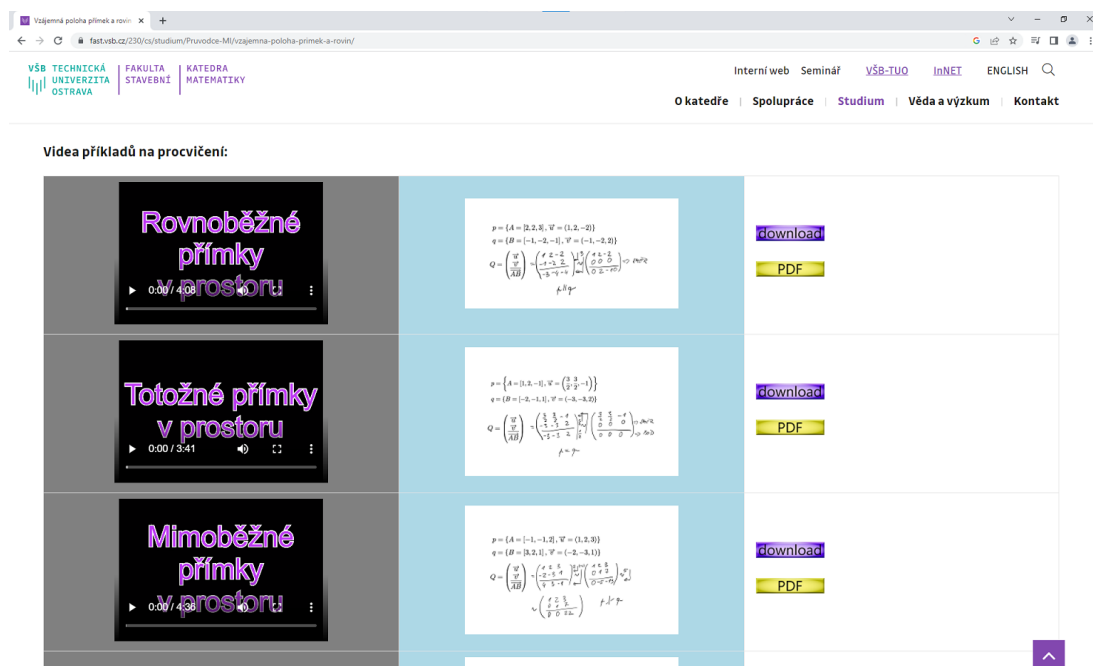
Průvodce umožňuje studentům projít dostupnými materiály dle zvoleného tématu. Pokud studenta zajímá např. problematika „Vzájemná poloha přímek a rovin“, klikne na odpovídající odkaz a dostane se okamžitě na rozcestník, který jej bude dále navigovat. Nejdříve se může podívat na položku „Předpokládané znalosti“, která obsahuje to, co by měl student znát, aby mohl touto částí projít. Dále se zde nacházejí odkazy na studijní materiály, ať už se jedná o skripta či pracovní listy, a jsou zde také k dispozici odkazy na výuková videa, která se před

několika lety natáčela.



Obrázek 2: Vzájemná poloha přímek a rovin - studijní materiály

Kromě toho se na dolní části stránky nachází nově natočená komentovaná videa, která se snaží pokrýt tematicky kompletní obsah Matematiky I.



Obrázek 3: Vzájemná poloha přímek a rovin - komentovaná videa

Každé video je možné přehrát v okně prohlížeče, je možné je roztáhnout na celou obrazovku

a je také možné video stáhnout. Vedle videa se nachází náhled videa, takže student okamžitě vidí, co je obsahem videa a jestli je pro něj nutné video shlédnout, nebo je mu problematika jasná a video přeskočí.

Na konci stránky se pak nachází několik odkazů ohledně poskytujících studentům možnost sebeevaluace. Jedná se o položky „Kontrolní otázky“, „Úlohy k samostatnému řešení“, „Kontrolní test“ a odkaz s nabídkou pomoci při studiu.

3 Nahrávání videí

Na nahrávání videí se podílela Michaela Bobková, Dáša Dlouhá a Petr Volný. Jana Volná měla na starosti přípravu webu.

Bylo natočeno 129 videí pokrývajících celou problematiku Matematiky I. Technické záležitosti uvádíme v přehledové tabulce, jen ještě doplníme, že videa byla exportovaná ve formátu MPEG4 (.mp4) a komprimovaná prostřednictvím kodeku H.264.

Tabulka 1: Přehled technických parametrů videí

	Funkce	Kalkulus	Algebra	Geometrie
Počet videí	34	33	30	32
Velikost v GB	2,46	3,51	2,17	2,49
Rozlišení	1920x1080	1080-1920x1080	1546x1080	1546x1080
Délka videa	02:36:38	04:21:36	03:16:06	03:12:40
Datový tok v kb/s	1947	1481	1330	1759
Frekvence v FPS	30	30	30-48	30-48

Aby byla videa co nejjednodušší, jelikož nahrávání se věnovali tři členové řešitelského týmu, bylo zvoleno takové rozlišení, aby počet řádků všech videí byl stejný. Od toho se pak odvíjely další parametry zvolené při exportu.

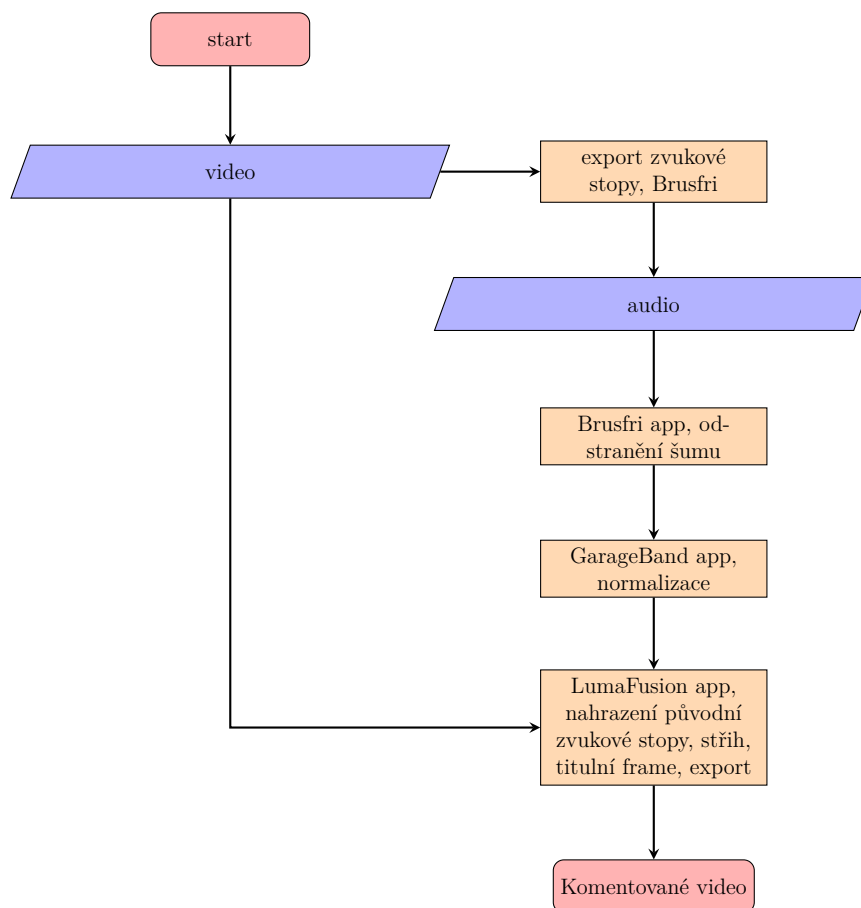
Každý z členů řešitelského týmu se k problematice videí postavil svým vlastním způsobem. Jedno jsme měli všichni společné, a to iPady, které jsme pro nahrávání videí použili.

M. Bobková nahrávala videa včetně zvuku s využitím interního mikrofону iPadu. Nevýhodou tohoto přístupu jsou slyšitelné zvuky ťukání stylusu na obrazovku iPadu při psaní textu. D. Dlouhá nahrávala videa nadvakrát. Nejdříve nahrála video bez zvuku a poté dodatečně video nadabovala. I tento přístup s sebou nese několik nevýhod. Jednak se zdvojnásobuje doba na vytvoření jednoho videa, a dále je velmi obtížné synchronizovat psaný text s mluveným slovem. Nicméně je to jedna z možností, jak ťukání stylusu odstranit. P. Volný nahrával videa včetně zvuku s využitím externího mikrofónu, který byl k iPadu připojen. Ani tento zvolený přístup nebyl ideální, protože úroveň zvuku nahrávaných videí byla velmi nízká a zvuk doprovázel slyšitelný šum.

Dá se říci, že aktuálně hledáme technický prostředek, který by výše uvedené problémy jednou provždy vyřešil. Naše představa je taková, že by se pořídila sluchátka s mikrofónem s aktivním omezením šumu, která by zároveň ignorovala ťukání stylusu při psaní, a záznam jako takový byl na kvalitativně vyšší úrovni.

Finální editaci videí měl na starosti P. Volný. Co se ukázalo okamžitě jako technicky nejoptimálnější, bylo pro všechny úkoly spojené s nahráváním videí zůstat v rámci jednoho zařízení, iPadu. Původně jsme uvažovali o tom, převádět nahrávky na PC a tam poté nahrávky upravovat. Tato varianta se nicméně okamžitě ukázala jako problematická, a proto jsme od ní upustili.

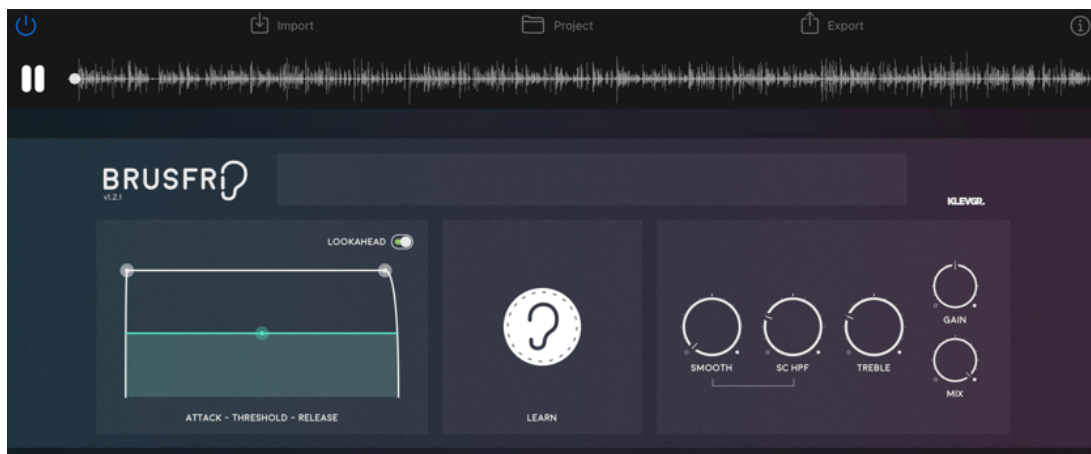
Celý proces zpracování nahraného videa dokumentuje následující schéma.



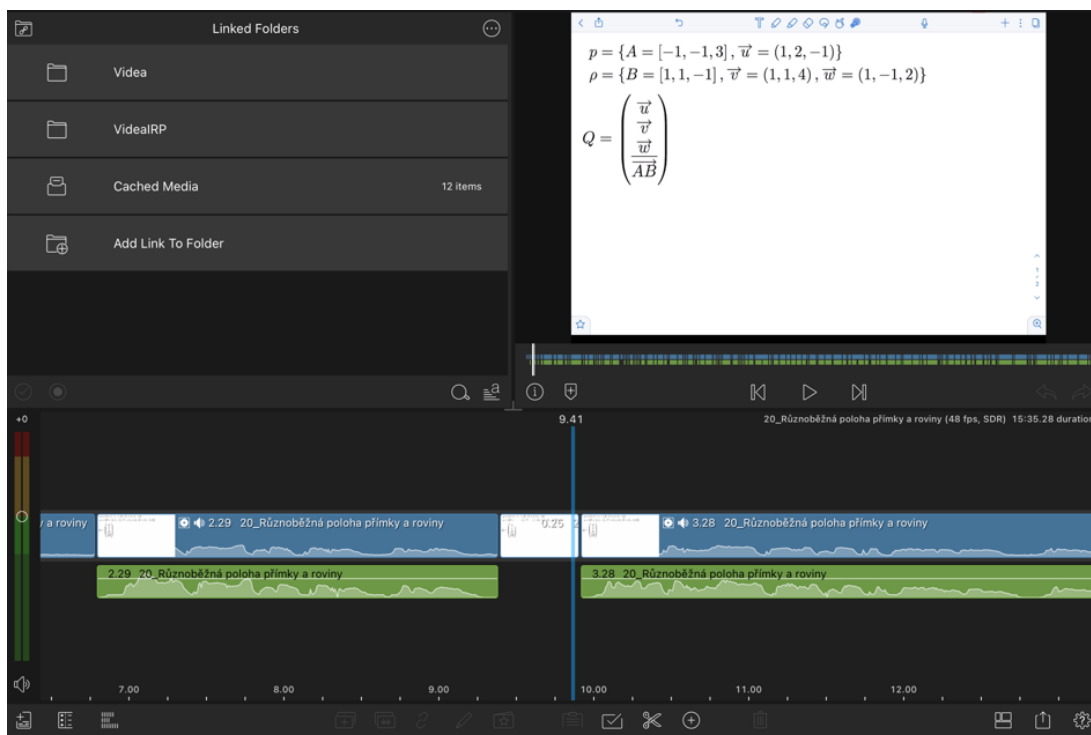
Obrázek 4: Editování videa

U každého videa byla exportována zvuková stopa. Byl odstraněn šum a provedena normalizace hlasitosti nahrávky. Poté byla původní zvuková stopa nahrazena vyčištěnou zvukovou stopou. Následoval střih, kdy se z videa odstraňovaly nepovedené části. Střih se týkal především videí, které natočil P. Volný, který s tím dopředu počítal. Velice rychle zjistil, že natočit video bez přerázků, zakašlání, či jiných doprovodných zvuků a pazvuků je nemožné a začínat stále znovu po jakékoliv chybě je extrémně neefektivní. Pro pobavení čtenářů bychom uvedli, že v některých videích bylo i více než 50 střihových bodů. Dále se ukázalo, že proces editace videí je časově mnohem náročnější než natočení samotného videa. Abychom to přiblížili, tak řekněme na cca sedmi minutové video je třeba počítat s jednou hodinou editace.

Následující dva obrázky demonstrují interface aplikace pro odstranění šumu Brusfri a dále aplikaci pro střih a editaci videí LumaFusion.



Obrázek 5: Aplikace Brusfri



Obrázek 6: Aplikace LumaFusion

4 Poděkování

Autoři děkují za podporu Katedře matematiky, Fakulta stavební, VŠB-TUO.

Reference

- [1] VOLNÝ, P., VOLNÁ, J., DLOUHÁ, D., BOBKOVÁ, M., 2022. Guide to Distance Education of Mathematics I on VSB - TU Ostrava. *17th international conference DisCo 2022: Empowering Digital and Entrepreneurial Competences through E-learning.*

TECHAMBITION VE VÝUCE NA VŠ

JANÍKOVÁ Miriam, POLÁŠEK Vladimír

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky,
Ústav matematiky, Nad Stráněmi 4511, 760 05, Zlín
mjanikova@utb.cz, vpolasek@utb.cz

Abstrakt: Techambition je webová aplikace určená pro výuku matematiky na základních a především středních školách. V článku přinášíme ukázkou využití Techambition ve výuce matematiky na vysoké škole, v předmětu, jehož účelem je jednak zopakovat středoškolskou matematiku potřebnou pro další studium a také srovnat úroveň znalostí studentů ze střední školy. Pomocí výsledků krátkého dotazníku pak ukazujeme, jaký názor na námi zvolený způsob výuky s využitím Techambition mají sami studenti.

Klíčová slova: Techambition, technologie ve výuce, vizualizace matematiky, zhodnocení výuky

1 Úvod

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně (dále jen UTB) má celkem šest fakult. Na čtyřech z nich je matematika nedílnou součástí studijních plánů od prvního ročníku studia. Matematické předměty na univerzitě nejsou profilující, spíše poskytují základní matematický aparát pro studium odborných předmětů daných fakult.

Stejně jako na jiných vysokých školách i na UTB je snaha usnadnit přechod studentů ze střední školy na vysokou školu. Jednotlivé fakulty pořádají doučovací kurzy, nebo zavádějí nové předměty, kde se opakuje středoškolské učivo. Navíc Ústav matematiky nabízí konzultace z matematiky v rámci tzv. Maths Support Centre. A také samotní vyučující se snaží různým způsobem výuku matematiky pro studenty zatraktivnit, učinit zajímavou tak, aby se mohli řádně do aktivit zapojit i studenti, pro něž matematika není zrovna oblíbeným předmětem, a to například využitím počítačů ve výuce nejen vyučujícím, ale také samotnými studenty. V tomto článku ukazujeme, jak lze podpořit opakování učiva matematiky ze střední školy pomocí interaktivní webové aplikace Techambition.

2 Techambition

Techambition je aplikace, která vzešla od českého startupu Techambition. Podle jeho zakladatelů bylo cílem startupu „využívat počítače ve výuce takovým způsobem, aby učitelům co nejvíce pomohly zařadit do výuky různé moderní výukové strategie a postupy“ [1]. Systém Techambition se

zaměřuje především na středoškolské učivo matematiky, ale naleznete zde i témata pro základní školy. Některé lekce lze využít i základních kurzech matematiky na vysoké škole.

Vyučující si v aplikaci Techambition zvolí lekci dle probíraného tématu. Ke každé lekci vybere vhodný typ aktivity např. Samostudium, při kterém studenti pracují samostatně, systém Techambition jim nabízí nápovědy a pak studenty automaticky vyhodnotí. Dalšími aktivitami jsou Úkol s diskuzí, Skupinová výuka a Převrácená třída, které nabízejí pro učitele spoustu dalších možností, jak vést výuku. (viz [2]).

2.1 Předmět Seminář z matematiky

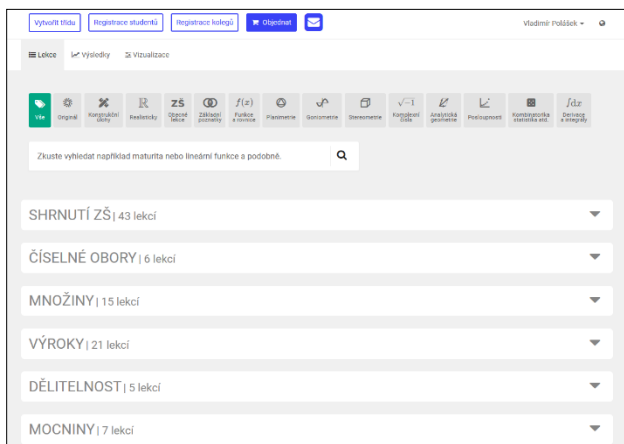
Systém Techambition jako podpůrný nástroj pro potřeby domácí přípravy jsme využili v akademickém roce 2022-23 v předmětu Seminář z matematiky z Fakulty technologické. Na této fakultě jsou základním předpokladem pro studium znalosti z přírodovědných předmětů fyziky, chemie a matematiky.

V posledních letech na Fakultě technologické prošly studijní plány 1. ročníku studia několika změnami. Spolu s předmětem Matematika 1, který byl společný pro všechny studijní obory, se paralelně vyučoval i předmět Repetitorium z matematiky, který sloužil k prohloubení znalostí středoškolské matematiky a dával tak studentům dobrý základ pro studium vyšší matematiky. Tento předmět patřil pro většinu oborů mezi nepovinně volitelné předměty a možná i proto o tento předmět projevovalo zájem velmi málo studentů. Před pěti lety došlo ke změně studijních plánů. Předmět Repetitorium byl pro některé studijní programy nahrazen povinným Seminářem z matematiky s podobným obsahem zatím pouze pro některé studijní programy. Nakonec při poslední akreditaci došlo ke sjednocení studijních plánů všech studijních programů. Výsledkem toho je povinný předmět Seminář z matematiky, který se učí před předmětem Matematika 1, oba v zimním semestru 1. ročníku. Studenti si díky tomuto předmětu zopakují středoškolskou matematiku, ale především se tímto předmětem dává studentům možnost mít stejný základ pro další studium, pokud nejsou jejich znalosti ze střední školy dostatečné. Podobný přístup byl zvolen i v dalších důležitých předmětech fyzika a chemie. Ještě dodejme, že Seminář z matematiky začíná vstupním testem. Pokud ho studenti zvládnou, dostanou zápočet z tohoto předmětu a pokračují dále až předmětem Matematika 1.

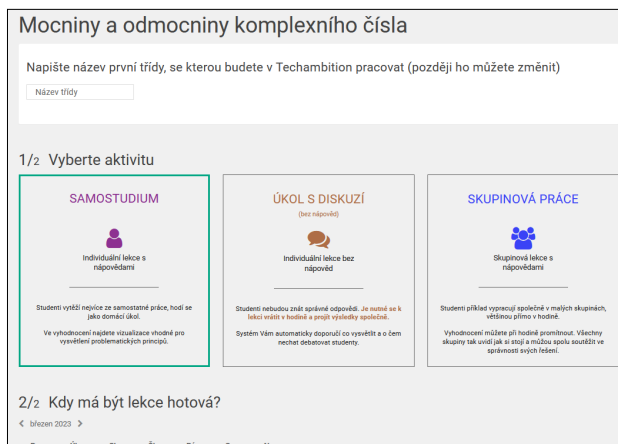
Velký vzorek studentů z rozdílných oborů se jevil jako dobrá volba pro práci s Techambition jednak z hlediska srovnání úspěšnosti oproti předchozím letům, ale taky vzhledem k dalšímu rozhodování, zda ve výuce s Techambition pokračovat i v budoucích letech. Pokud se opět nezmění studijní plány.

2.2 Ovládání Techambition

Před výukou vytvoří učitel pro danou studijní skupinu třídu v Techambition, do které se studenti sami zapíší na základě odkazu od učitele. Předem nebo průběžně v semestru učitel zadá studentům lekce podle potřeb předmětu. Lekce jsou rozděleny dle oblastí matematiky, dále podle tématu. Například na obrázku 1 vidíme téma Množiny, které obsahuje 15 lekcí. U každé lekce učitel volí typ aktivity, dále kdy se zadání zobrazí studentům a termín odevzdání (Obr. 2).

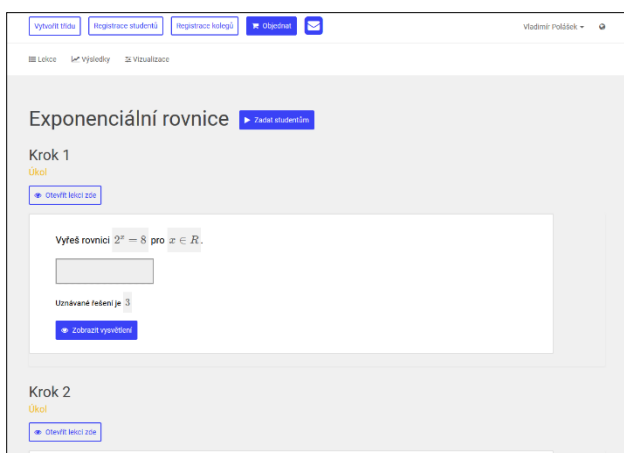


Obr. 1. Prostředí Techambition

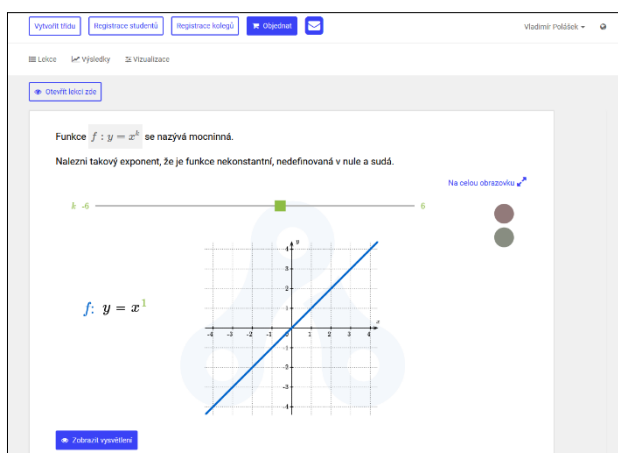


Obr. 2. Nastavení lekce

Jednotlivé úkoly studenti ovládají standartními prvky, jako jsou posuvníky, prepínací tlačítka, některé své výsledky musí zapsat přímo počítače (Obr. 3 a Obr. 4). K dispozici mají nápovědu.



Obr. 3. Prostředí Techambition



Obr. 4. Nastavení lekce

V případě aktivity typu Samostudium aplikace studentům automaticky vyhodnotí jejich řešení. Podle autorů Techambition je dobrou motivací pro studenty práce ve skupinách ([2]), kde aplikace hodnotí skupinu studentů jako celek. V aktivitě typu Úkol s diskuzí se studenti nedozví své výsledky, výsledky je nutné probrat v hodině. Navíc umělá inteligence vybere témata vhodná k diskuzi v malých skupinách, pokud studenti měli rozdílné názory na řešení, nebo ukazuje učitelům téma, které je vhodné raději znovu vysvětlit.

3 Průběh výuky a její zhodnocení

Ohledně zhodnocení práce se systémem Techambition a užitečnosti zadávaných úkolů jsme oslovili studenty, kteří absolvovali předmět Seminář z matematiky zaměřený na opakování učiva středoškolské matematiky. Tento předmět absolvovali studenti Fakulty technologické UTB v 1. ročníku během prvních šesti týdnů studia. Jednotlivá zadání studenti vypracovávali formou práce na doma a do stanovených termínů, přičemž kritéria stanovená pro zvládnutí předmětu byla stanovena tak, že studenti museli mít z každého zadání min. 80 % úspěšnost.

Studenti k předmětu Seminář z matematiky samostatně vypracovali celkem 45 zadání zaměřených na opakování učiva střední školy. Během seminářů se se systémem nepracovalo, opakovalo se učivo a počítaly se jiné úkoly podle výběru jednotlivých vyučujících. Tematicky se však aktivity na seminářích a zadání na doma shodovaly.

S požadavkem na zhodnocení využití prostředí Techambition jsme oslovili také vyučující výše uvedeného předmětu. Jejich vyjádření uvádíme v podkapitole 3.2.

3.1 Zhodnocení od studentů

Po absolvování předmětu Seminář z matematiky jsme studenty poprosili o vyplnění krátké zpětné vazby realizované formou online dotazníku. Vyjádření se formou zpětné vazby bylo anonymní a dobrovolné. Zúčastnilo se ho 57 studentů. Analýzu vyjádření studentů k jednotlivým položkám uvádíme v následujících tabulkách a grafech.

I. Studijní obory

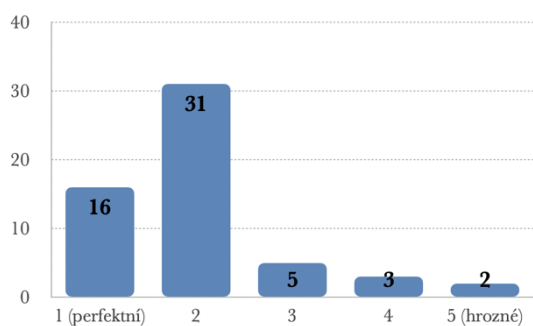
Jako první nás zajímalo četné zastoupení studentů na základě studijních oborů, které uvádíme v Tab. 1.

STUDIJNÍ OBOR	POČET RESPONDENTŮ
BIOMATERIÁLY A KOSMETIKA	14
PROCESNÍ INŽENÝRSTVÍ	12
POLYMERNÍ MATERIÁLY A TECHNOLOGIE	5
POTR. BIOTECHNOLOGIE A APL. MIKROBIOLOGIE	2
OCHRANA ŽIVOTNÍHO PROSTŘEDÍ	2
MATERIÁLOVÉ INŽENÝRSTVÍ	2
CHEMIE A ANALÝZA POTRAVIN	3
GASTRONOMICKÉ TECHNOLOGIE	5
TECHNOLOGIE POTRAVIN	9
VÝROBA A KONSTRUKCE OBUVI	0
BEZ ODPOVEDI	3

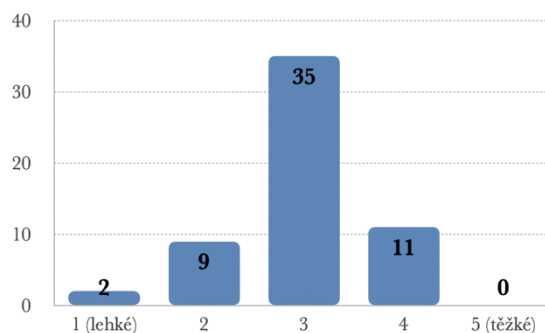
Tab. 1. Studijní obory

II. Celkové hodnocení, hodnocení náročnosti a množství

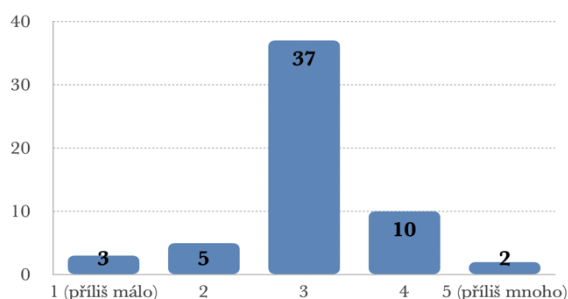
V následujících třech grafech uvádíme vyhodnocení položek zaměřených na celkové zhodnocení práce se systémem Techambition (Graf 1), náročnosti zadávaných úkolů (Graf 2) a zhodnocení množství a časové náročnosti jednotlivých zadání (Graf 3).



Graf 1. Celkové hodnocení



Graf 2. Hodnocení náročnosti



Graf 3. Hodnocení množství a časové náročnosti

III. Hodnocení smysluplnosti, pozitiv a negativ

Kromě časové a znalostní náročnosti jsme zjišťovali, zda studenti považují takovou formu samostatné práce za smysluplnou, co se jim líbilo a co naopak nelíbilo při práci s prostředím Techambition.

Při otázce *Bylo pro Vás vypracovávání sad úkolů přínosem?* převládaly výrazně kladné reakce studentů (Graf 4).



Graf 4. Hodnocení přínosu

Další otázky byly: *Co se Vám při práci s Techambition líbilo?* (Tab. 2) a *Co byste naopak změnili?* (Tab. 3). Jednalo se o otázky s otevřenou odpovědí. Odpovědi respondentů jsme rozdělili do kategorií, které uvádíme v tabulkách i s četností výskytu.

VYSVĚTLENÍ A SHRNUÍ UČIVA, NÁPOVĚDY, ZDŮVODNĚNÍ SPRÁVNÝCH I NESPRÁVNÝCH ODPOVĚDÍ	18
MOŽNOST OPAKOVAT POKUSY	9
VIZUALIZACE GRAFŮ	7
SAMOSTATNOST, ČASOVÁ VOLNOST, POHODLÍ DOMOVA	5
PROSTŘEDÍ PROGRAMU	5
INTERAKTIVNOST	4
VŠECHNO	2
NIC	1

Tab. 2. Hodnocení pozitiv

SROZUMITELNĚJŠÍ ZADÁNÍ, NÁPOVĚDY A ODPOVĚDI	7
ÚVOD - NÁVOD, JAK SE SYSTÉMEM PRACOVAT (ZEJMÉNA S GRAFY)	6
CHYBY A TECHNICKÉ PROBLÉMY	6
NIC	5
KRATŠÍ ČASOVÝ INTERVAL MEZI OPAKOVÁNÍMI LEKCÍ (8 HOD.)	2
TEORII K LEKCÍM	1
MÉNĚ TEORIE A VÍCE POČÍTÁNÍ	1
VELKÉ ROZDÍLY V NÁROČNOSTI PŘÍKLADŮ	1
ČASOVÁ NÁROČNOST (UVEDENA KONTRA REÁLNÍ, REÁLNÁ KRATŠÍ)	1
NEVÍM	1

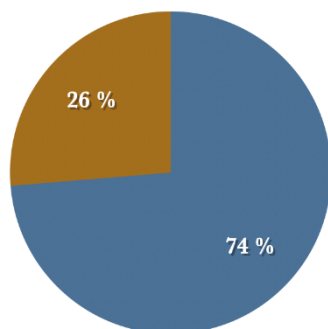
Tab. 3. Hodnocení negativ

IV. Doporučení dalšího využití

V poslední položce nás zajímalo, jestli by naši studenti doporučovali využívat prostředí Techambition na předmětu Seminář z matematiky i v budoucnosti (*Doporučili byste nadále používat Techambition při výuce předmětu Seminář z matematiky? Zdůvodněte, prosím, svou odpověď.*). Jednalo se o otázku s otevřenou odpovědí. Odpovědi respondentů jsme nejprve rozdělili na kladné, záporné a bez odpovědi. Vyhodnocení kladných, záporných a žádných odpovědí znázorňuje Graf 5.

Zdůvodnění respondentů jsme rozdělili do kategorií, které uvádíme v tabulce (Tab. 4) i s četností výskytu (všechna zdůvodnění souvisí s kladnou odpovědí, protože, jak je vidět i z grafu, záporná odpověď se nevyskytla ani jednou). Jednotlivé kategorie reprezentují uváděné důvody doporučení dalšího využití prostředí, přičemž někteří studenti uváděli i více než jeden důvod.

● ano ● ne ● bez odpovědi



Graf 5. Doporučení dalšího využití.

POMŮŽE ZOPAKOVAT A POROZUMĚT UČIVU	16
FORMA	8
JE TO ZÁBAVNÉ	5
JINÝ ÚHEL POHLEDU NEŽ MÁ VYUČUJÍCÍ	2
SAMOSTATNOST	1
NENÍ TO STŘESUJÍCÍ JAKO PŘI TABULI	1
VIZUÁLNÍ ZOBRAZENÍ	1

Tab. 4. Kategorie doporučení

Uvádíme také výběr některých studentských vyjádření k dané položce:

R1: *Áno, techambition pôsobí na študenta viac ako hra ako učenie a preto nás to viac baví a pri tejto "hre" získavame aj vedomosti*

R2: *Ano, díky odůvodnění jsem mohl pochopit i úlohy, u kterých jsem si nevěděl rady a tak jsem už nepotřeboval pomoc učitele.*

R3: *Ano, je to zpestření výuky*

R4: *Ano, je to lepší a efektivnější než z učebnic.*

R5: *Ano, systém by jsem doporučil i nadále využívat ale přidal by jsem více úkolů na procvičování nejen z semenáře ale také z matiky I.*

R6: *Ano, studenti si můžou procvičit jednotlivé úkoly a při tom zjistí, co jim moc nejde a na čem by měli zapracovat*

2.3 Zhodnocení od vyučujících

Kromě studentů jsme požádali o zhodnocení využívání prostředí Techambition i vyučujících předmětu Seminář s matematiky. Uvádíme jejich odpovědi:

V1: *Za mě používání systému Techambition splnilo očekávání v tom, že studenti věnovali čas počítání i během domácí přípravy. Při přechodu do navazujícího předmětu jsem zaznamenala vyšší zapojení studentů do vypracovávání domácích úkolů než dřív. Studenti již byli zvyklí na práci i doma, mimo výuku. Do budoucna bych zvažila, jestli by nešlo vypracovat podobný systém i pro vysokoškolské*

učivo. Alternativou by snad mohly být kurzy Moodle, které by využívaly na maximum jeho možnosti, ale obávám se, že příprava takových kurzů, pokud by měly mít podobné vlastnosti jako Techambition, by byla hodně náročná. Nevýhodou práce se systémem Techambition je nemožnost upravit dávky podle potřeby a také finanční náročnost. Dlouhodobé financování licencí není jednoduché zajistit.

V2: Chvilku trvalo, kým sa študenti naučili so systémom pracovať, potom to už bolo pohodlné pre mňa aj pre nich. Občas sa síce vyskytli drobné chyby, ale aj napriek tomu budem tento systém rád využívať aj naďalej.

V3: Zo začiatku som sa bála, ako študenti zvládnu pomerne veľké množstvo úloh v stanovenom čase, nakoniec s tým problém nebol. Práve naopak, zdalo sa, že im takáto forma samostatnej práce vyhovuje. Učila som 3 skupiny a všetky si odhlasovali, že chcú so zadaniami v Techambition pokračovať aj na predmete Matematika 1, kde ale, bohužiaľ, s obsahom predmetu korešpondovalo len 5 zadaní. Veľmi pozitívne hodnotím iný typ zadávaných úloh (nie sú to klasické „stĺpčekové“ príklady), taktiež pripojené vysvetlenia a návody, ako jednotlivé úlohy riešiť, grafické rozhranie a interaktívnosť.

V4: Techambition ve výuce slouží jako velmi užitečný nástroj především kvůli jeho efektivním vizualizacím umožňujícím studentům představit si danou problematiku a pochopit ji. Díky jeho interaktivitě zároveň motivuje studenty k samostudiu. S možností nápovědy a komentáře k probírané látce pak také studenti řeší větší množství příkladů mimo školu a připravují si předem otázky k dané látce do hodin. Doplnují si tak potřebné znalosti, což vede ke snížení rozdílů napříč třídou. Techambition slouží také jako užitečný podpůrný nástroj pro učitele, jelikož je upozorňuje na to, s čím mají studenti problém a umožňuje jim začlenit více vizualizací do výuky.

Závěr

V článku se věnujeme analýze zavedení a využití webové aplikace Techambition ve výuce matematiky na vysoké škole v rámci předmětu Seminář z matematiky, který slouží k zopakování učiva střední školy a ke srovnání úrovně znalostí jednotlivých studentů prvního ročníku na Fakultě technologické Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně.

Jak je jasně vidět z analýzy zpětných vazeb od studentů, k využívání tohoto prostředí jednoznačně převládají pozitivní postoje. Náročnost (jak znalostní, tak časovou) vybraných zadaní považovala většina vyjadřujících se studentů za přiměřenou. Téměř všichni z našich respondentů označili vypracovávání zadaní za přínosné, ocenili zejména uváděné vysvětlení učiva, nápovědy, zdůvodnění správných a nesprávných odpovědí, ale také možnost opakovat pokusy, vizualizaci grafů nebo pohodlí domova a samostatnost.

Jako problematická se jevila srozumitelnost některých zadaní, nápověd a vysvětlení, také technické problémy a chyby (některé z nich jsme nahlašovali technické podpoře). Jako návrh na zlepšení někteří studenti uvedli, že by bylo vhodné v úvodu semináře představit návod, jak s prostředím pracovat, což do budoucna zvážíme a zapracujeme.

Zavedení využívání webové aplikace Techambition se setkala s pozitivním ohlasem jak u studentů, tak u vyučujících, proto plánujeme toto prostředí využívat v rámci předmětu Seminář z matematiky i v budoucnosti.

Odkazy

- [1] BREJČÁK, Peter. *Český Techambition pomáhá učitelům zatraktivnit výuku matematiky. Nové metody už využívá 60 tisíc žáků* [online]. [cit. 2023-03-24]. Dostupné z: <https://cc.cz/cesky-techambition-pomaha-ucitelum-zatraktivnit-vyuku-matematiky-nove-metody-uz-vyuziva-60-tisic-zaku/>
- [2] *Techambition* [online]. [cit. 2023-03-24]. Dostupné z: <https://cze-cs.techambition.com/>

DEFINICE ZOBECNĚNÝCH FUNKCÍ SINUS A KOSINUS A ROZBOR PŘÍPADŮ, V NICHŽ JSOU PORUŠENY PŘEDPOKLADY TĚCHTO DEFINIC

JEKL Jan, RŮŽIČKA Vojtěch, JÁNSKÝ Jiří

Katedra matematiky a fyziky, Fakulta vojenských technologií technická, Univerzita obrany,
Kounicova 65, 662 10, Brno
e-mail na hlavního autora: jan.jekl2@unob.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme zobecněním goniometrických funkcí. Podrobně uvedeme jedno z možných zavedení zobecněného sinu a zobecněného kosinu. Dále rozebereme některé případy, v nichž jsou porušeny předpoklady o konstantách p a q vstupujících do definic. Například zjistíme, že v takových případech selže zavedení půlperiody (zobecnění čísla π) nebo bude porušena periodičnost definovaných funkcí. U každého případu si zobrazíme zobecněnou jednotkovou kružnici. Zajímavý je případ, v němž je tato kružnice dvojicí parabol a zobecněné funkce sinus a kosinus jsou postupně kvadratickou a lineární funkcí. V tomto případě dáme naše zobecněné funkce do souvislosti s jinými zobecněními sinu a kosinu, jmenovitě s tzv. parabolickými goniometrickými funkcemi, které mají odlišnou konstrukci. Nakonec najdeme nutnou a postačující podmínku pro konvergenci integrálu vstupujícího do obecných definic. Pokud víme, tento obecný výsledek je v případě $p, q \in (0, 1]$ nový.

Klíčová slova: zobecněné goniometrické funkce, parabolické goniometrické funkce

1 Úvod

Zobecňování goniometrických funkcí je v posledních letech tématem mnoha článků. Pokud je nám známo, první koncept se objevil v článku [8] z roku 1959. Zobecněné funkce jsou tam zadány jako řešení jisté soustavy diferenciálních rovnic. Ze soustavy jsou pak odvozeny integrální vzorce pro inverzní funkce ke zobecněným goniometrickým funkcím (tedy vzorce pro zobecněné cyklotrické funkce). Z těchto vzorců jsou odvozovány další vlastnosti zobecněných goniometrických funkcí.

Výsledky z [8] byly rozšířeny v článku [4] z roku 1999 a propojeny s teorií pololineárních diferenciálních rovnic (viz také [10]). Do obecnějších definic vstupují dva konstantní parametry p a q . V původní definici [8] je pouze jeden parametr p . V teorii pololineárních diferenciálních rovnic jsou čísla p a q často takzvaně *konjungovaná*, tj. $p, q \in (1, +\infty)$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Obecněji

se však uvažují parametry p a q splňující pouze první uvedenou podmínku, tj. $1 < p < +\infty$ a $1 < q < +\infty$.

V tomto textu nejprve podrobně zavedeme jeden z typů zobecnění funkcí sinus a kosinus, ve kterém vystupují dva parametry p a q a platí $p, q \in (1, +\infty)$. V další části tohoto textu rozebereme několik případů, ve kterých má alespoň jeden parametr hraniční hodnotu (mimo definici), tedy buď $p = 1$ nebo $q = 1$. Příklad s nevlastní hraniční hodnotou $+\infty$ byl prozkoumán v článku [1]; tedy případ $p = +\infty$ a $q = +\infty$. V poslední části rozebereme pro libovolná $p, q \in (0, +\infty)$ konvergenci integrálu vstupujícího do definic. Pokud víme, v případě $p, q \in (0, 1]$ je tento výsledek nejspíše nový.

Zobecnění funkcí sinus a kosinus lze provést více způsoby. Získané zobecněné goniometrické funkce pak mohou být pro různé typy definic více či méně odlišné. Zobecněné funkce sinus a kosinus zavedené v tomto textu srovnáme s jejich parabolickými verzemi (tzv. parabolické goniometrické funkce), kterými se zabývají např. články [3, 9]. Lze však nalézt i další způsoby, jak zobecnit goniometrické funkce; například v článku [2] jsou zobecněny pomocí mocninných řad.

2 Konstrukce zobecněných funkcí sinus a kosinus

Následující definice rozšiřuje obvyklé zavedení zobecněných goniometrických funkcí, které lze nalézt v [4, 5, 12]. Necht p a q jsou reálná čísla z intervalu $(1, +\infty)$. Definujme

$$\pi_{p,q} := 2 \int_0^1 (1-t^q)^{-\frac{1}{p}} dt. \quad (1)$$

Číslo $\pi_{p,q}$ je zobecnění půlperiody funkce sinus, lze tedy říci, že $\pi_{p,q}$ je zobecnění Ludolfova čísla π . Skutečně, pro případ $p = 2, q = 2$ platí $\pi_{2,2} = 2 \arcsin 1 = \pi$.

Definujme funkci $F_{p,q}: [0, 1] \rightarrow [0, \pi_{p,q}/2]$ předpisem

$$F_{p,q}(x) := \int_0^x (1-t^q)^{-\frac{1}{p}} dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Funkci $\arcsin_{p,q}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}/2]$ pak definujeme jako liché rozšíření funkce $F_{p,q}$. Jedná se o zobecnění cyklometrické funkce arkussinus. Platí

$$\arcsin_{p,q} x = \begin{cases} F_{p,q}(x), & x \in [0, 1], \\ -F_{p,q}(-x), & x \in [-1, 0). \end{cases} \quad (3)$$

Poznamenejme, že $F_{p,q}(0) = 0$, vztah (3) je tedy skutečně lichým rozšířením funkce $F_{p,q}$, a proto platí

$$\arcsin_{p,q}(-x) = -\arcsin_{p,q} x, \quad x \in [-1, 1].$$

Zřejmě také $\arcsin_{2,2} x = \arcsin x$, viz (2).

Přikročíme k definici zobecněné funkce sinus. Funkce $\arcsin_{p,q} x$ je zřejmě rostoucí, viz (2) a (3). Funkce $\arcsin_{p,q} x$ je tak bijekce mezi množinami $[-1, 1]$ a $[-\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}/2]$, a k funkci $\arcsin_{p,q} x$ existuje inverzní funkce. Zobecněnou funkci sinus chceme co nejpřirozeněji definovat na celé množině reálných čísel a zároveň chceme, aby byla na příslušném intervalu inverzní ke zobecněné funkci arkussinus. Definujme nejprve

$$\sin_{p,q} x := \arcsin_{p,q}^{-1} x, \quad x \in [-\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}/2], \quad (4)$$

zejména pro každé $x \in [0, \pi_{p,q}/2]$ a každé $y \in [0, 1]$ platí

$$\sin_{p,q} x = y \quad \text{právě tehdy, když} \quad x = F_{p,q}(y).$$

Odtud je snadno vidět, že $\sin_{p,q}(0) = 0$ a $\sin_{p,q}(\pi_{p,q}/2) = 1$. Funkce $\sin_{p,q} x$ je také lichá, neboť

$$\sin_{p,q}(-x) = \begin{cases} F_{p,q}^{-1}(-x) = -\sin_{p,q} x, & x \in [-\pi_{p,q}/2, 0], \\ -F_{p,q}^{-1}(x) = -\sin_{p,q} x, & x \in [0, \pi_{p,q}/2]. \end{cases} \quad (5)$$

Při rozšíření definice na celou množinu reálných čísel chceme zachovat některé základní vlastnosti platné pro klasický sinus. Zejména požadujeme periodičnost funkce s nejmenší periodou $2\pi_{p,q}$, což nám zaručí platnost vztahů

$$\begin{aligned} -\sin_{p,q}(x - \pi_{p,q}) &= \sin_{p,q} x, & x \in \mathbb{R}, \\ \sin_{p,q}(x + 2\pi_{p,q}) &= \sin_{p,q} x, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definujme tedy

$$\sin_{p,q} x := -\sin_{p,q}(x - \pi_{p,q}), \quad x \in [\pi_{p,q}/2, 3\pi_{p,q}/2] \quad (6)$$

a konečně

$$\sin_{p,q} x := \sin_{p,q}(x - 2k\pi_{p,q}), \quad x \in [-\pi_{p,q}/2 + 2k\pi_{p,q}, 3\pi_{p,q}/2 + 2k\pi_{p,q}], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definici funkce $\sin_{p,q} x$, kterou jsme získali v předchozí konstrukci, můžeme ekvivalentně a praktičtěji zapsat pomocí funkce $\arcsin_{p,q} x$ vztahem

$$\sin_{p,q} x := \begin{cases} \arcsin_{p,q}^{-1}(x - 2k\pi_{p,q}), & x \in [-\pi_{p,q}/2 + 2k\pi_{p,q}, \pi_{p,q}/2 + 2k\pi_{p,q}), \\ -\arcsin_{p,q}^{-1}(x - (2k+1)\pi_{p,q}), & x \in [\pi_{p,q}/2 + 2k\pi_{p,q}, 3\pi_{p,q}/2 + 2k\pi_{p,q}), \end{cases} \quad (7)$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Pro výpočet by byl ještě praktičtější zápis pomocí funkce $F_{p,q}$. Jeho tvar na intervalu $[-\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}/2]$ lze snadno určit ze vztahu (5) a jeho tvar na intervalu $[\pi_{p,q}/2, 3\pi_{p,q}/2]$ je uveden o několik odstavců dále ve vztahu (9).

Zobecněnou funkci $\cos_{p,q} x$ budeme definovat odlišným způsobem než funkci $\sin_{p,q} x$. Definujme funkci $\cos_{p,q}: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ předpisem

$$\cos_{p,q} x := \frac{d}{dx} \sin_{p,q} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Ukážeme, že definice (8) je korektní. Uvažujme nejprve interval $[0, \pi_{p,q}/2]$, na kterém $\sin_{p,q} x = F_{p,q}^{-1}(x)$. Funkce $F_{p,q}$ je rostoucí a spojitá, platí $F'_{p,q}(x) = (1-x^q)^{-\frac{1}{p}} \neq 0$ pro $x \in [0, 1)$ a derivace zleva funkce $F_{p,q}$ v bodě 1 je $+\infty$. Podle obecnější verze věty o derivaci inverzní funkce (viz např. [7] na str. 149) platí, že $(F_{p,q}^{-1})'$ existuje na celém intervalu $[0, \pi_{p,q}/2]$, přičemž v krajním bodě $\pi_{p,q}/2$ je derivace zleva rovna nule. Nyní už není těžké přesvědčit se, že funkce $\sin_{p,q} x$ je diferencovatelná na celém \mathbb{R} . Definice funkce $\cos_{p,q} x$ je tedy korektní.

Větu o derivaci inverzní funkce využijeme znovu, tentokrát k tomu, abychom vyjádřili funkci $\cos_{p,q} x$ explicitně pomocí funkce $\sin_{p,q} x$. Zaměříme se nejdříve na interval $[0, \pi_{p,q}/2]$, na kterém $\sin_{p,q} x = \arcsin_{p,q}^{-1} x = F_{p,q}^{-1}(x) \geq 0$. Dosazením do (8) dostaneme

$$\cos_{p,q} x = \frac{d}{dx} F_{p,q}^{-1}(x) = \frac{1}{F'_{p,q}[F_{p,q}^{-1}(x)]} = \frac{1}{[1 - (\sin_{p,q} x)^q]^{-\frac{1}{p}}} = (1 - |\sin_{p,q} x|^q)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in [0, \pi_{p,q}/2].$$

Pro $x \in [-\pi_{p,q}/2, 0)$ je $\sin_{p,q} x = -F_{p,q}^{-1}(-x) < 0$ a platí

$$\cos_{p,q} x = -\frac{d}{dx} F_{p,q}^{-1}(-x) = \frac{1}{F'_{p,q}[F_{p,q}^{-1}(-x)]} = \frac{1}{[1 - (\sin_{p,q}(-x))^q]^{-\frac{1}{p}}} = (1 - |\sin_{p,q} x|^q)^{\frac{1}{p}},$$

kde v posledním kroku se využilo lichosti funkce $\sin_{p,q} x$. Analogickým postupem bychom získali vzorce i pro $x \in [\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}]$ a pro $x \in (\pi_{p,q}, 3\pi_{p,q}/2]$. Skutečně, s pomocí (6) dostaneme vztah

$$\sin_{p,q} x = \begin{cases} F_{p,q}^{-1}(\pi_{p,q} - x), & x \in [\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}], \\ -F_{p,q}^{-1}(x - \pi_{p,q}), & x \in (\pi_{p,q}, 3\pi_{p,q}/2], \end{cases} \quad (9)$$

který bychom opět museli po částech zderivovat. Nyní už není těžké uvážit, že vztah $\cos_{p,q} x = (1 - |\sin_{p,q} x|^q)^{\frac{1}{p}}$ platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, tj.

$$|\sin_{p,q} x|^q + |\cos_{p,q} x|^p = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Rovinnou křivku s implicitním zadáním

$$|x|^p + |y|^q = 1, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2, \quad (11)$$

nazveme *zobecněnou (jednotkovou) kružnicí*.

2.1 Zobecněná funkce arkuskosinus

Při konstrukci zobecněného sinu jsme nejprve definovali zobecněný arkussinus, poté jsme definovali zobecněný sinus jako jeho inverzi. Zobecněný kosinus jsme definovali jiným způsobem bez použití inverzní funkce. V této části tedy ještě doplníme definici zobecněné funkce arkuskosinus a dáme ji do vztahu s již definovanými funkcemi. Doplňujeme a rozšiřujeme výsledky z článku [5].

Definujeme funkci $\arccos_{p,q}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi_{p,q}]$ jako inverzní funkci k funkci $\cos_{p,q} x$ na intervalu $[0, \pi_{p,q}]$. Cílem dalších odvození bude nalézt co nejpřehlednější zápis této funkce.

Z platnosti (10) plyne

$$\sin_{p,q}(\arccos_{p,q} x) = |\sin_{p,q}(\arccos_{p,q} x)| = (1 - |\cos_{p,q}(\arccos_{p,q} x)|^p)^{\frac{1}{q}} = (1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}} \quad (12)$$

pro $x \in [-1, 1]$. Odtud

$$\arcsin_{p,q}(\sin_{p,q}(\arccos_{p,q} x)) = \arcsin_{p,q}(1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (13)$$

Dále podle (4), (6) a z lichosti funkce $\sin_{p,q} x$ platí

$$\arcsin_{p,q}(\sin_{p,q} \alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \in [0, \pi_{p,q}/2], \\ \pi_{p,q} - \alpha, & \alpha \in (\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}]. \end{cases} \quad (14)$$

Konečně z (13) a z (14) dostaneme

$$\arccos_{p,q} x = \begin{cases} \arcsin_{p,q}(1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}}, & x \in [0, 1], \\ \pi_{p,q} - \arcsin_{p,q}(1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}}, & x \in [-1, 0). \end{cases} \quad (15)$$

Označme $G_{p,q}(x) := \arcsin_{p,q}(1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}}$, $x \in [0, 1]$. S tímto označením lze snáz vypočítat, že vztah (15) je obdobou vztahu (3). Obdobnost těchto vztahů bude ještě lépe vidět, až ukážeme, že $F_{p,q}(x) = \arccos_{p,q}(1 - |x|^q)^{\frac{1}{p}}$, $x \in [0, 1]$. Najdeme však nejprve integrální tvar funkce $G_{p,q}$. Z (2) dostaneme

$$G_{p,q}(x) = \int_0^{(1-x^p)^{\frac{1}{q}}} (1-t^q)^{-\frac{1}{p}} dt = -\frac{p}{q} \int_1^x s^{p-2} (1-s^q)^{\frac{1-q}{q}} ds, \quad x \in [0, 1],$$

kde pro odvození druhé rovnosti byla použita substituce $s = (1-t^q)^{\frac{1}{p}}$.

Poznamenejme, že

$$\arccos_{2,2} x = G_{2,2}(x) = -\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arccos x, \quad x \in [0, 1].$$

Není těžké dokázat, že z (15) plyne

$$\arccos_{p,q}(-x) = \pi_{p,q} - \arccos_{p,q} x, \quad x \in [-1, 1].$$

Analogickým způsobem jako ve (12) lze odvodit rovnost $\cos_{p,q}(\arcsin_{p,q} x) = (1 - |x|^q)^{\frac{1}{p}}$, $x \in [-1, 1]$. Opět analogicky jako při vztazích (13), (14) a (15) lze získat vztah

$$\arcsin_{p,q} x = \begin{cases} \arccos_{p,q}(1 - |x|^q)^{\frac{1}{p}}, & x \in [0, 1], \\ -\arccos_{p,q}(1 - |x|^q)^{\frac{1}{p}}, & x \in [-1, 0), \end{cases}$$

který je rovnocenný se vztahem (3). Nutně totiž $F_{p,q}(x) = \arccos_{p,q}(1 - |x|^q)^{\frac{1}{p}}$ pro $x \in [0, 1]$.

2.2 Další vztahy a zobecněná funkce tangens

Uvedeme některé vlastnosti zavedených funkcí, které lze nalézt také v textu [5]. Navíc tyto vlastnosti doplníme a opravíme některé nejasnosti, které se objevují v jejich původní formulaci.

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi_{p,q}/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ odvodíme skrze (10) vztah

$$\frac{d}{dx} |\cos_{p,q} x| = -\frac{q}{p} |\cos_{p,q} x|^{1-p} |\sin_{p,q} x|^{q-1} \frac{d}{dx} |\sin_{p,q} x|. \quad (16)$$

Pomocí (8) a s využitím zobecněného vztahu pro derivování absolutní hodnoty $\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, dostaneme rovnici (16) ve tvaru

$$\operatorname{sgn}(\cos_{p,q} x) \frac{d}{dx} \cos_{p,q} x = -\frac{q}{p} |\cos_{p,q} x|^{1-p} |\sin_{p,q} x|^{q-1} (\cos_{p,q} x) \operatorname{sgn}(\sin_{p,q} x)$$

a po úpravě ve tvaru

$$\frac{d}{dx} \cos_{p,q} x = -\frac{q}{p} |\cos_{p,q} x|^{2-p} |\sin_{p,q} x|^{q-1} \operatorname{sgn}(\sin_{p,q} x). \quad (17)$$

Zobecněnou funkci tangens definujme předpisem

$$\operatorname{tg}_{p,q} x = \frac{\sin_{p,q} x}{\cos_{p,q} x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi_{p,q}/2 + k\pi_{p,q} \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (18)$$

Pak s pomocí (17) získáme vztah

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}_{p,q} x = 1 + \frac{q |\sin_{p,q} x|^q}{p |\cos_{p,q} x|^p}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi_{p,q}/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3 Speciální případy

Nyní bychom se chtěli zaměřit na několik hraničních případů, kde uvážíme volby $p = 1$ nebo $q = 1$. V literatuře [5] obvykle nacházíme předpoklad (který jsme také uváděli), že platí $p > 1$, $q > 1$. Pro samotný výpočet však tento předpoklad není nutný. V této části se tedy pokusíme jednotlivé okrajové varianty prozkoumat. V celé části se omezíme primárně na případy, kde je $0 \leq x \leq \frac{\pi_{p,q}}{2}$.

3.1 $p = 1, q = 1$

Funkce $F_{1,1}(x)$ z (2) splňuje pro $0 \leq x < 1$, že

$$F_{1,1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dx = -\ln(1-x). \quad (19)$$

V definici (2) uvažujeme $x \leq 1$, ale vidíme, že hodnota $F_{1,1}(1)$ není pro (19) definována a tedy předpoklad $x < 1$ je nezbytný. Proto ani hodnotu $\pi_{1,1} = F_{1,1}(1)$ nelze definovat jako reálné číslo vzhledem k divergenci uvažovaného integrálu (1). Položme proto $\pi_{1,1} = +\infty$. Touto volbou však výraz (7) přestane dávat smysl. Pro funkci $F_{1,1}(x)$ můžeme nalézt pouze její liché doplnění (3).

Uvažme funkci inverzní k (19), tou je

$$\sin_{1,1} x = F_{1,1}^{-1}(x) = 1 - e^{-x},$$

pro $0 \leq x < +\infty$. Ze vztahů (8), (18) dále platí

$$\begin{aligned} \cos_{1,1} x &= e^{-x}, \\ \operatorname{tg}_{1,1} x &= e^x - 1. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že se jedná o neobvyklou variantu zobecněných goniometrických funkcí, neboť se nejedná o periodické funkce. Přitom však tyto funkce splňují rovnost (10), protože platí

$$|\sin_{1,1} x|^1 + |\cos_{1,1} x|^1 = 1.$$

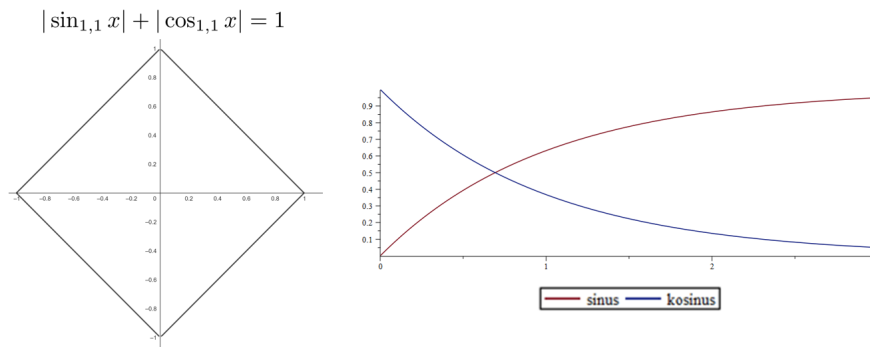
Všimněme si dalších vlastností těchto funkcí, které se vztahují k derivacím. Mějme:

$$\frac{d}{dx} \cos_{1,1} x = -e^{-x} = \sin_{1,1} x - 1, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{tg}_{1,1} x = e^x = \operatorname{tg}_{1,1} x + 1.$$

Obvyklé goniometrické funkce splňují řadu vztahů, které je vzájemně propojují. Analogické vlastnosti lze pro jisté volby p, q nalézt i pro zobecněné goniometrické funkce. Například v člancích [6, 11] autoři nacházejí několik vzorců pro dvojnásobné úhly zobecněných goniometrických funkcí, tj. pro $\sin_{p,q} 2x$ a $\cos_{p,q} 2x$. Neboť jsme našli $\sin_{1,1} x$ i $\cos_{1,1} x$ explicitně, lze jejich vlastnosti zkoumat přímo studiem vlastností odvozených funkcí. Platí

$$\begin{aligned} \sin_{1,1} 2x &= 1 - e^{-2x} = 1 - \cos_{1,1}^2 x, \\ \cos_{1,1} 2x &= e^{-2x} = \cos_{1,1}^2 x, \\ \sin_{1,1}^2 x &= \cos_{1,1} 2x + 2 \sin_{1,1} x - 1, \\ \sin_{1,1}(x+y) &= 1 - \cos_{1,1} x \cos_{1,1} y, \end{aligned}$$

kde používáme obvyklé značení $\cos_{1,1}^2 x = (\cos_{1,1} x)^2$. Analogicky lze odvodit další vlastnosti.



Obrázek 1: Napravo: Zobecněné goniometrické funkce pro $p = 1$ a $q = 1$. Nalevo: Část zobecněné kružnice $|x| + |y| = 1$, kterou lze parametrizovat v prvním kvadrantu jako $y = \sin_{1,1} t$, $x = \cos_{1,1} t$, $t \in [0, \infty)$. Viz také (10).

3.2 $p = 1, q = 2$

Mějme funkci $F_{1,2}(x)$ pro $0 \leq x < 1$, která má ze vztahu (2) tvar

$$F_{1,2}(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dx = [\operatorname{arctanh} t]_0^x = \operatorname{arctanh} x. \quad (20)$$

Podobně jako v případě $p = 1, q = 1$ vidíme, že hodnota $F_{1,2}(1)$ není definována, a proto opět uvažujeme $\pi_{1,2} = +\infty$. Navíc ze vztahů (4), (8), (18) platí pro $0 \leq x < +\infty$, že

$$\begin{aligned} \sin_{1,2} x &= \tanh x, \\ \cos_{1,2} x &= 1 - \tanh^2 x, \\ \operatorname{tg}_{1,2} x &= \frac{\tanh x}{1 - \tanh^2 x} = \cosh x \sinh x. \end{aligned}$$

I v tomto případě lze snadno ukázat, že odvozené funkce vyhovují rovnici (10) ve tvaru

$$|\sin_{1,2} x|^2 + |\cos_{1,2} x|^1 = 1.$$

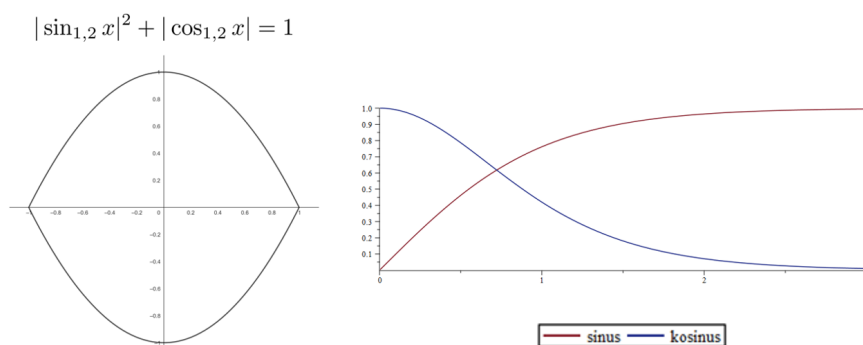
Nyní se zaměříme na několik vlastností těchto funkcí. Funkce $\sin_{1,2} x$, $\cos_{1,2} x$ například splňují

$$\begin{aligned} \sin_{1,2} 2x &= \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} = \frac{2 \sin_{1,2} x}{1 + \sin_{1,2}^2 x}, \\ \frac{d}{dx} \cos_{1,2} x &= -2 \tanh x (1 - \tanh^2 x) = -2 \sin_{1,2} x \cos_{1,2} x. \end{aligned}$$

Další pozorování, které můžeme o funkcích $\sin_{1,2} x$, $\cos_{1,2} x$ je fakt, že jsou propojeny s funkcemi $\sin_{1,1} 2x$, $\cos_{1,1} 2x$. Platí totiž vztah

$$\sin_{1,2} x = \tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{\sin_{1,1} 2x}{1 + \cos_{1,1} 2x},$$

je otázkou, zda podobné propojení neexistuje i pro jiné volby p, q . Analogické propojení jsou zkoumány také v [6].



Obrázek 2: Napravo: Zobecněné goniometrické funkce pro $p = 1$ a $q = 2$. Nalevo: Část zobecněné kružnice $|x|+y^2 = 1$, kterou lze parametrizovat v prvním kvadrantu jako $y = \sin_{1,2} t$, $x = \cos_{1,2} t$, $t \in [0, \infty)$. Viz také (10).

3.3 $p = 2, q = 1$

Pro $0 \leq x \leq 1$ uvažujme funkci

$$F_{2,1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = [-2\sqrt{1-t}]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x}. \quad (21)$$

Poznamenejme, že tato volba p, q vede oproti předchozímu případu na konečnou hodnotu $\pi_{2,1}$. Vskutku $\pi_{2,1} = 2F_{2,1}(1) = 4$. Vztahy (4), (8) nyní dávají

$$\begin{aligned} \sin_{2,1} x &= 1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2, \\ \cos_{2,1} x &= 1 - \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Povšimněme si, že $\sin_{2,1} x$ tvoří periodické rozšíření kvadratické funkce a $\cos_{2,1} x$ tvoří periodické rozšíření lineární funkce. Navíc i tyto funkce splňují, že

$$|\sin_{2,1} x|^1 + |\cos_{2,1} x|^2 = 1.$$

Poznamenejme dále, že v článku [3] autoři odvozují jinou variantu zobecněných goniometrických funkcí, tzv. parabolických goniometrických funkcí (označme je $\sin_p x$ a $\cos_p x$), které se definují přímo z rovnice parabolické kružnice

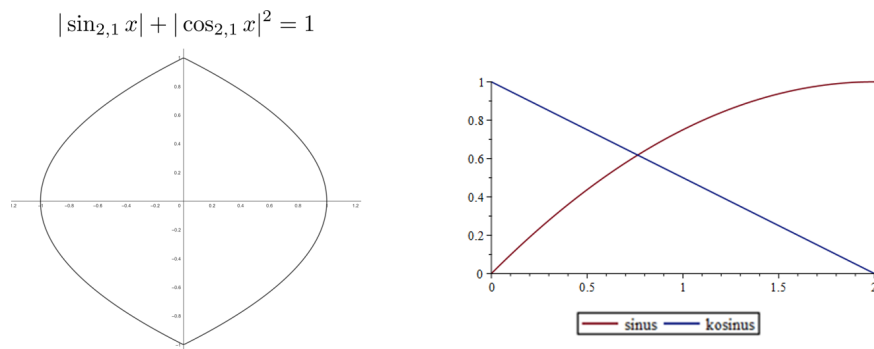
$$\sin_p^2 x + |\cos_p x| = 1$$

spolu s požadavkem, aby funkce splňovaly rovnost

$$\frac{1}{2} \sin_p x \cos_p x + \int_{\cos_p x}^1 (1-t^2) dt = \frac{x}{2}.$$

Na základě těchto vztahů lze nyní odvodit, že platí

$$\begin{aligned} \sin_p x &= 3 - 2 \cosh\left(\frac{2}{3} \operatorname{arcsinh} \frac{3x-4}{2}\right), \\ \cos_p x &= -2 \sinh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arcsinh} \frac{3x-4}{2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$



Obrázek 3: Napravo: Zobecněné goniometrické funkce pro $p = 2$ a $q = 1$. Nalevo: Část zobecněné kružnice $x^2 + |y| = 1$, kterou lze parametrizovat v prvním kvadrantu jako $y = \sin_{2,1} t$, $x = \cos_{2,1} t$, $t \in [0, 2]$. Viz také (10).

I v článku [3] definují autoři zobecnění Ludolfova čísla. A to skrze obsah parabolické kružnice $x^2 + |y| = 1$ jako $\pi_p = \frac{4}{3}$. Na základě uvedených faktů můžeme navíc odvodit vztah pro inverzní funkci k $\sin_p x$; ta je

$$\arcsin_p x = \int_0^x \frac{2-t}{\sqrt{1-t}} dt, \text{ pro } 0 \leq x < 1.$$

Vidíme, že zatímco se funkce $\sin_{2,1} x$ daná skrze (22) výrazně liší od funkce $\sin_p x$, která je zadaná skrze (23), tak jejich inverze mají podobnou formuli. Tímto pozorováním navíc získáme omezení

$$\arcsin_p x - \arcsin_{2,1} x = \int_0^x \frac{1-t}{\sqrt{1-t}} dt = \int_0^x \sqrt{1-t} dt = \frac{2(1 - \sqrt{(1-x)^3})}{3} \leq \frac{2}{3}.$$

4 Konvergence počítaných integrálů

Pro potřeby dalších úvah označme

$$f_{p,q}(t) = (1 - t^q)^{-\frac{1}{p}}, \quad t \in [0, 1], \quad p, q \in (0, +\infty).$$

V předchozí kapitole jsme na příkladech ukázali, že integrál

$$\int_0^1 f_{p,q}(t) dt \tag{24}$$

ve výrazu (1) může a nemusí být konvergentní. Pro budoucí výzkum by mohlo být užitečné se zamyslet nad otázkou, pro které kombinace parametrů p, q je integrál (24) konečný, a pro které nikoliv. Odpověď na tuto otázku jsme v literatuře explicitně nenalezli, avšak předpokládáme, že pro často studované případy $p, q \in (1, +\infty)$ byla již odpověď nalezena. Na širší množině $p, q \in (0, +\infty)$ zodpovídá tuto otázku ekvivalence

$$\int_0^1 f_{p,q}(t) dt < +\infty \iff 1 < p, \tag{25}$$

jejíž důkaz rozebereme na následujících řádcích.

Důkaz. Mějme pro $t \in (0, 1)$ parciální derivace

$$\frac{\partial f_{p,q}(t)}{\partial p} = \frac{\ln(1-t^q)}{p^2 \sqrt[p]{1-t^q}} < 0,$$

$$\frac{\partial f_{p,q}(t)}{\partial q} = \frac{t^q \ln(t)}{p(1-t^q) \sqrt[p]{1-t^q}} < 0.$$

Funkce $f_{p,q}(t)$ je tedy klesající vzhledem k parametrům $p, q \in (0, +\infty)$. Poté uvážíme dvě varianty:

I) Předpokládejme, že $p \leq 1$ a položme $q_0 = \max\{q, 1\}$. Potom $q_0 \geq 1$ a pomocí nerovností

$$f_{p,q}(t) \geq f_{1,q_0}(t) = \frac{1}{1-t^{q_0}} \geq \frac{t^{q_0-1}}{1-t^{q_0}}$$

dostáváme

$$\int_0^1 f_{p,q}(t) dt \geq \int_0^1 \frac{t^{q_0-1}}{1-t^{q_0}} dt = \frac{1}{q_0} [-\ln(1-t^{q_0})]_0^1 = +\infty.$$

Integrál (24) je tedy divergentní pro $p \leq 1, q \in (0, +\infty)$.

II) Dále předpokládejme, že $p > 1$ a volme $q_0 = \min\{q, 1\}$. Pak $q_0 \leq 1$ a dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{p,q}(t) dt &\leq \int_0^1 f_{p,q_0}(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{1-t^{q_0}}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{1-t^{q_0}}} \frac{1}{t^{1-q_0}} dt \\ &= \frac{1}{q_0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{u}} du < +\infty. \end{aligned}$$

Integrál (24) je tedy konvergentní pro $p > 1, q \in (0, +\infty)$. Varianty I) a II) pokrývají dohromady obě části ekvivalence (25) a tímto je důkaz hotov. \square

Pro úplnost ještě poznamenejme, že z konvergence integrálu (24) plyne také konvergence integrálu $F_{p,q}(1)$ ve výrazu (2).

Závěr

V práci jsme podrobně zavedli několik základních poznatků o zobecněných goniometrických funkcích. Navíc jsme prozkoumali několik variant na hranici jejich obvyklé definice. Nabízí se otázka, zda tuto hranici nelze překročit a zda by nemělo smysl se zaměřit i na funkce za touto hranicí. Tím myslíme pro volby $p < 1$ a $q < 1$. Například pokud položíme $p = q = \frac{2}{3}$ dostaneme zobecněnou kružnici (10), která je obvyklou astroidou

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Naopak ve vztahu (2) platí

$$F_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}(x) = \int_0^x (1-t^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} dt,$$

kterýžto integrál vyjde za pomoci softwaru Maple jako

$$F_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}(x) = \frac{3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} - 3 \operatorname{arcsinh} \sqrt[3]{x}.$$

Je možné, že tyto varianty byly již byly hlouběji prozkoumány. My o tom však nevíme. Podobné úvahy ubírající se stejným směrem se nám povedlo objevit pouze v nedávném článku [6].

Reference

- [1] BAYAR, A. 2009. On the trigonometric functions in maximum metric, *KoG*, 12.
- [2] DATTOLI, G., LICCIARDI, S., PIDATELLA, R.M. 2018. Theory of generalized trigonometric functions: From Laguerre to Airy forms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 468(1), 103–115.
- [3] DATTOLI, G., DI PALMA, E., GIELIS, J., LICCIARDI, S. 2018. Parabolic Trigonometry, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 6(2).
- [4] DRÁBEK, P., MANÁSEVICH, R. 1999. On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p-laplacian, *Differential and Integral Equations*, 12(6), 773–788.
- [5] EDMUNDS, D., GURKA, P., LANG, J. 2021. Properties of generalized trigonometric functions, *Journal of Approximation Theory*, 1, 47–56.
- [6] MIYAKAWA, H., TAKEUCHI, S. 2022. Applications of a duality between generalized trigonometric and hyperbolic functions II, *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(4).
- [7] NOVÁK, V. 1997. Diferenciální počet v \mathbb{R} . Masarykova univerzita, Brno. ISBN 80-210-1561-6.
- [8] SHELUPSKY, D. 1959. A Generalization of the Trigonometric Functions, *The American Mathematical Monthly*. 66(10), 879–884.
- [9] SPÍCHAL, L. 2021. Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické π , *Rozhledy matematicko-fyzikální*.
- [10] TAKEUCHI, S. 2012. Generalized Jacobian elliptic functions and their application to bifurcation problems associated with p-Laplacian, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385, 24–35.
- [11] TAKEUCHI, S. 2021. Some double-angle formulas related to a generalized lemniscate function, *The Ramanujan Journal*, 753–761.
- [12] WEI, D., LIU, Y. 2021. Some generalized trigonometric sine functions and their applications, *Applied Mathematical Sciences*.

MATH SUPPORT CENTRE NA VŠB–TUO: ZHODNOCENÍ ČINNOSTI PO (TÉMĚŘ) SEDMI LETECH PROVOZU

KOTŮLEK Jan

VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie,
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba
jan.kotulek@vsb.cz

Abstrakt: V tomto článku sledujeme založení a činnost math support centre (MSC) na VŠB-TUO. Popisujeme způsob práce v MSC a upozorňujeme na jeho rozdíly vzhledem ke konvenční výuce. Dále popisujeme institucionální přínosy MSC, zejména vliv na změnu studijního prostředí a diskutujeme jeho dopad na propadavost. V závěru zmiňujeme podmínky, které pomohly úspěšnému fungování našeho MSC.

Klíčová slova: centra podpory, math support centre (MSC), výuka matematiky, studijní neúspěšnost, přechod mezi sekundárním a terciárním vzděláváním

1 Úvod

Idea vzniku matematických center podpory (*math support centre*, dále MSC) vznikla na několika univerzitách ve Velké Británii na počátku 90. let jako odpověď na tzv. *Mathematics Problem*, tedy nedostatečnou připravenost studentů na kurzy matematiky a statistiky, nejčastěji v inženýrských studijních programech. Určující bylo zejména zjištění, že problém nehodlá řešit britská vláda ani ministerstvo, ale očekávají, že se s ním vyrovnají univerzity svými vlastními silami. Relevantní diskusi včetně další literatury shrnuje práce [5].

Podobná situace nastala zhruba o dvacet let později také v Česku. Demokratizace terciárního vzdělávání přivedla na vysoké školy vysoké počty studentů s „nestandardním“ středoškolským vzděláním a nedostatečnou přípravou zejména v matematice. Prvotní reakcí ze strany vedení některých fakult byl, stejně jako v Británii, tlak na snížení požadavků u matematických předmětů nebo překotné a nepromyšlené krácení či dokonce úplné rušení některých matematických kurzů. Na první pohled by se to mohlo zdát logickým krokem, jelikož mnoho studentů, kteří předčasně ukončovali studium, uvádělo jako hlavní důvod ukončení studia problémy s matematikou. To podporovalo negativní obraz matematiky jako nutného a nepříjemného zla nejen mezi studenty, ale i mezi některými akademickými pracovníky z odborných kateder a především to bylo negativně vnímáno managementem univerzity. Matematika je sice uváděna jako hlavní akademický důvod předčasného ukončování studií na univerzitách, ovšem z našich zkušeností vyplývá, že je to spíše první pohodlný důvod. V tomto článku ukážeme, jak se práce MSC projevila na míře a důvodech propadavosti.

Rozhodně si nemyslíme, že by MSC dokázaly vyřešit všechny problémy studentů vysokých škol, ale jsou rozhodně významným příspěvkem k vytvoření motivujícího inkluzivního prostředí, ve kterém se mohou naplno rozvíjet i studenti nálepkovaní jako „slabší“, „méně připravení“ nebo studenti se specifickými studijními potřebami. Úkolem tohoto příspěvku je popsat roli MSC v práci se studenty, kteří jsou ohroženi studijním neúspěchem v matematice, přestože jsou motivováni pro svůj zvolený studijní program.

2 Implementace MSC v Česku

Prvotní nápad založit MSC v Česku se zrodil v roce 2015 v kampusu Agderské univerzity v Kristiansandu. Shodou okolností se tam ve stejné době setkaly na návštěvě tamního MatRIC Drop-in Centre, viz [8], projektové týmy ze tří českých univerzit, pracující na různých tématech, ovšem se společným zájmem o zlepšení výuky na své domovské univerzitě. Všechny tři týmy se doma zasadily o založení support center, a tak během roku 2016 vznikla centra na Ekonomicko-správní fakultě MU v Brně, Fakultě aplikované informatiky UTB ve Zlíně a na VŠB-TUO v Ostravě jako celoškolské pracoviště zaštiťované Katedrou matematiky a deskriptivní geometrie, viz např. [9], [6] a [3].

Na VŠB-TUO byl nápad představen v rámci dvou katedrálních seminářů. Hlavními iniciátory projektu byli Jan Kotůlek, Radka Hamříková a Arnošt Žídek. Reakce byla veskrze pozitivní. Ukázalo se, že frustrace z toho, že studenti, kteří mají nejasnosti v probírané látce, se neprijdou zeptat v konzultačních hodinách, je společná pro velkou část zaměstnanců. Společně jsme také formulovali svou potřebu poskytovat konzultace vhodněji než pouhým vypsáním konzultačních hodin a zavedením „politiky otevřených dveří“ (do kanceláře).

Díky podpoře vedení katedry a prorektora pro studium jsme *Math Support Centre* na VŠB-TUO otevřeli 10. 10. 2016, symbolicky v 10 hodin a 10 minut.



Slavnostní otevření Math Support Centre 10. 10. 2016. V první řadě třetí zleva prorektor pro studium prof. Ing. Petr Noskivič CSc. a čtvrtý zleva vedoucí KMDG prof. RNDr. Radek Kučera, Ph.D. Místnost F311, kampus Poruba, VŠB-TUO. Foto: Mgr. František Červenka.

Již tehdy se vytvořilo jádro týmu tutorů, kteří se rozhodli britsko-norský model vyzkoušet v našich podmínkách. Administrativní role si rozdělili výše uvedení iniciátoři projektu, společně s nimi se na konzultacích podíleli Dagmar Dlouhá, Monika Jahodová, Kateřina Kozlová, Jitka Krčková, Zuzana Morávková, Radomír Paláček, Petra Schreiberová, Magda Štěpánová. Záhy se posílili tým Jiří Doležal, Iveta Cholevová, Jiří Krček, Pavel Ludvík a Eva Vavříková.

Velmi brzy se ukázalo, že místnost F311, adaptovaná z kanceláře a schovaná na konci temného koridoru ve třetím patře bloku F je pro potřeby MSC nevhodná, a to nejen umístěním, ale i velikostí. Díky podpoře prorektora pro studium jsme již od října 2017 získali novou a větší místnost UK201, která je vhodně situovaná v budově knihovny, na rušném druhém patře, v průchodu do auly. První větší akcí v nové místnosti byla Noc vědců 6. 10. 2017, následovaná slavnostním otevřením místnosti pro studenty 9. 10. 2017, v 9:10.

V akademickém roce 2017/2018 nepříznivě zasáhly do rozvoje MSC reorganizační změny na VŠB-TUO. Byla zrušena celoškolská Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, v červnu 2018 byli někteří zaměstnanci převedeni na nově vzniklé katedry na Fakultě stavební (FAST) a Fakultě strojní (FS). Tyto změny se nelze projevit také v týmu MSC. V přímé či nepřímé souvislosti s reorganizací opustila v následujících letech školu polovina tutežského týmu, konkrétně Radka Hamříková (nyní zástupkyně ředitele Monty school) a Arnošt Židek (nyní ředitel ZŠ Otická, Opava), Iveta Cholevová, Magda Štěpánová, Kateřina Kozlová, Jitka Krčková, Pavel Ludvík a Eva Vavříková. Jen tři z nich zůstávají pomáhat týmu MSC jako externí tutoři.

Posílení týmu MSC novými tutory bylo od roku 2018 jedním z hlavních manažerských úkolů vedení MSC. To bylo potřeba zejména vzhledem k zapojení MSC do projektu *Technika pro budoucnost 2.0*. V rámci tohoto čtyřletého projektu byl postupně nastaven ucelený systém poskytování konzultací a tutoriálů. Z technického hlediska se díky financím z projektu podařilo rozšířit počet poskytovaných konzultací, vybavit místnost MSC novou technikou, zprovoznit webové stránky s aktuálním rozvrhem konzultací a online zápisy návštěvnosti centra.



Záběr z workshopu *Training Event for Mathematics and Statistics Support Managers and Tutors*, 1.–3. 3. 2019, přednášející David Bowers (první zprava).

Mnohem důležitější změny ale nebyly vidět na první pohled. Hned na začátku řešení projektu jsme do Ostravy pozvali Davida Bowerse, šéfa britské Sigma Network, který nás provedl britským systémem školení tutorů. To velmi podstatně ovlivnilo metodiku poskytování konzultací, ale pomohlo nám také zavést systém školení a mentorské práce založený na britských zkušenostech, viz [1]. Školeními prochází všichni noví tutoři. Dlouhodoběji se mentorsky věnujeme zejména studentským tutorům, jejichž fluktuace je větší než u zaměstnanců, a kteří také oceňují postupné získávání zkušeností a sebevědomí.

3 Způsob práce v MSC

Nejčastěji se MSC prezentují jako nízkoprahová centra, proto jsou obvyklým formátem nabídky tzv. *drop-in sessions*, tedy „stavte se za námi tehdy, kdy Vám to v rámci našich možností nejlépe vyhovuje“. I my jsme nejdříve zavedli široce pojaté otevírací časy v centru pro tyto individuální konzultace. Záhy se ukázala potřeba rozšíření konzultací na fakulty, které sídlí mimo porubský kampus. Tamější studenti měli totiž možnosti navštívit centrum mnohem omezenější. První pobočné centrum bylo založeno na Fakultě stavební (2018), dále na Fakultě bezpečnostního inženýrství (2019, dedikovaná místnost od roku 2021) a konečně na Ekonomické fakultě (2022).

Hned v počátcích jsme si vyzkoušeli další formu konzultací, a to hromadné tematické lekce, které pracovním nazýváme *tutoriády*, srov. [7]. Tyto lekce studenti ocenili zejména při přípravách na zkoušky během pandemie covid-19. Podrobnější rozbor jejich metodiky uvádíme v sekci 3.2.

Třetím typem nabídky jsou *předem rezervované individuální* (jeden na jednoho) *konzultace*. Ty jsou dle našeho názoru vhodné zejména pro pokročilé studenty nebo složitější problematiku, v našem případě je o takové konzultace velmi malý zájem, proto zatím necítíme potřebu připraveného rezervačního formuláře (jako má např. Physics Support Centre), jehož nevýhody podle nás stále převládají. Pokročilejší studenti se neostýchají kontaktovat nás e-mailem nebo se obracejí přímo na svého oblíbeného tutora, kterého znají z předchozích let a mají k němu vybudovanou důvěru. U nás jsme rezervační systém použili pouze během pandemie covid-19, abychom dokázali naplnit vládní protiepidemiologická nařízení.

3.1 Drop-in

Tzv. *drop-in sessions* tvoří páteř nabídky konzultací na VŠB-TUO. V této kapitole podrobněji popisujeme metodiku, počty návštěv prezentujeme v kapitole 5.

Jako nízkoprahové komunitní centrum se příchozích neptáme na jméno ani jiné osobní detaily. Kvůli evidenci návštěvnosti nás zajímá pouze fakulta, kterou příchozí studuje, a i to zpravidla zjišťujeme až po skončení konzultace. Zpočátku jsme k tomuto účelu měli připravené anonymní odpovědní lístečky, se vzrůstající důvěrou studentů si můžeme dovolit zeptat ve vhodné chvíli osobně.

V rámci úvodního rozhovoru se především snažíme co nejpřesněji zjistit, co konkrétně studenta trápí. Přitom postupujeme maximálně respektujícím způsobem, nenálepkuje je kvůli jeho neznalostem, ale oceňujeme snahu se něco dozvědět a zaměřujeme se na jeho aktuální zájem. Ukazuje se, že tato úvodní spíše psychologická část je pro úspěch klíčová. Mnoho studentů přichází s obavami nebo přímo fobií z matematiky, nejsou zvyklí zapracovat se do nové oblasti, ani si dostatečně upevnit základní matematické dovednosti (namátkou práce s mocninami, logaritmy) a mají také značně pošramocené sebevědomí.

Během konzultace se snažíme pomoci studentům s organizací časového plánu studia, podpořit je v systematické práci a opakování, případně je motivujeme k dalším návštěvám, jsou-li potřebné. Dále vedeme studenty k tomu, aby si stále lépe rozmysleli své dotazy a postupně si na ně zkoušeli sami hledat odpovědi. Tady je potřeba postupovat velmi obezřetně. Prvním pravidlem, které

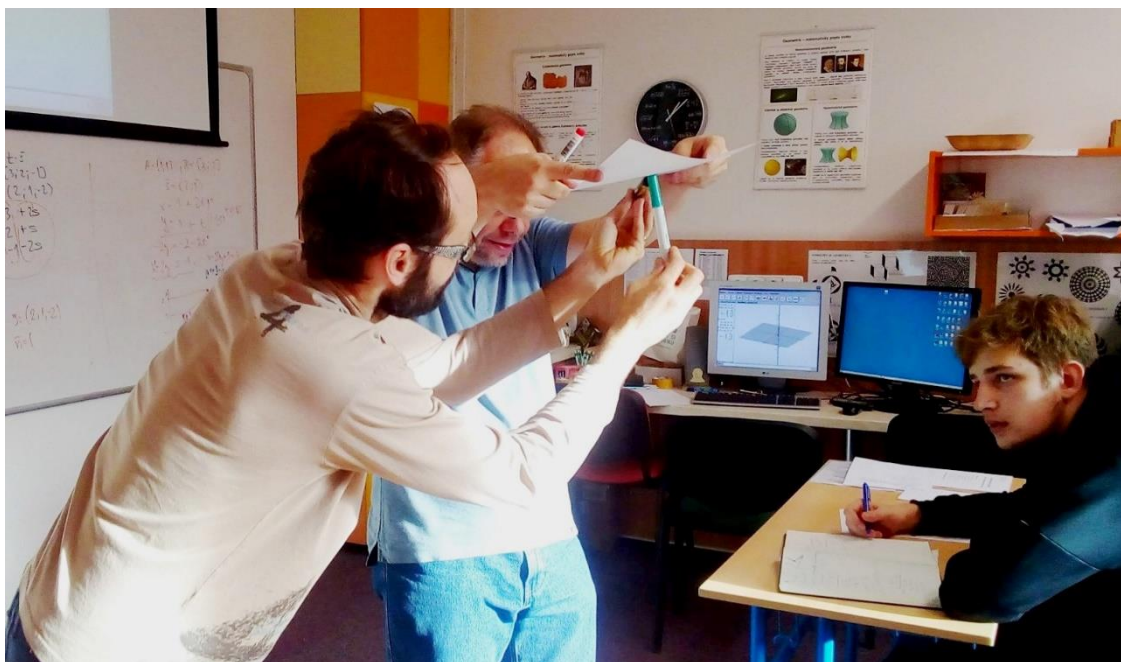
potřebujeme studentům sdělit, je, že *žádný dotaz není hloupý*. To přispívá k vytvoření bezpečného prostředí, ve kterém se bourají zábrany a mozek je schopen přijmout nové informace. Po šesti letech provozu se nám tento model podařilo prosadit. Noví studenti dostávají i od svých starších kolegů pobídku: „když Vám něco není jasné, běžte se na to zeptat do MSC“.

Dalším krokem je *práce s chybou*. Jednou z častých obav, která blokuje rozvoj matematických dovedností, je že v matematice je nepřipustné dělat chyby a že za každou chybu přichází trest. Tato démonizace chyby je patrná na většině studentů, nejen těch, kteří přicházejí do MSC. Nejenže vůbec nepoužívají metodu pokus-omyl, tak oblíbenou nejen u malých dětí, ale i u pokročilých vědců, ale je pro ně naprosto nepřijatelná, nepatří podle nich vůbec do matematiky. Tím spíše bychom očekávali, že budou mít studenti vyvinuté kontrolní mechanismy, aby chyby nedělali. Ani to však není běžné, a zafixovat u studentů návyk udělat si kraťouchké testy správnosti postupu není vůbec snadné. Mnohé způsoby autokorekce, které ukazujeme studentům jsme převzali z půvabné knížky [1].

Postupně se tedy snažíme o to, aby už nás student již dále nepotřeboval, což je, možná trochu paradoxně, naším konečným cílem.

3.2 Tutoriály

Hromadné tematické lekce neboli *tutoriály* připravujeme jako dobrovolné doplňkové hodiny na problematická témata. Velmi se nám osvědčilo vést je ve dvou lektorech (tandemu) či dokonce ve trojici (třetí lektor ovládá ukázky na PC a projektoru, nejčastěji v GeoGebře). Mnohem snadněji se nám takto tvořila pozitivní a přátelská atmosféra, protože dva tutoři snadno připravili a provedli řadu názorných ukázek. Standardně chystáme na první polovinu tutoriálu řízené velmi podrobné vysvětlování a na druhou část volnější výběr z několika příkladů, prostor pro dotazy, samostatnou práci apod.



Záběr z tutoriálu nazvaného *Analytická geometrie aneb jak se zorientovat v prostoru*, 18. 12. 2019, lektori (zleva) Jan Kotůlek a Arnošt Židek. Foto: Mgr. Monika Jahodová, Ph.D.

Výuka v tandemu je navíc zdrojem mnoha vtipných situací. Legrace se stala důležitou přísadou k vytvoření uvolněné nálady, která proces učení značně urychluje. Také se tím pokoušíme bořit mýtus

o matematicích jako vážných a nepřístupných od reálného světa odstřižených podivínech. To, že má tento přístup u studentů úspěch, dosvědčuje stabilně vysoká návštěvnost a pozitivní zpětná vazba.

Vyzkoušení modelu tutoriálů se vyplatilo hned ve dvou situacích. Během letního semestru 2019 jsme poskytli celkem 781 unikátních konzultací a takový příliv studentů přestal být zvládnutelný v modelu individuálních konzultací (zejména v předmětu Konstruktivní geometrie na Fakultě strojní došlo k nárůstu o 102 % ve srovnání se stejným obdobím předchozího roku). Nabídka opakovacích lekce, kde byly stěžejní problémy řešeny hromadně, pomohla situaci řešit.



Záběr z tutoriálu nazvaného *Analytická geometrie aneb jak se zorientovat v prostoru*, 22. 1. 2019.

Podruhé jsme využili připravené tutoriály při uzavření škol během pandemie nemoci covid-19, kdy jsme veškerou nabídku museli převést do on-line prostředí. Nejvíce se nám osvědčilo prostředí BigBlueButton integrované v LMS Moodle. Studenti měli mnohem menší chuť či snahu konzultovat online individuálně. Mnozí také čekali, jak se situace vyvine a s přípravou na zkoušky začali až po skončení semestru, proto jsme měli během zkuškového období plné ruce práce a online tutoriály nám pomohly práci velmi zefektivnit. Konkrétní data o návštěvnosti studujeme v sekci 5.

Po návratu prezenční výuky se však zájem o individuální konzultace obnovil, respektive dokonce předčil před-covidovou dobu. Tutoriály stále tvoří důležitý doplněk nabídky, zejména v on-line formě jsou vhodnou alternativou pro kombinované studenty, příp. studenty, kteří náhle onemocní, apod.

4 Institucionální přínos MSC a námitky proti jeho funkčnosti

Prvotní idea, která vedla k založení MSC, byla snaha o změnu nefunkčního formátu konzultačních hodin. Tradiční model zjevně studentům nevyhovoval, a proto jej takřka vůbec nevyužívali. Nešlo jen o nabízené hodiny (jejich počet a vhodnost času), ale také o vhodnost místa.

Přesunutí konzultací do místnosti, která je vhodně situována tam, kudy studenti přirozeně procházejí, je ke konzultacím přímo určena a je pro ně také vhodně vybavena, bourá mnoho umělých překážek, které by jinak musel překonat student jdoucí na konzultaci do kanceláře. Navíc naše sdělení „jsme tady pro Vás“ a „máme společný cíl“ působí na studenty mnohem pozitivněji a hlavně věrohodněji.

Rozhodně se nám tím podařilo změnit studijní prostředí v tom smyslu, že studenti se necítí být ve svých problémech opuštěni a bezradní, ale mají se kam s důvěrou obrátit o pomoc. Pokud se ukáže,

že jejich matematické kompetence jsou pro studium na VŠ nedostatečné, stále mají možnost se alespoň pokusit vše dohnat.

Z akreditačních spisů vyplývá, že i samotné vedení univerzity vnímá MSC jako důležitý nástroj k řešení problému nízké studijní úspěšnosti v bakalářských studijních programech. Přestože přímý znatelný dopad na pokles studijní neúspěšnosti se z dat, které máme k dispozici, nedá snadno prokázat, mění se alespoň důvody, které studenti uvádějí jako stěžejní pro rozhodnutí ukončit studium.

Relevantních důvodů pro ukončení studia je celá paleta, od ekonomických, přes osobní až k akademickým (studijním). I když je podle mezinárodních studií matematika hlavním *akademickým* důvodem neúspěšnosti ve studiu, z našich zkušeností vyplývá, že na VŠB-TUO matematika bývala spíše prvním „pohodlným“ vysvětlením neúspěchu. Pokud mají studenti k dispozici MSC, jsou v hodnocení důvodů odchodu ze studia znatelně konkrétnější a spektrum přiznávaných důvodů je mnohem širší. Troufáme si říct, že naši studenti stále častěji nepovažují matematiku za nepřekonatelného strašáka, ale spíše za obtížnou, leč překonatelnou překážku. Každopádně mnohem pečlivěji zvažují, jestli jsou ochotni do studia matematiky investovat tolik času a pílě, aby byli úspěšní nebo jestli se vydají jiným směrem.

Pro mnohé je časová i intelektuální náročnost vysoká, zejména proto, že mezi uchazeči o studium, a tedy i studenty přicházejícími do prvních ročníků, převažují absolventi středních průmyslových škol nad studenty z gymnázií. Jejich průprava je v průměru mnohem slabší, a proto také potřebují vyvinout mnohem větší úsilí, navíc v předmětu, kterému se tolik nevěnovali, ba někteří dokonce záměrně vyhýbali.

Na druhou stranu se od složení uchazečů odvíjí také praktičtější postavený profil absolventů VŠB-TUO, ve srovnání s ostatními technickými univerzitami. Tím lze vysvětlit také dlouhodobou úspěšnost VŠB-TUO v anketě *Škola doporučená zaměstnavateli*, viz [10]. Z toho ovšem vyplývá potřeba „praktičtějšího pojetí“ matematiky. Toto pojetí matematiky má na naší univerzitě dlouhou tradici, sahající až k Františku Čuříkovi, prvnímu profesoru matematiky a deskriptivní geometrie na VŠB v Příbrami, který byl autorem prvních českých učebnic kalkulu napsaných adresně pro potřeby inženýrské praxe, srov. [4]. K této tradici se katedra hrdě hlásí a nově přicházející zaměstnanci jsou vedeni ke zřeteli na praktičnost.

Při debatách se studenty v MSC jsem si několikrát uvědomil, že některé pojmy nebo postupy necháváme v sylabu ne kvůli potřebám studentů, ale kvůli tomu, že je rádi učíme nebo že se nám prostě jen líbí. Toto uvědomění vedlo i nás ke změnám v sylabu. Přitom se ale snažíme o takové změny, které by nebyly prostým snížením nároků, ale spíše je upravujeme tak, aby lépe odpovídaly potřebám inženýrské praxe.

5 Vývoj návštěvnosti MSC na VŠB-TUO

Z dat, která sbíráme při konzultacích, vyplývá, že po téměř sedmi letech provozu je MSC velmi pevně etablovanou součástí studijního portfolia na VŠB-TUO. Věřím, že nárůst návštěvnosti ve srovnání stejných období akademického roku je nejlepším důkazem úspěšnosti naší práce.

Zejména díky financím z projektu *Technika pro budoucnost 2.0* se nám podařilo navýšit počet nabízených konzultačních hodin ze zhruba 20 za týden na více než dvojnásobek, ve všech areálech VŠB-TUO, viz ukázkou rozvrhu níže.

K poklesu počtu individuálních konzultací došlo v zimním semestru 2020/21 a 2021/22, což jsou dva „covidové“ roky, kdy studenti neměli ani příliš možností přijít na osobní „on-site“ konzultaci. Tehdy navíc ve větším počtu navštěvovali hromadné tutoriály. Například v zimním semestru 2020/21 jsme na 41 online tutoriálech přivítali celkem 898 studentů, což vytvořilo dosavadní rekord, srov. tabulku návštěvnosti na další straně. Na druhou stranu nás ale přimělo k zamyšlení, jestli má

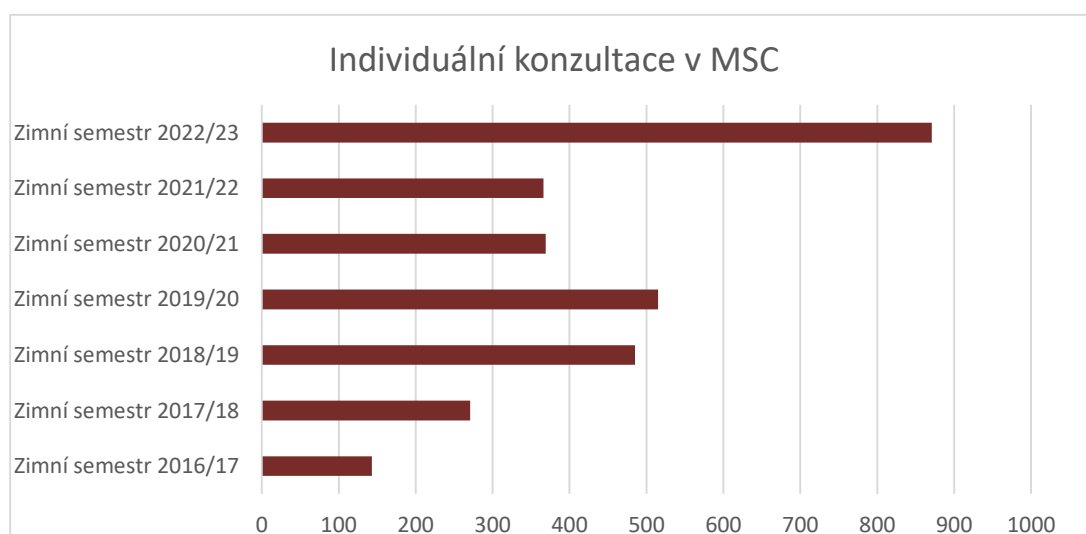
přihlášení studenta na online tutoriál stejnou váhu jako osobní konzultace, když od online studenta navíc třeba nemáme žádnou zpětnou vazbu a ani nevíme, kolik z výkladu vůbec vnímal.

Rozvrh Math Support Centre na všech pobočkách

- **UK201** (hlavní areál VŠB, místnost ve spojovací chodbě mezi knihovnou a aulou)
- **FAST** (budova na Ludvíka Poděště, učebna H501)
- **FBI** (budova na Lumírově, učebna LUMB105)
- **EkF** (budova na Sokolské 33, učebna EkFA317)
- **on-line** (odkaz na připojení u dané konzultace nebo lekce přímo v rozvrhu)

Dnes		listopad 2022		Měsíc	Týden	Den	Seznam
po	út	st	čt	pá			
44	31	1	2	3			
9:00 - 10:30 Lucie Hejzlarová (LUMB105) - ZM, MI, MII 10:30 - 12:00 Jakub Stryja (LUMB105) - ZM, MI, MII, MIV (2) 13:15 - 15:00 Jakub Konvička (UK201) - ZM, MI, MII, KG, FI 14:00 - 15:00 Dagmar Dlouhá (FAST) - ZM, MI, MII, DG, KG 15:00 - 16:30 Jan Kotůlek (UK201) - ZM, MI, MII 18:00 - 19:30 Alexandros Belis (UK201) - ZM, MI, FI 19:00 - 20:30 Opakovací lekce ze středoškolské matematiky	13:30 - 15:00 Tomáš Riemel (UK201) - ZM, MI, MII, FI 15:00 - 16:30 Jakub Konvička (UK201) - ZM, MI, MII, KG, FI 17:00 - 18:30 Alexandros Belis, Lukáš Hájek (UK201) - ZM, MI, MII, FI 19:00 - 20:30 Doplnková hodina z Matematiky II (on-line)	9:40 - 11:45 P. Schreiberová (UK201) - MII, MIII, PaSt 11:45 - 15:00 Monika Jahodová, Jaromír Štěpáník (UK201) - ZM, MI, MII, NM, KG 13:30 - 15:00 Václav Votoupal (FAST) - ZM, MI, DG, KG 15:00 - 16:30 Jakub Konvička (UK201) - ZM, MI, MII, KG, FI 15:00 - 16:00 Dagmar Dlouhá (FBI) - ZM, MI, MII, DG, KG 18:30 - 20:00 Iveta Cholevová (on-line) - ZM, MI, MII 18:30 - 20:00 Jiří Krčěk (UK201) - ZM, MI, II, IV, PaSt, NM, NM, Matlab	8:30 - 10:00 Jakub Konvička (UK201) - ZM, MI, MII, KG, FI 10:00 - 11:30 Radomír Paláček (LUMB105) - ZM, MI, II, IV, PaSt, Matlab (2) 10:30 - 12:00 P. Schreiberová (on-line) - MII, MIII, PaSt 12:00 - 13:30 Tomáš Riemel (UK201) - ZM, MI, MII, FI 15:00 - 16:30 Alexandros Belis (UK201) - ZM, MI, FI 19:00 - 20:30 Arnošt Židek (on-line) - ZM, MI, MII, MIV, FI	10:00 - 13:30 Markéta Novotná, Jana Šloufová (UK201) - ZM, MI, MII 13:30 - 15:00 Jan Kotůlek (UK201) - ZM, MI, MII 13:30 - 15:00 Lukáš Hájek (UK201) - ZM, MI, MII			

Proto výsledek letošního zimního semestru, 871 konzultací + 308 studentů na tutoriálech, vnímáme mnohem pozitivněji než 369 + 898 studentů ze zimního semestru 2020/21, přestože je absolutní počet letos zhruba a sto návštěv nižší. A to si ani nepotřebujeme pomoci argumentem zkrácení letošního semestru ze 14 na 11 týdnů, takže do letošní sumy počítáme už první týdny zkuškového období.



Závěr

Z výše uvedených argumentů vyplývá, že projekt MSC se na VŠB-TUO daří implementovat do českého terciárního vzdělávání. Okolností, které k tomu přispěly je mnoho. Mezi nimi hraje určitě zásadní roli nadšený tým tutorů spolupracujících se studentskými tutori. Spolupráce zaměstnanců a starších studentských tutorů je klíčová také v propagaci činnosti mezi nově příchozími studenty. Společně se studenty se účastníme *Infoschůzky pro prváky* organizované studentskou organizací *younie*, studenti se také příkladně starají o profily MSC na sociálních sítích. Bez morální a finanční podpory vedení by se však tento projekt neobešel, takže nezbyvá než si přát, aby vedení univerzity v podpoře MSC pokračovalo.

Poděkování

Tento článek vznikl za finanční podpory projektu *Technika pro budoucnost 2.0*, registrační číslo CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_058/0010212.

Odkazy

- [1] CIPRA, B. 2002. Chibičky; A jak je najít dřív než učitel, Dokořán, ISBN 80-86569-26-8
- [2] CROFT T. and GROVE M. (2011) *Tutoring in a mathematics support centre – a guide for postgraduate students*, sigma guide (HE STEM, University of Birmingham) 28 s., online: <http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/46836-Tutoring-in-MSC-Web.pdf>
- [3] HAMŘÍKOVÁ, R., KOTŮLEK J. and ŽÍDEK, A. (2017) Math Support Centre at Technical University of Ostrava, *Systemy Wspomagania w Inżynierii Produkcji* 6/4, p. 257–262.
- [4] KOTŮLEK, J. (2014) František Čuřík (†June 7, 1944); The First Professor of Mathematics and Descriptive Geometry at Mining University (VŠB), *23th Czech-Polish Conference Modern Mathematical Methods in Engineering (3mi)*, Horní Lomná, s. 71–76.
- [5] LAWSON, D., GROVE M. & CROFT A. (2019): The evolution of mathematics support: a literature review, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1662120
- [6] PÁTÍKOVÁ, Z. 2016. Podpůrná centra pro výuku matematiky na vysokých školách. Lávička, M. *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2016*. Plzeň: Vydavatelský servis, s. 97-100. ISBN 978-80-86843-52-0.
- [7] ŽÍDEK A. and KOTŮLEK J. (2019) Tutorials in the Math Support Centre at the Technical University of Ostrava, *APLIMAT 2019: 18th Conference on Applied Mathematics*, vol. 2, (Bratislava: Slovak University of Technology, 2019), p. 1352–1359.
- [8] *MatRIC drop in*, online: <https://www.uia.no/en/centres-and-networks/matric/drop-in>
- [9] Se statistikou v diplomce pomůže nové centrum, *Zprávy z MUNI*, 8. 3. 2016, online: <https://www.online.muni.cz/udalosti/7315-se-statistikou-v-diplomce-pomuze-nove-centrum>
- [10] Klub zaměstnavatelů, *Škola doporučená zaměstnavateli*, výsledky posledních ročníků online: <https://www.klubzamestnavatelu.cz/skola-doporucena-zamestnavateli/>

APLIKACE ROZKLADŮ GRAFŮ PŘI PARALELIZACI NUMERICKÝCH VÝPOČTŮ HUSTÝCH MATIC

KOVÁŘ Petr, ZHANG Yifan

VšB-TUO, Katedra aplikované matematiky, 17. listopadu 2172/15. 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail: petr.kovar@vsb.cz

Abstrakt: V článku [1] jsme navrhli metodu rozložení výpočtu husté matice na podmatice s využitím cyklického rozkladu kompletního grafu K_N na N kompletních podgrafů K_k . Parametry N a k cyklického rozkladu nejsou nezávislé, musí platit $N = k^2 - k + 1$. Navíc existence cyklického rozkladu vychází z tzv. ρ -ohodnocení, jehož existence je známa pouze pro takové hodnoty parametru k , kde $k - 1$ je mocninou prvočísla. Přístup pomocí cyklických rozkladů omezen na systémy se sdílenou pamětí. Vzhledem k vývoji architektury superpočítačů se rýsuje možnost implementace s využitím rychlých lokálních pamětí jednotlivých jader, avšak velikost lokální paměti je omezena. Má proto smysl studovat rozklady K_N na K_k , kde k jsou malé pevné hodnoty a N roste libovolně s počtem jader superpočítače. Takové rozklady nebudou cyklické, konstrukce vychází pro omezené parametry například ze Steinerovských systémů trojic či čtveřic a navíc pro další většinu hodnot N rozklady neexistují. Na druhou stranu místo rozkladů lze s úspěchem využít pokrytí grafů, které vychází z konstrukcí kombinatorických designů. Část výpočtu na malém počtu jader je provedena duplicitně (respektive část paměti malého počtu jader se nevyužije). Duplicitu lze modelovat zdvojenými hranami, kterým říkáme exces. Ukážeme, že pro většinu hodnot N je velikost excesu konstantní, jen pro málo hodnot N je násobkem N , a proto navržený model má smysl implementovat.

Klíčová slova: kombinatorický design, rozklad, kompletní graf

Navazujeme na článek: [1] LUKÁŠ, D., KOVÁŘ, P., KOVÁŘOVÁ, T., MERTA, M., A parallel fast boundary element method using cyclic graph decompositions, *Numerical Algorithms*, **70**, 807–824 (2015)

VARIAČNÍ FORMULACE DIFRAKČNÍ ÚLOHY NA PERIODICKÉM ROZHRAŇÍ

KRČEK Jiří

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Fakulta strojní VŠB-TU Ostrava
17. listopadu 15, 70800 Ostrava-Poruba
jiri.krcek@vsb.cz

Abstrakt: V příspěvku je prezentována možná variační formulace difrakční úlohy na hladkém periodickém rozhraní mezi dvěma homogenními materiály, především přechod od úlohy formulované na neomezené oblasti k úloze na oblasti omezené.

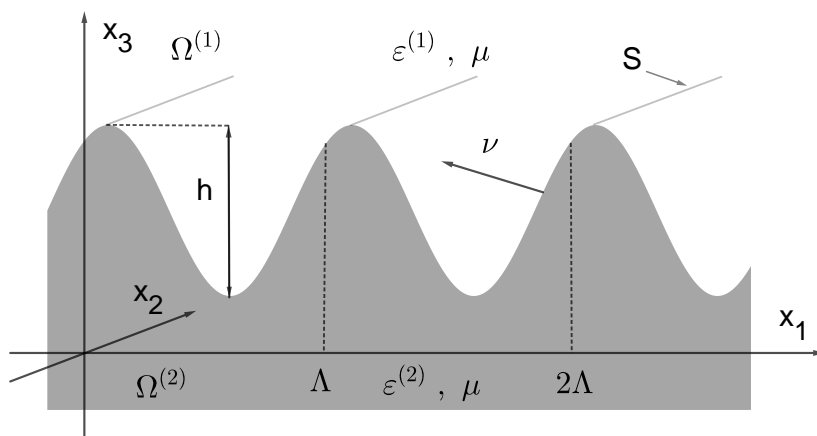
Klíčová slova: optická difrakce, variační formulace, Helmholtzova rovnice

1 Úvod

Difrakce optické vlny na periodickém rozhraní mezi dvěma homogenními materiály patří k poměrně často studovaným úlohám, zejména v případě, kdy je perioda rozhraní srovnatelná s vlnovou délkou dopadajícího svazku. Obecně je tato úloha popsána pomocí Maxwellových rovnic na neomezených oblastech s vhodnými okrajovými podmínkami na rozhraní. Jeden z poměrně často používaných přístupů k řešení této úlohy je metoda konečných prvků, vycházející po teoretické stránce z variační formulace základní úlohy - viz např. [1], [2]. V následujícím textu je ukázán možný způsob přechodu k úloze na omezené oblasti a následné variační formulace difrakčního problému. Jiný možný přístup je formulace pomocí hraničních integrálních rovnic [3].

2 Formulace problému

Zkoumáme úlohu optické difrakce na hladkém rozhraní mezi dvěma homogenními materiály. Rozhraní $S : x_3 = f(x_1)$ je Λ -periodické v proměnné x_1 a konstantní ve směru osy x_2 . Toto periodické rozhraní s jednotkovou normálou ν rozděluje prostor na dvě neomezené oblasti Ω_1, Ω_2 , na kterých jsou homogenní materiály charakterizovány konstantními relativními permitivitami $\varepsilon^{(1)} \neq \varepsilon^{(2)}$, $\text{Im}(\varepsilon^{(j)}) \geq 0$, $j = 1, 2$ a relativními permeabilitami $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Periodické rozhraní.

Incidentní monochromatická rovinná vlna s vlnovou délkou λ a vlnovým číslem $k_0 = 2\pi/\lambda$ dopadá z oblasti $\Omega^{(1)}$ pod úhlem dopadu θ měřeným od kladného směru osy x_3 . Prostorově závislé faktory $\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{E}|_{\Omega^{(j)}}$, $\mathbf{H}^{(j)} = \mathbf{H}|_{\Omega^{(j)}}$ vektorů intenzit elektromagnetického pole $\mathbf{E}(\mathbf{X})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{X})e^{-i\omega t}$ (kde $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$) s úhlovou frekvencí ω splňují v prostředích bez volných nábojů Maxwellovy rovnice a budeme je hledat jako řešení úlohy

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(j)} = ik_0\mu\mathbf{H}^{(j)}, \quad \nabla \times \mathbf{H}^{(j)} = -ik_0\varepsilon^{(j)}\mathbf{E}^{(j)} \quad \text{na } \Omega^{(j)}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) = \mathbf{o}, \quad \boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) = \mathbf{o} \quad \text{na } S, \quad (2)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} X \left(\frac{\partial \mathbf{E}^{(j)}}{\partial X} - ik^{(j)}\mathbf{E}^{(j)} \right) = \mathbf{o}, \quad \lim_{X \rightarrow \infty} X \left(\frac{\partial \mathbf{H}^{(j)}}{\partial X} - ik^{(j)}\mathbf{H}^{(j)} \right) = \mathbf{o}. \quad (3)$$

V rovnicích (1) je charakteristická impedance vakua $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ bez újmy na obecnosti zahrnuta do vektoru \mathbf{H} . Okrajové podmínky (2) na rozhraní S s jednotkovou normálou $\boldsymbol{\nu}$ směřující dovnitř oblasti $\Omega^{(1)}$ vyjadřují spojitost tečných složek vektorů pole, Sommerfeldovy radiační podmínky (3) (kde $X = |\mathbf{X}|$ a $k^{(j)} = k_0\sqrt{\mu\varepsilon^{(j)}}$) odpovídají skutečnosti, že vektory intenzit musí mít pro vzdálená pole omezené složky. Rovněž budeme předpokládat platnost Maxwellových divergenčních vztahů

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{(j)} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}^{(j)} = 0 \quad \text{na } \Omega^{(j)}. \quad (4)$$

Od Maxwellových rovnic pak lze obvyklým způsobem přejít k Helmholtzovým diferenciálním rovnicím pro jednotlivé vektory intenzit elektromagnetického pole.

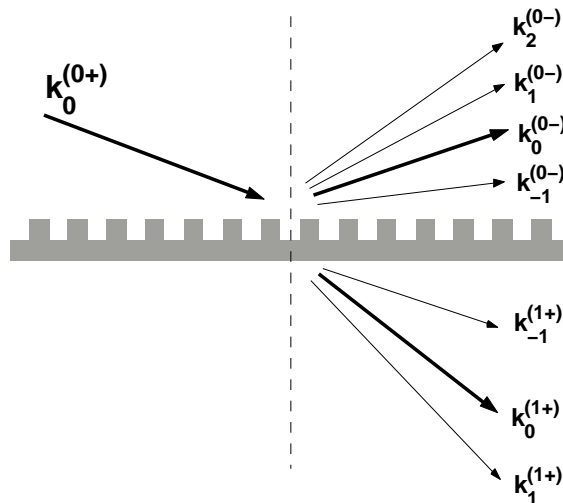
Z teorie optické difrakce je známo, že periodické rozhraní moduluje reflektovanou i transmittovanou vlnu v souladu se svou periodou (Floquetův teorém, [4]). V důsledku této skutečnosti je elektromagnetické pole v homogení oblasti s periodickou hranicí superpozicí spočetně mnoha dílčích polí – tzv. Rayleighových módů (vidů), jejichž řád označuje index n . Každý z nich je charakterizován vlnovým vektorem (viz Obrázek 2)

$$\mathbf{k}_n^{(j\pm)} = (\alpha_n, 0, \beta_n^{(j\pm)}), \quad (5)$$

kde

$$\alpha_0 = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \theta, \quad \alpha_n = \alpha_0 + \frac{2\pi n}{\Lambda}, \quad (\beta_n^{(j\pm)})^2 = (k^{(j)})^2 - \alpha_n^2. \quad (6)$$

Při stanovení dopředných a zpětných konstant šíření je nutno respektovat dříve uvedené před-



Obrázek 2: Difrakční módy vzdáleného pole.

poklady, tj. orientaci souřadného systému (viz obr. 1) a tvar materiálové funkce ($\text{Im}(\varepsilon) \geq 0$). Na tomto základě obdržíme pro dopřednou ($x_3 \rightarrow -\infty$, index (+)) konstantu šíření

$$\beta_n^{(j+)} = \begin{cases} -\sqrt{(k^{(j)})^2 - \alpha_n^2}, & k^{(j)} \in \mathbb{R}, \quad (k^{(j)})^2 - \alpha_n^2 > 0, \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - (k^{(j)})^2}, & k^{(j)} \in \mathbb{R}, \quad (k^{(j)})^2 - \alpha_n^2 < 0, \\ \sqrt{(k^{(j)})^2 - \alpha_n^2} \wedge \text{Im}(\beta_n^{(+)}) > 0, & \text{Im}(k^{(j)}) \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Je přitom uplatněn obvyklý předpoklad, že incidentní optický svazek dopadá z bezztrátového prostředí, tzn. $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Zpětné módy ($x_3 \rightarrow +\infty$, index (-)) mají konstanty šíření s opačným znaménkem. Zároveň je třeba zdůraznit, že při průchodu rozhraním se příčné konstanty α_n zachovávají v důsledku spojitosti tečných složek na hranici, zatímco podélné konstanty $\beta_n^{(j)}$ jsou materiálově závislé a mění se adekvátně relaci (6).

3 Klasická formulace

Jelikož uvažovaná prostředí i hladké rozhraní mezi nimi mají podle předpokladů konstantní vlastnosti podél osy x_2 , budou takové i hledané vektory intenzit elektromagnetického pole a celý problém můžeme formulovat jako 2D úlohu v rovině $x_2 = 0$.

Nejprve zavedeme fiktivní rozhraní

$$\Gamma_1 = \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, x_3 = b > \max f(x_1)\}, \quad (8)$$

$$\Gamma_2 = \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, x_3 = -b < \min f(x_1)\}, \quad (9)$$

která rozdělí rovinu $x_2 = 0$ na čtyři oblasti

$$\begin{aligned}\Omega_{ext}^{(1)} &= \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, x_3 > b\}, \\ \Omega_{int}^{(1)} &= \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, f(x_1) < x_3 < b\}, \\ \Omega_{int}^{(2)} &= \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, -b < x_3 < f(x_1)\}, \\ \Omega_{ext}^{(2)} &= \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, x_3 < -b\}.\end{aligned}\quad (10)$$

Označíme-li $\Omega = \Omega_{int}^{(1)} \cup S \cup \Omega_{int}^{(2)}$, pak pro relativní permitivitu platí

$$\varepsilon(x_1, x_3) = \begin{cases} \varepsilon^{(1)} = \text{konst.} & \text{na } \Omega_{ext}^{(1)}, \\ \varepsilon(x_1, x_3) & \text{na } \Omega, \\ \varepsilon^{(2)} = \text{konst.} & \text{na } \Omega_{ext}^{(2)}. \end{cases}\quad (11)$$

Naším cílem je určit vektory intenzit elektrického a magnetického pole v oblasti Ω , kde pro funkce $\mathbf{E}(x_1, x_3)$, $\mathbf{H}(x_1, x_3)$ můžeme od Maxwellových rovnic přejít obvyklým způsobem k Helmholtzovým rovnicím ($k = k_0\sqrt{\mu\varepsilon}$)

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{o}, \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{H} - k^2 \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \times (\nabla \times \mathbf{H}) + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{o}. \quad (13)$$

Prostřední člen ve druhé z rovnic je důsledkem materiálové nehomogenity v oblasti Ω . Tečné složky na nových hranicích musí být opět spojité, což vede k podmínkám

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{(j)}) &= \mathbf{o}, \\ \boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{(j)}) &= \mathbf{o},\end{aligned}\quad \text{na } \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

V souladu se zavedenou praxí je obvyklé řešit toto zadání pro dvě základní lineární polarizace svazku – příčně elektrickou (TE) a příčně magnetickou (TM). Pak jednotlivé vektory intenzit nabývají tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s &= (0, E_2, 0), & \mathbf{H}_s &= (H_1, 0, H_3) \quad \text{pro } s\text{-polarizaci (TE - vlny)}, \\ \mathbf{E}_p &= (E_1, 0, E_3), & \mathbf{H}_p &= (0, H_2, 0) \quad \text{pro } p\text{-polarizaci (TM - vlny)}.\end{aligned}\quad (15)$$

Označíme-li pro zjednodušení

$$u(x_1, x_3) = \begin{cases} E_2(x_1, x_3)e^{-i\alpha_0 x_1} & \text{pro } s\text{-polarizaci}, \\ H_2(x_1, x_3)e^{-i\alpha_0 x_1} & \text{pro } p\text{-polarizaci}, \end{cases}\quad (16)$$

bude na základě Maxwellových rovnic pro zbývající složky platit v prvním případě

$$H_1 = \frac{i}{k_0\mu} e^{i\alpha_0 x_1} \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad H_3 = -\frac{i}{k_0\mu} e^{i\alpha_0 x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\alpha_0 u \right), \quad (17)$$

ve druhém

$$E_1 = -\frac{i}{k_0\varepsilon} e^{i\alpha_0 x_1} \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{i}{k_0\varepsilon} e^{i\alpha_0 x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\alpha_0 u \right). \quad (18)$$

Bude-li dále $\nabla_\alpha = \nabla + (i\alpha_0, 0, 0)$, nabývají rovnice (12), (13) jednodušší skalární podobu

$$\nabla_\alpha^2 u + k^2 u = 0, \quad (\text{TE pole}) \quad (19)$$

$$\nabla_\alpha \cdot \left(\frac{1}{k^2} \nabla_\alpha u \right) + u = 0, \quad (\text{TM pole}) \quad (20)$$

s upravenými hraničními podmínkami (14)

$$u = u^{(j)}, \quad c^{(j)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \quad \text{na } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

kde $c^{(j)} = 1$ pro TE a $c^{(j)} = \varepsilon^{(j)}/\varepsilon$ pro TM polarizaci.

4 Periodická formulace

Relativní permitivita na oblasti Ω je Λ -periodická funkce v proměnné x_1 , tj.

$$\varepsilon(x_1, x_3) = \varepsilon(x_1 + n\Lambda, x_3) \quad \forall [x_1, x_3] \in \Omega, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Tato vlastnost současně s charakterem vlnového vektoru indukuje Λ -kvaziperiodicitu funkce u v proměnné x_1 s periodou Λ , což umožňuje vyjádření Fourierovou řadou. Ve vnějších prostředích $\Omega_{ext}^{(1)}$ a $\Omega_{ext}^{(2)}$, která jsou homogenní a izotropní, je výsledné pole tvořeno Rayleighovými módy:

$$u^{(j)}(x_1, x_3) = \sum_n u_n^{(j)} e^{i(\alpha_n x_1 + \beta_n^{(j)} x_3)}, \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Abychom mohli nahradit Sommerfeldovy radiační podmínky (3) korektními podmínkami na zavedených fiktivních hranicích Γ_1 a Γ_2 , musíme zvolit postup, který vhodně sváže nehomogenní pole v této oblasti s vnějšími Rayleighovými módy. Dle (23) získáme výrazy pro koeficienty rozvoje funkce $u(x_1, x_3)$ při prodloužení do oblastí $\Omega_{ext}^{(1)}$ a $\Omega_{ext}^{(2)}$. Protože uvnitř oblasti Ω nejsou odlišeny dopředné a zpětné módy, musíme v $\Omega_{ext}^{(1)}$, kde se současně s difraktovanou vlnou šíří (pouze na nultém difrakčním řádu) vlna dopadající, odečíst její zpětný mód. Výsledné vztahy proto mají následující podobu:

$$u_n(x_3) \Big|_{\Omega_{ext}^{(1)}} = \begin{cases} u_n(b) e^{-i\beta_n^{(1-)} x_3}, & n \neq 0 \\ u_0(b) e^{i\beta_0^{(1)}(x_3-b)} + e^{i\beta_0^{(1+)} x_3} - e^{-i\beta_0^{(1-)}(x_3-2b)}, & n = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$u_n(x_3) \Big|_{\Omega_{ext}^{(2)}} = u_n(-b) e^{-i\beta_n^{(2+)}(x_3+b)},$$

Odtud snadno odvodíme derivace vzhledem k jednotkové vnitřní normále $\boldsymbol{\nu}$ na fiktivních hranicích:

$$\frac{\partial u_n}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \Big|_{x_3=b} = \begin{cases} -i\beta_n^{(1-)} u_n(b), & n \neq 0 \\ -i\beta_0^{(1-)} u_0(b) + 2i\beta_0^{(1+)} e^{i\beta_0^{(1+)} b}, & n = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big|_{\Gamma_2} = -\frac{\partial u_n}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-b} = i\beta_n^{(2+)} u_n(-b).$$

Sumací odvozených členů obdržíme požadované hraniční podmínky pro periodizovanou úlohu:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{cases} 2i\beta_0^{(1+)} e^{i\beta_0^{(1+)}b} + \mathcal{T}_1(u) & \text{na } \Gamma_1, \\ \mathcal{T}_2(u) & \text{na } \Gamma_2, \end{cases} \quad (26)$$

kde

$$\mathcal{T}_1(u) = -i \sum_n \beta_n^{(1-)} u_n(b) e^{iknx_1}, \quad (27)$$

$$\mathcal{T}_2(u) = -i \sum_n \beta_n^{(2+)} u_n(-b) e^{iknx_1}. \quad (28)$$

Rovnice (19) s podmínkami (26) představuje nehomogenní Neumannovu okrajovou úlohu za předpokladu, že

$$(k^{(j)})^2 \neq \alpha_n^2. \quad (29)$$

Uvedený požadavek vylučuje rezonanční stavy a zajišťuje existenci řešení ve vnějších oblastech.

Lze ukázat, že úlohy (19), resp. (20) s okrajovými podmínkami (26) mají jednoznačné řešení $u(x_2, x_3)$, které má spojité parciální derivace druhého řádu uvnitř oblastí $\Omega_{int}^{(1)}$, $\Omega_{int}^{(2)}$ a spojité derivace prvního řádu na jejich hranicích neboli

$$u(x_1, x_3) \in \mathcal{C}^2(\Omega_{int}^{(1)} \cup \Omega_{int}^{(2)}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2). \quad (30)$$

5 Variační formulace

Vzhledem k předpokládané periodičnosti všech materiálových veličin i hledané funkce u budeme nadále jako oblast Ω uvažovat pouze jednu periodu původního pásu, tj.

$$\Omega = \{[x_1, x_3] \in \mathbb{R}^2, x_1 \in (0, \Lambda), x_3 \in (-b, b)\},$$

přičemž Γ_1, Γ_2 představují nadále jednu periodu původních hranic.

Ukážeme nyní postup při odvození variační formulace okrajové úlohy pro Helmholtzovy rovnice (19),(20). Lze dokázat, že Greenovu větu pro operátor $\text{div}(\psi \nabla u)$ lze formulovat i s operátorem ∇_α . Pak na omezené oblasti Ω a pro funkce $\psi, u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \nabla_\alpha \cdot (\psi \nabla_\alpha u) v^* d\Omega = - \int_\Omega \psi \nabla_\alpha u (\nabla_\alpha v)^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial u}{\partial \nu} v^* dS. \quad (31)$$

Uvažujme prostor $\mathbf{V} = \mathbf{H}_{per}^1(\Omega)$, tj. prostor tvořený funkcemi v , které jsou Λ -periodické v proměnné x_1 v pásu $-b < x_3 < b$ a $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Pak pro TE vlnu je vzhledem k (19) rovnice

$$\int_\Omega (\nabla_\alpha^2 u + k^2 u) v^* d\Omega = 0 \quad (32)$$

splněna pro libovolné $v \in \mathbf{V}$, přičemž $*$ označuje veličinu komplexně sdruženou. Aplikujeme-li na tuto rovnici formuli (31) pro $\psi \equiv 1$ na Ω , obdržíme následující výsledek:

$$- \int_\Omega \nabla_\alpha u (\nabla_\alpha v)^* d\Omega + \int_\Omega k^2 u v^* d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_1(u) \gamma_0 v^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathcal{T}_2(u) \gamma_0 v^* d\Gamma = 2i\beta_0^{(1)} e^{-i\beta_0^{(1)}b} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 v^* d\Gamma, \quad (33)$$

kde $\gamma_0 v \in H^{1/2}(\Omega)$ je Dirichletova stopa funkce $v \in H^1(\Omega)$ [5].

Analogický postup lze uplatnit i pro TM polarizaci v rovnici (20). Aplikace Greenovy formule (31) pro $\psi = 1/k^2(x_1, x_3)$ dává

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{1}{k^2} \nabla_{\alpha} u (\nabla_{\alpha} v)^* d\Omega + \int_{\Omega} uv^* d\Omega + \\ & + \frac{1}{(k^{(1)})^2} \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_1(u) \gamma_0 v^* d\Gamma + \frac{1}{(k^{(2)})^2} \int_{\Gamma_2} \mathcal{T}_2(u) \gamma_0 v^* d\Gamma = 2i\beta_0^{(1)} e^{-i\beta_0^{(1)}b} \frac{1}{(k^{(1)})^2} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 v^* d\Gamma. \end{aligned} \quad (34)$$

Pro standardním způsobem zavedené prostory stop $H^{1/2}(\Gamma_j)$ i odpovídající duální prostory $H^{-1/2}(\Gamma_j)$ [5] lze ukázat, že operátory $\mathcal{T}_j : H^{1/2}(\Gamma_j) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_j)$ dané vztahy (27) a (28) jsou spojité.

Označíme-li pro zjednodušení

$$\mathcal{B}_{TE}(u, v) = - \int_{\Omega} \nabla_{\alpha} u (\nabla_{\alpha} v)^* d\Omega + \int_{\Omega} k^2 uv^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_1(u) \gamma_0 v^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathcal{T}_2(u) \gamma_0 v^* d\Gamma, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{TM}(u, v) = & - \int_{\Omega} \frac{1}{k^2} \nabla_{\alpha} u (\nabla_{\alpha} v)^* d\Omega + \int_{\Omega} uv^* d\Omega + \frac{1}{(k^{(1)})^2} \int_{\Gamma_1} \mathcal{T}_1(u) \gamma_0 v^* d\Gamma + \\ & + \frac{1}{(k^{(2)})^2} \int_{\Gamma_2} \mathcal{T}_2(u) \gamma_0 v^* d\Gamma \end{aligned} \quad (36)$$

a

$$\mathcal{F}_{TE}(v) = 2i\beta_0^{(1)} e^{-i\beta_0^{(1)}b} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 v^* d\Gamma, \quad (37)$$

$$\mathcal{F}_{TM}(v) = 2i\beta_0^{(1)} e^{-i\beta_0^{(1)}b} \frac{1}{(k^{(1)})^2} \int_{\Gamma_1} \gamma_0 v^* d\Gamma, \quad (38)$$

můžeme zapsat variační formulace obou základních úloh v kompaktní formě

$$\begin{aligned} (\text{varTE}) \quad ? u \in \mathbf{V} : \quad \mathcal{B}_{TE}(u, v) &= \mathcal{F}_{TE}(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \\ (\text{varTM}) \quad ? u \in \mathbf{V} : \quad \mathcal{B}_{TM}(u, v) &= \mathcal{F}_{TM}(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (39)$$

Materiálové veličiny vystupující v bilineárních formách \mathcal{B}_{TE} , \mathcal{B}_{TM} splňují dříve deklarované požadavky

$$\text{Im } \varepsilon^{(j)} > 0, \quad \text{Im } k(x_1, x_3) \geq 0, \quad (40)$$

Poměrně silná tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení úloh (varTE) a (varTM) lze dokázat, lze-li předpokládat bezztrátové materiály. Ve stručném resumé uvádíme několik nej důležitějších, jejichž důkazy jsou podány například v [2].

- Jsou-li splněny předpoklady (40), pak pro libovolný, pevně zvolený maximální úhel dopadu $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ existuje frekvence $\omega_0 > 0$ taková, že úloha (varTE), resp. (varTM) má jednoznačné řešení $u \in \mathbf{V}$ pro všechny úhly dopadu $|\theta| < \theta_0$ a všechny frekvence $\omega \in (0, \omega_0)$.
- Jsou-li splněny předpoklady (40), rezonanční podmínka (29) a úloha (varTE), resp. (varTM), je jednoznačně řešitelná, pak toto řešení závisí spojitě na ω a θ .
- Je-li za platnosti předpokladů (40) navíc $\text{Im } k(x_1, x_3) > 0$ v nějaké vlastní podoblasti $\Omega_d \subset \Omega$, pak pro každou frekvenci $\omega > 0$ existuje nejvýše jedno řešení $u \in \mathbf{V}$ úlohy (varTE), resp. (varTM).

Závěr

Difrakční úloha na hladkém periodickém rozhraní mezi dvěma homogenními materiály byla pro dvě základní polarizace incidentního svazku formulována ve variační podobě na omezené oblasti. Takto formulované úlohy jsou dobrým teoretickým východiskem pro řešení metodou konečných prvků.

Reference

- [1] G. Bao, D. C. Dobson, J. A. Cox, Mathematical studies in rigorous grating theory, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 12, No. 5 (1995), 1029-1042.
- [2] J. Elschner, G. Schmidt, Diffraction in periodic structures and optimal design of binary gratings. Part I: Direct problems and gradient formulas. *Math. Meth. Appl. Sci.*, Vol. 21 (1998), 1297-1342.
- [3] J. Krček, Bie Model of Periodic Diffraction Problems in Optics. *Applications of Mathematics*, Vol. 67, No. 1, Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, 2022, 81-92
- [4] D. Maystre, Analytic Properties of Diffractive Gratings. In: *E. Popov, ed., Gratings: Theory and Numeric Applications*, Ch. 2. Institut Fresnel, CNRS, Marseille 2012.
- [5] O. Steinbach, *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*, Springer, New York, USA (2008), ISBN 978-0-387-31312-2.

Numerical Solution of the Navier-Stokes System with the Stick-Slip Boundary Conditions

Radek Kučera^{1,2}, Vladimír Arzt³, Jaroslav Haslinger^{1,2} and Václav Šátek^{2,4}

¹FME, VSB-TUO, 17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba, Czech Republic

²IT4Innovations, VSB-TUO, 17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba, Czech Republic

³FEECS, VSB-TUO, 17. listopadu 15, 708 00 Ostrava-Poruba, Czech Republic

⁴FIT, BUT, Božetěchova 1/2, 612 66 Brno, Czech Republic

Abstract. The steady Navier-Stokes system with the stick-slip boundary conditions is discretized by the mixed finite element method combined with the numerical approximation of the boundary integrals. The Oseen iterations linearize the convective term while the semi-smooth Newton method treats the non-smooth stick-slip boundary conditions. The inner linear systems are solved by the BiCGSTAB algorithm with preconditioning. Numerical experiments demonstrate the efficiency of the proposed method.

INTRODUCTION

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$ which is split into three nonempty, disjoint parts γ_D , γ_N , and γ_S open in $\partial\Omega$ such that $\partial\Omega = \bar{\gamma}_D \cup \bar{\gamma}_N \cup \bar{\gamma}_S$. On Ω we consider the flow of a viscous incompressible Newtonian fluid modelled by the steady Navier-Stokes equations with the Dirichlet and the Neumann boundary conditions on γ_D , and γ_N , respectively, and with the impermeability and the stick-slip boundary conditions on γ_S :

$$\left. \begin{aligned} -\eta\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D && \text{on } \gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_N && \text{on } \gamma_N, \\ u_n &= 0 && \text{on } \gamma_S, \\ u_t = 0 \Rightarrow |\sigma_t| &\leq g && \text{on } \gamma_S, \\ \sigma_t u_t + g|u_t| + \kappa u_t^2 &= 0 && \text{on } \gamma_S, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ is the velocity vector, $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is the pressure, $\eta > 0$ is the viscosity, $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ describes the forces acting on the fluid, $\mathbf{u}_D : \gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $\boldsymbol{\sigma}_N : \gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ are the Dirichlet and Neumann boundary data, respectively. Further, $\mathbf{n} := \mathbf{n}(\mathbf{x})$ and $\mathbf{t} := \mathbf{t}(\mathbf{x})$ are the unit outward normal and tangential vectors at $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. The normal and tangential components of the velocity \mathbf{u} and the stress $\boldsymbol{\sigma}$ are defined by $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$, $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, $\sigma_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}$, respectively, where $\boldsymbol{\sigma} = \eta\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n} - p\mathbf{n}$ is the stress on $\partial\Omega$. On γ_S we consider the slip bound $g : \gamma_S \rightarrow \mathbb{R}_+$ and the adhesive coefficient $\kappa : \gamma_S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Sufficient conditions guaranteeing the existence and uniqueness of a solution to this class of problems are established in [2, 7]. We will propose the numerical algorithm for solving (1) based on the mixed finite element approximation. We start from the four-field weak formulation of (1) that decouples the convective term and the stick-slip boundary conditions. The algorithm combines three loops: the Oseen iterations linearize the convective term, the semi-smooth Newton (SSN) method treats the stick-slip boundary conditions, and the BiCGSTAB algorithm solves the inner linear systems. We extend the SSN method proposed in [5, 4] for solving the Stokes problem. The implementation uses the vectorized codes [6, 1].

FOUR-FIELD OSEEN ITERATIONS

The velocity set and the forms are defined by

$$\begin{aligned} V_{u_D} &= \{v \in (H^1(\Omega))^2 : v = u_D \text{ on } \gamma_D\}, \\ a(\mathbf{w}, v) &= \eta \int_{\Omega} \nabla w_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla w_2 \cdot \nabla v_2 \, dx, \quad b(q, v) = - \int_{\Omega} q(\nabla \cdot v) \, dx, \\ c(\mathbf{z}; \mathbf{w}, v) &= \int_{\Omega} (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot v \, dx, \quad f(v) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot v \, dx + \int_{\gamma_N} \boldsymbol{\sigma}_N \cdot v \, ds, \\ j(v, \mathbf{w}) &= \int_{\gamma_S} g|v_t| + \kappa w_t v_t \, ds, \end{aligned}$$

respectively, where $v, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in (H^1(\Omega))^2$, $v = (v_1, v_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $q \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$, $\boldsymbol{\sigma}_N \in (L^2(\gamma_N))^2$, and $g, \kappa \in L^2_+(\gamma_S)$. We denote by $H^{1/2}(\gamma_S)$ the trace space of functions from $H^1(\Omega)$ on γ_S with the dual $H^{-1/2}(\gamma_S)$ and the duality pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Using the Green formula, we get the four-field weak formulation of (1). The Oseen iterations based on the four-field weak formulation read as follows:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Given } \mathbf{u}^0 \in V_{u_D}. \\ &\text{Find } (\mathbf{u}^k, p^k, \sigma_n^k, \sigma_t^k) \in V_{u_D} \times L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\gamma_S) \times H^{-1/2}(\gamma_S) \text{ for } k \geq 1 \text{ such that} \\ &a(\mathbf{u}^k, v) + c(\mathbf{u}^{k-1}; \mathbf{u}^k, v) + b(p^k, v) - \langle \sigma_n^k, v_n \rangle - \langle \sigma_t^k, v_t \rangle - f(v) = 0 \quad \forall v \in V_{u_D=0}, \\ &b(q, \mathbf{u}^k) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \\ &\langle \varphi, u_n^k \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\gamma_S), \\ &\langle \sigma_t^k, v_t - u_t^k \rangle + j(v, \mathbf{u}^k) - j(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) \geq 0 \quad \forall v \in V_{u_D}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Notice that the convective term (the form c) and the stick-slip boundary condition (the form j) are decoupled.

To approximate (2) we use the P1-bubble/P1 finite element pair [6, 1] on a triangulation \mathcal{T}_h of $\bar{\Omega}$. The form j and the duality pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ are represented by the integrals over γ_S , which are evaluated by quadrature formulas. Denote by n_p, n_s the number of nodes on $\bar{\Omega}, \bar{\gamma}_S \setminus \bar{\gamma}_D$, respectively, and $n_u = 2(n_p - n_d)$, where n_d is the number of nodes on $\bar{\gamma}_D$. We arrive at the following algebraic counterpart of (2):

$$\left. \begin{aligned} &\text{Given } \mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^{n_u}. \\ &\text{Find } (\mathbf{u}^k, \mathbf{p}^k, \mathbf{s}_n^k, \mathbf{s}_t^k) \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_s} \text{ for } k \geq 1 \text{ such that} \\ &\mathbf{A}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}^k + \mathbf{B}_u(\mathbf{u}^{k-1})^T \mathbf{p}^k + \mathbf{N}^T \mathbf{s}_n^k + \mathbf{T}^T \mathbf{s}_t^k - \mathbf{b}(\mathbf{u}^{k-1}) = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{B}_l(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}^k - \mathbf{E}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{p}^k - \mathbf{c}(\mathbf{u}^{k-1}) = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{N}\mathbf{u}^k = \mathbf{0}, \\ &-\mathbf{s}_t^T \mathbf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^k) + \mathbf{g}^T (|\mathbf{T}\mathbf{v}| - |\mathbf{T}\mathbf{u}^k|) + (\mathbf{u}^k)^T \mathbf{T}^T \mathbf{D}_\kappa \mathbf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^k) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_u}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where $\mathbf{A}^k := \mathbf{A}(\mathbf{u}^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ is the non-singular, non-symmetric convection-diffusion matrix, $\mathbf{B}_u^k := \mathbf{B}_u(\mathbf{u}^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n_p \times n_u}$, $\mathbf{B}_l^k := \mathbf{B}_l(\mathbf{u}^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n_p \times n_u}$ are the full row-rank gradient, divergence matrices, respectively, and $\mathbf{b}^k := \mathbf{b}(\mathbf{u}^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of nodal forces. Note that $\mathbf{B}_u^k, \mathbf{B}_l^k$, and \mathbf{b}^k depend on \mathbf{u}^{k-1} due to the bubble component elimination while the symmetric, positive semidefinite matrix $\mathbf{E}^k = \mathbf{E}(\mathbf{u}^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ and $\mathbf{c}^k = \mathbf{c}(\mathbf{u}^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n_p}$ are the artefacts of this elimination. The remaining data in the k -th step of (3) are independent of \mathbf{u}^{k-1} . The full row-rank matrices $\mathbf{N}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_u}$ are defined by the normal, tangential vectors $\mathbf{n}_i := \mathbf{n}(\mathbf{x}_i)$, $\mathbf{t}_i := \mathbf{t}(\mathbf{x}_i)$ at the nodes $\mathbf{x}_i \in \bar{\gamma}_S \setminus \bar{\gamma}_D$, $i \in \mathcal{N} := \{1, \dots, n_s\}$, and $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{n_s})^T \in \mathbb{R}^{n_s}$, $\mathbf{D}_\kappa = \text{diag}(\boldsymbol{\kappa}) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n_s})^T \in \mathbb{R}^{n_s}$ with $g_i = h_i g(\mathbf{x}_i)$, $\kappa_i = h_i \kappa(\mathbf{x}_i)$, where h_i is the length of segments defined by $\mathcal{T}_{h|\gamma_S}$ and sharing \mathbf{x}_i . The entries of $\mathbf{u}^k, \mathbf{p}^k$ and $\mathbf{s}_n^k, \mathbf{s}_t^k$ approximate the nodal values of \mathbf{u}^k, p^k and $-\sigma_n^k, -\sigma_t^k$ at the nodes of $\bar{\Omega} \setminus \bar{\gamma}_D$ and $\bar{\gamma}_S \setminus \bar{\gamma}_D$, respectively.

SEMI-SMOOTH NEWTON METHOD

We will show how to solve the systems in (3), in which we will omit the index k . Let $P_{[a,b]} : \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ be the projection of \mathbb{R} on the interval $[a, b]$, $a \leq b$ defined by the max-function:

$$P_{[a,b]}(x) = x - \max\{0, x - b\} + \max\{0, -x + a\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

It is easy to prove that the last inequality in (3) is equivalent to

$$s_{ti} = P_{[-g_i + \kappa_i(\mathbf{T}\mathbf{u})_i, g_i + \kappa_i(\mathbf{T}\mathbf{u})_i]}(s_{ti} + \rho_i(\mathbf{T}\mathbf{u})_i), \quad i \in \mathcal{N}, \quad (4)$$

where ρ_i are arbitrary positive constants. We distinguish two cases in (4):

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \kappa_i = 0, \rho_i = \rho > 0: \quad 0 = \rho(\mathbf{T}\mathbf{u})_i - \max\{0, s_{ti} + \rho(\mathbf{T}\mathbf{u})_i - g_i\} + \max\{0, -s_{ti} - \rho(\mathbf{T}\mathbf{u})_i - g_i\}, \\ \text{if } \kappa_i > 0, \rho_i = \kappa_i: \quad 0 = (\mathbf{T}\mathbf{u})_i - \max\{0, \kappa_i^{-1}(s_{ti} - g_i)\} + \max\{0, \kappa_i^{-1}(-s_{ti} - g_i)\}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Next, we divide \mathcal{N} into two subsets $\mathcal{N}_0 = \{i \in \mathcal{N} : \kappa_i = 0\}$, $\mathcal{N}_+ = \{i \in \mathcal{N} : \kappa_i > 0\}$ and introduce the sub-vectors $\mathbf{s}_{t\mathcal{N}_0}$, $\mathbf{s}_{t\mathcal{N}_+}$, $\mathbf{g}_{\mathcal{N}_0}$, $\mathbf{g}_{\mathcal{N}_+}$, $\boldsymbol{\kappa}_{\mathcal{N}_+}$ and the sub-matrices $\mathbf{T}_{\mathcal{N}_0}$, $\mathbf{T}_{\mathcal{N}_+}$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}_+} = \text{diag}(\boldsymbol{\kappa}_{\mathcal{N}_+})$. Problem (3) can be written as a system of non-smooth equations:

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}_u^\top \mathbf{p} + \mathbf{N}^\top \mathbf{s}_n + \mathbf{T}^\top \mathbf{s}_t - \mathbf{b} \\ \mathbf{B}_l \mathbf{u} - \mathbf{E} \mathbf{p} - \mathbf{c} \\ \mathbf{N} \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{T}_{\mathcal{N}_0} \mathbf{u} - \max\{\mathbf{0}, \mathbf{s}_{t\mathcal{N}_0} + \rho \mathbf{T}_{\mathcal{N}_0} \mathbf{u} - \mathbf{g}_{\mathcal{N}_0}\} + \max\{\mathbf{0}, -\mathbf{s}_{t\mathcal{N}_0} - \rho \mathbf{T}_{\mathcal{N}_0} \mathbf{u} - \mathbf{g}_{\mathcal{N}_0}\} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{N}_+} \mathbf{u} - \max\{\mathbf{0}, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}_+}^{-1}(\mathbf{s}_{t\mathcal{N}_+} - \mathbf{g}_{\mathcal{N}_+})\} + \max\{\mathbf{0}, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}_+}^{-1}(-\mathbf{s}_{t\mathcal{N}_+} - \mathbf{g}_{\mathcal{N}_+})\} \end{array} \right) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

where the max-function is understood component-wisely.

Let $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n_u + n_p + 2n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u + n_p + 2n_s}$ denote the function defined on the left of (6). Since \mathbf{G} is semi-smooth in the sense of [3], the SSN method can be used:

$$\mathbf{G}^o(\mathbf{y}^l) \mathbf{y}^{l+1} = \mathbf{G}^o(\mathbf{y}^l) \mathbf{y}^l - \mathbf{G}(\mathbf{y}^l), \quad l = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

where $\mathbf{G}^o(\mathbf{y})$ is the generalized Jacobian matrix to $\mathbf{G}(\mathbf{y})$ at \mathbf{y} and \mathbf{y}^0 is the initial iteration. This iterative process generates a sequence $\{\mathbf{y}^l\}$, for which we expect the (local) superlinear convergence rate. The efficient implementation of (7) uses the inactive and active sets at \mathbf{y}^l :

$$\mathcal{I}_0^+ = \{i \in \mathcal{N}_0 : s_{ti}^l + \rho(\mathbf{T}\mathbf{u}^l)_i - g_i \geq 0\}, \quad \mathcal{I}_0^- = \{i \in \mathcal{N}_0 : -s_{ti}^l - \rho(\mathbf{T}\mathbf{u}^l)_i - g_i \geq 0\}, \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{N}_0 \setminus (\mathcal{I}_0^+ \cup \mathcal{I}_0^-)$$

and

$$\mathcal{I}_+^+ = \{i \in \mathcal{N}_+ : s_{ti}^l - g_i \geq 0\}, \quad \mathcal{I}_+^- = \{i \in \mathcal{N}_+ : -s_{ti}^l - g_i \geq 0\}, \quad \mathcal{A}_+ = \mathcal{N}_+ \setminus (\mathcal{I}_+^+ \cup \mathcal{I}_+^-).$$

We will use the indicator matrices $\mathbf{D}(\mathcal{I}_+^+)$, $\mathbf{D}(\mathcal{I}_+^-)$, and $\mathbf{D}(\mathcal{I}_+^+ \cup \mathcal{I}_+^-)$. The indicator matrix of the index set \mathcal{S} being a subset of \mathcal{N}_+ is given by $\mathbf{D}(\mathcal{S}) = \text{diag}(s_1, \dots, s_{|\mathcal{S}|})$, where $s_i = 1$ for $i \in \mathcal{S}$, $s_i = 0$ if $i \notin \mathcal{S}$, and $|\mathcal{S}|$ denotes the cardinality of \mathcal{S} . It is easy to show that $\mathbf{s}_{\mathcal{I}_0^+}^{l+1} = \mathbf{g}_{\mathcal{I}_0^+}$, $\mathbf{s}_{\mathcal{I}_0^-}^{l+1} = -\mathbf{g}_{\mathcal{I}_0^-}$. The remaining components of the new iterate \mathbf{y}^{l+1} in (7) solve the linear system:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_u^\top & \mathbf{N}^\top & \mathbf{T}_{\mathcal{A}_0}^\top & \mathbf{T}_{\mathcal{N}_+}^\top \\ \mathbf{B}_l & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{A}_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{N}_+} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}_+}^{-1} \mathbf{D}(\mathcal{I}_+^+ \cup \mathcal{I}_+^-) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{l+1} \\ \mathbf{p}^{l+1} \\ \mathbf{s}_n^{l+1} \\ \mathbf{s}_{t\mathcal{A}_0}^{l+1} \\ \mathbf{s}_{t\mathcal{N}_+}^{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{T}_{\mathcal{I}_0^+}^\top \mathbf{g}_{\mathcal{I}_0^+} + \mathbf{T}_{\mathcal{I}_0^-}^\top \mathbf{g}_{\mathcal{I}_0^-}$ and $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}_+}^{-1}(\mathbf{D}(\mathcal{I}_+^-) - \mathbf{D}(\mathcal{I}_+^+)) \mathbf{g}_{\mathcal{N}_+}$. In order to reduce the size of linear systems, we prefer to solve instead of (8) the corresponding Schur complement system:

$$\mathbf{S} \mathbf{r}^{l+1} = \mathbf{C}_l \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{h} \quad (9)$$

with $\mathbf{S} = \mathbf{C}_l \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_u^\top + \mathbf{D}$ and

$$\mathbf{C}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_u \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{A}_0} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{N}_+} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_l \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{A}_0} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{N}_+} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{E}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}_+}^{-1} \mathbf{D}(\mathcal{I}_+^+ \cup \mathcal{I}_+^-)), \quad \mathbf{r}^{l+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{l+1} \\ \mathbf{s}_n^{l+1} \\ \mathbf{s}_{t\mathcal{A}_0}^{l+1} \\ \mathbf{s}_{t\mathcal{N}_+}^{l+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

For solving (9) we use the BiCGSTAB algorithm with the preconditioner $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{C}_l \text{diag}(\mathbf{A})^{-1} \mathbf{C}_u^\top + \mathbf{D})$ that approximates the diagonal of \mathbf{S} . Heuristic arguments based on the comparison with the Stokes problem say that this preconditioner avoids ill-conditioning, if h_i or $\kappa(\mathbf{x}_i)$ is small. Finally note that both inner loops (iterations of the SSN method and the BiCGSTAB algorithm) are terminated adaptively by the technique described in [4].

NUMERICAL EXPERIMENTS

We consider the L-shaped domain $\Omega = (0, 5) \times (0, 2) \setminus \overline{S}$, $S = (0, 1) \times (0, 1)$ with the partition of $\partial\Omega$ as follows: $\gamma_D = \gamma_{top} \cup \gamma_{left}$, $\gamma_N = \{5\} \times (0, 2)$, and $\gamma_S = \partial\Omega \setminus (\gamma_D \cup \gamma_N)$, where $\gamma_{top} = (0, 5) \times \{2\}$, $\gamma_{left} = \{0\} \times (1, 2)$. Further $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_D|_{\gamma_{top}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_D|_{\gamma_{left}} = ((x_2 - 2)(1 - x_2), 0)$, $\boldsymbol{\sigma}_N = \mathbf{0}$, and $\kappa = 10$. We report the number it of the Oseen iterations, the cumulative number it_{SSN} of the SSN iterations, and the total number n_S of the matrix-vector multiplications by the Schur complement \mathbf{S} . Note that n_S determines the computational complexity. The computational efficiency with/without preconditioning for different η and g is shown in Tables 1 and 2. One can see that smaller value of η requires higher computational costs and that the preconditioner plays an important role. We refer to [1] for other experiments.

TABLE 1. $\eta = 0.902$ and $g = 0.1$.

Preconditioner	without		with	
	$n_u/n_p/n_s$	$it/it_{SSN}/n_S$	time(s.)	$it/it_{SSN}/n_S$
288/174/29	3/23/975	0.17	3/17/295	0.08
340/206/31	3/28/1434	0.23	3/14/236	0.07
1,348/744/63	3/35/2,943	1.38	3/14/350	0.27
5,362/2,819/127	3/35/6,673	21.55	3/12/394	1.81
21,382/10,965/255	2/24/4,325	87.23	3/15/695	17.10

TABLE 2. $\eta = 0.00902$ and $g = 0.001$.

Preconditioner	without		with	
	$n_u/n_p/n_s$	$it/it_{SSN}/n_S$	time(s.)	$it/it_{SSN}/n_S$
288/174/29	6/65/3,862	0.52	6/102/789	0.17
340/206/31	6/50/3,741	0.62	6/107/856	0.19
1,348/744/63	5/90/8,458	3.82	7/110/1,140	0.80
5,362/2,819/127	5/68/23,668	76.44	8/97/1,372	5.95
21,382/10,965/255	5/321/28,4109	5712.67	8/93/1,794	45.21

REFERENCES

[1] V. Arzt, *Algorithms for flow problems with stick-slip boundary conditions in three space dimensions*, Diploma thesis, VSB-TUO (2021).

[2] J. K. Djoko, M. Mbehou, *Finite element analysis for Stokes and Navier-Stokes equations driven by threshold slip boundary conditions*, Int. J. Numer. Anal. Model., Series B, **4**, 235–255 (2013).

[3] M. Hintermüller, K. Ito, K. Kunisch, *The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method*, SIAM J. Optim., **13**, 865–888 (2003).

[4] R. Kučera, J. Haslinger, T. Sassi, V. Šátek, *Dual strategies for solving the Stokes problem with stick-slip boundary conditions in 3D*, in press: Math. Comput. Simulat., available online 31 December 2020.

[5] R. Kučera, K. Motyčková, J. Pacholek, T. Sassi, *The semi-smooth Newton method for solving the Stokes problem with the stick-slip boundary condition*, AIP Conference Proceedings, Volume 1978, 10 July 2018, Article number 360003.

[6] J. Koko, *Efficient MATLAB codes for the 2D/3D Stokes equation with the mini-element*, Informatica, **30**, 243–268 (2019).

[7] C. Le Roux, A. Tani, *Steady solutions of the Navier-Stokes equations with threshold slip boundary conditions*, Math. Meth. Appl. Sci., **30**, 595–624 (2007).

TEST CHAOSU 0-1 A JEHO APLIKACE V EKONOMICKÝCH MODELECH

LAMPARTOVÁ Alžběta

VŠB- Technická univerzita Ostrava, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie,
17.listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba
alzbeta.lampartova@vsb.cz

Abstrakt: Cílem přednášky je představit test chaosu 0-1, který umožňuje detekci chaotického a regulárního chování dynamických systémů. Jeho aplikace bude demonstrována na modelu heterogenního Cournotova oligopolu.

Klíčová slova: dynamický systém, test chaosu 0-1, bifurkace, oligopol, Cournotův model

Výsledky prezentované na přednášce byly publikovány ve článku: Lampart, M., Lampartová, A., Orlando, G.: On extensive dynamics of a Cournot heterogeneous model with optimal response. CHAOS 32(2), 2022.

VRSTEVNICKÉ HODNOCENÍ VE VYSOKOŠKOLSKÝCH MATEMATICKÝCH PŘEDMĚTECH

MÁSILKO Lukáš¹, REBENDA Josef²

¹Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, Poříčí 31, 603 00 Brno a
Středisko pro pomoc se specifickými nároky, Komenského nám. 2, 602 00 Brno

²Vysoké učení technické, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky,
Technická 2848/8, 616 00 Brno a Středoevropský technologický institut, Purkyňova 656/123,
612 00 Brno

masilko@teiesias.muni.cz, rebenda@vutbr.cz

Abstrakt: V tomto příspěvku jsou popsány zkušenosti se zaváděním (vzájemného) vrstevnického hodnocení v matematických předmětech nabízených na dvou brněnských vysokých školách, Masarykově univerzitě a Vysokém učení technickém. Jedná se tedy o dva případy, které demonstrují použití v různých kontextech. V předmětech Pedagogické fakulty MU studenti hodnotí písemné řešení příkladů vypracované jejich spolužáky, zatímco v kurzu Fakulty elektrotechniky a komunikačních technologií VUT poskytují studenti zpětnou vazbu ke krátkým video prezentacím připravených spolužáky na zadané téma. Motivací vyučujících k zavedení této metody formativního hodnocení byla snaha donutit studenty k průběžné přípravě. Při návrhu a implementaci bylo využito funkcionality e-learningových systémů, s nimiž studenti obou univerzit běžně pracují. Díky zpětné vazbě účastníků vrstevnického hodnocení z let 2021 až 2023 pak byly provedeny některé dílčí změny v nastavení obou aktivit. V závěru příspěvku autoři diskutují výhody a nevýhody prezentovaných forem vrstevnického hodnocení, využitelnost tohoto konceptu ve vysokoškolských matematických předmětech a faktory, které mají vliv na formy a cíle, s nimiž učitelé tento typ zpětné vazby mohou chtít využít ve své výuce.

Klíčová slova: vrstevnické hodnocení, matematika, e-learning

1 Úvod

V kontextu vzdělávání rozumíme “zpětnou vazbou” informace týkající se různých aspektů studijního výkonu nebo pochopení studovaného tématu poskytnuté “agentem”, což může být například vyučující, spolužák, učebnice, rodič nebo vlastní zkušenost.

Obecně, zpětná vazba je z psychologického hlediska uklidňující, a lidé rádi dostávají zpětnou vazbu na svůj výkon, i kdyby to na něj nemělo žádný vliv. Proto je důležité nezaměňovat potřebu zpětné vazby s otázkou, zda zpětná vazba má vliv na výkon nebo ne [1, s. 95].

Jak pozitivní, tak negativní zpětná vazba mohou mít pozitivní efekt na proces učení. Výsledný efekt konkrétní zpětné vazby závisí na tom, na kterou součást vzdělávacího procesu je ta zpětná vazba zaměřena. Lepší je hodnocení “ad rem” (důraz na obsah) než “ad hominem” (důraz na hodnotící osobu) [5, s. 31].

Většina hodnocení ve vzdělávání dodnes obsahuje minimum zpětné vazby, často proto, že je hodnocení používáno jako měřítko externí odpovědnosti, tj. úrovně plnění požadavků daných zvenku, spíše než nástroj zpětné vazby, který je součástí interního vzdělávacího procesu. Pro pokrok ve vzdělávacím procesu je důležitá zpětná vazba a interpretace hodnocení, ne body a známky.

Studenti často vnímají zpětnou vazbu jako zodpovědnost někoho jiného, obvykle učitelů, jejichž náplní práce je poskytovat jim informace o tom, jak dobře si vedou, jaké jsou jejich cíle a jak mají pokračovat dál. To není překvapující, uvědomíme-li si, že při průchodu vzdělávacím systémem se žáci a studenti setkávají většinou s tzv. heteronomním hodnocením, tj. hodnocením poskytovaným učiteli. Přitom se sami studenti mohou stát poskytovateli zpětné vazby, a to prostřednictvím tzv. autonomního hodnocení. Autonomní hodnocení zahrnuje jak hodnocení ze strany vrstevníků, tak sebehodnocení [5, s. 26-27].

Autonomní i heteronomní hodnocení mají ve vzdělávacím procesu svůj význam. Heteronomní hodnocení je nutné pro to, aby učitel mohl do hodnocení přinést svoji znalost obsahu, ale smysl a cíl hodnocení je v tom, aby se žák sám naučil hodnotit. Pokud tento cíl přijmeme, pak heteronomní hodnocení nejde oddělit od autonomního hodnocení, protože formativní hodnocení je nutná spojnice mezi žákovskou “nepoučenou” autonomií a “znalou” heteronomií učitelského hodnocení [5, s. 27]. Aby si žáci odnesli z hodnocení spolužáků potřebnou zpětnou vazbu, je vhodné nastavit pravidla týkající se vrstevnického hodnocení, mezi něž patří ohleduplnost, slušnost, uznání spolužáka a konstruktivní zpětná vazba [5, s. 27].

1.1 Motivace

Na počátku našich úvah o zavedení vzájemného hodnocení byla snaha donutit studenty k průběžné přípravě. Učební osnovy matematických předmětů jsou čím dál tím nabitější a ve výuce nezbývá tolik času na poctivé procvičení získaných matematických znalostí a dovedností. Nabízela se myšlenka zavést domácí úkoly či jinou formu průběžné práce, a motivovat tak studenty k pravidelnému studiu během výukového období, aby pro ně závěrečné testování znalostí nebylo tak “bolestné”. Ovšem při vyšším počtu studentů na jednoho učitele (50 a více) může být hodnocení průběžné práce studentů pro vyučující vyčerpávající. Proto se začaly objevovat úvahy o možnostech, jak do procesu hodnocení a poskytování zpětné vazby zapojit studenty.

Myšlenku jsme začali realizovat na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně (FEKT VUT). Bylo rozhodnuto, že úkolem studentů bude natočit krátké video na zadané téma a poté podle zadaných kritérií ohodnotit několik videí jiných studentů. Záměrem bylo dát studentům příležitost se kromě studia matematiky zdokonalit i v dalších dovednostech, o nichž jsme předpokládali, že je budou potřebovat. Jednak jsme chtěli studenty motivovat, aby se nebáli o matematice hovořit a učili se “matematicky” vyjadřovat. Dále jsme předpokládali, že pokud mají studenti natočit video, kde bude slyšet, co říkají, tak se budou snažit, aby to, co říkají, dávalo smysl. Tím pádem se budou snažit tématu porozumět a důkladně se připraví. To se často neděje v případě “písemné přípravy”, kdy studenti pouze okopírují materiál z internetu a ani neuvědomí zdroj. Poskytování zpětné vazby na videa jiných studentů jim dává příležitost lépe porozumět tématům v prezentacích, které mají hodnotit. Také jim to dává možnost zamyslet se nad tím, jak vylepšit vlastní videa na základě obdržené zpětné vazby, nebo díky inspiraci z video prezentací, které měli hodnotit.

V předmětech vyučovaných na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity (PdF MU) nejdříve učitelé zavedli tzv. cvičné odpovědníky, tj. volitelnou aktivitu sloužící pro průběžné procvičování.

Jde o testy (kvízy) na určité téma, které si studenti mohou kdykoliv spustit a z předem připravených sad příkladů si náhodně vygenerovat zadání několika matematických početních problémů. Po jejich vyřešení zadávají výsledek do editačního pole, nebo jej vybírají z nabízených variant. Po ukončení kvízu se studenti dozví, zda je výsledek jejich počítání správně či ne. Nedostávají však zpětnou vazbu co se týče postupu řešení či upozornění na případné chybné kroky nebo úvahy, které mohou být příčinou nesprávného výsledku. Byla tedy doplněna další, tentokrát povinná aktivita, a to domácí úkoly, jejichž řešení je následně vyhodnoceno učiteli. Studenti si zpětnou vazbu od vyučujících pochvalovali, vzhledem k jejich počtu a četnosti domácích úkolů však učitele stálo opravování velké množství času a energie během celého výukového období. Postupně proto vyučující obou kurzů dospěli k rozhodnutí přenést část odpovědnosti za hodnocení na studenty samotné a začali připravovat systém vrstevnického hodnocení. Jelikož předměty na Pedagogické fakultě navštěvují budoucí učitelé matematiky na 2. stupni základní školy, bylo součástí rozhodnutí i vědomí další přidané hodnoty spočívající v tom, že si studenti sami vyzkouší, jaké to je připravit hodnocení práce někoho jiného. Poprvé se tak stanou učiteli a zjišťují, jak obtížné a časově náročné je poskytovat kvalitní a zároveň citlivou a motivující zpětnou vazbu.

2 Implementace

2.1 Vzájemné hodnocení video prezentací na FEKT VUT

Vzájemné hodnocení studentů prakticky zkusíme od podzimního semestru 2021. Pilotním kurzem byl předmět BPC-MAS Matematický seminář vyučovaný na FEKT VUT, který v té době prošel zásadní rekonstrukcí, jejímž motivem byla snaha reagovat na restriktce způsobené pandemií Covid-19. Předmět si zapisují studenti nastupující do bakalářského studia, počet studentů v kurzu bývá na začátku semestru kolem 400. Pro prezenční výuku jsou rozděleni do seminárních skupin po 70-80 studentech. Výuka se zaměřuje na opakování středoškolské matematiky a cílem předmětu je srovnat vstupní matematické znalosti všech studentů tak, aby je mohli v následujících semestrech aktivně používat při studiu dalších matematických a odborných kurzů. Kromě docházky na semináře je hlavní povinností studentů

1. úspěšné absolvování průběžných kvízů, které se zaměřují na procvičování třinácti témat;
2. vypracování příprav na zadané téma v multimediální formě (video prezentace s audio popisem či s titulky) [6].

Na přípravu video prezentace o délce max. 5 minut navazuje vzájemné hodnocení studentů, přičemž každý student má k hodnocení přiděleny práce tří jiných náhodně vybraných studentů z jiných seminárních skupin. Studenti vkládají zpětnou vazbu týkající se hlediska rozsahu (práce kompletně zpracovává zadané téma), formální a obsahové přesnosti (matematické pojmy jsou správně využívány, postup vysvětlení je logický a bez chyb) a srozumitelnosti (výklad je jasný, přehledný a názorný). Studenti práci hodnotí kvantitativně (každé ze tří výše uvedených kritérií na škále od 0 do 10), mohou však přidat i slovní komentář vysvětlující jednotlivé známky. Odevzdávání příprav a jejich hodnocení probíhá v e-learningové platformě Moodle v rámci aktivity typu "workshop". Po uzavření každého workshopu jsou pak všechna odevzdaná videa včetně hodnocení zpřístupněna všem studentům v kurzu.

V roce 2021 měli studenti odevzdat 4 přípravy ve formě videa. V roce 2022 měli odevzdat 2 přípravy, kvůli nejasnostem ohledně pokynů pro odevzdání však někteří studenti odevzdávali videa, jiné prezentace, skeny nebo fotografie. Počet témat pro konkrétní přípravu vždy odpovídal nejvyššímu počtu studentů ve skupině (70 v roce 2021 resp. 75 v roce 2022), aby žádní dva studenti ve stejné seminární skupině neměli stejné téma.

Následující odstavec obsahuje ukázkou zadání přípravy z podzimního semestru 2021 (workshop č. 3, téma č. 49):

49. Připravte video, které věnujete případům, kdy limita funkce v nějakém bodě neexistuje. Součástí videa bude:

- vysvětlení, co se myslí limitou funkce zleva, respektive zprava v nějakém bodě
- ukázka funkce a vybraného bodu, pro který se limita zprava liší od limity zleva
- ukázka funkce a vybraného bodu, pro který existuje jedna jednostranná limita, ale druhá ne
- stanovení podmínky pro existenci oboustranné limity v závislosti na jednostranných limitách

Studenti měli na přípravu videa 3 týdny (2021), respektive 6 týdnů (2022), a následně jeden týden na hodnocení přidělených videí. Pro představu, jak je celý proces realizován, přikládáme ukázkou agendy aktivity typu workshop v systému Moodle z pohledu učitele (Obrázek 1).

Příprava na seminář č.2 (7.11.2022 - 18.12.2022)

Uzavřeno

Nastavení <small>Přepnout do fáze nastavení</small>	Odevzdávání <small>Přepnout do fáze odevzdávání</small>	Hodnocení <small>Přepnout do fáze hodnocení</small>	Evaluace <small>Přepnout do fáze evaluace</small>	Uzavřeno <small>Aktuální fáze</small>
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Nastavit popis workshopu ✓ Poskytnout pokyny k vypracování ✓ Upravit hodnotící formulář 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Poskytnout pokyny k hodnocení ✗ Přidělit práce k hodnocení očekáváno: 350 odevzdáno: 259 zbývá přidělit: 1 i Nejméně jeden uživatel dosud neodevzdal svou práci i Začátek odevzdávání: Pondělí, 7. listopadu 2022, 00.00 (před 166 dny) i Konec odevzdávání: Neděle, 11. prosince 2022, 23.59 (před 131 dny) i Pozdní odevzdání je povoleno i Časová omezení se na vás nevztahují 	<ul style="list-style-type: none"> i Hodnocení možné od: Pondělí, 12. prosince 2022, 00.00 (před 131 dny) i Lhůta pro hodnocení: Čtvrtek, 22. prosince 2022, 23.59 (před 120 dny) i Časová omezení se na vás nevztahují 	<ul style="list-style-type: none"> ✗ Vypočítat známky za odevzdané práce očekáváno: 350 vypočítáno: 258 ✗ Vypočítat známky za hodnocení očekáváno: 350 vypočítáno: 243 ✓ Poskytnout závěrečné shrnutí 	

Závěr ▾

Děkujeme za odevzdání Vaší práce do workshopu a za ohodnocení prací několika Vašich kolegů. Nyní máte možnost prohlédnout si práce všech studentů v kurzu, včetně hodnocení prací. Můžete je využít k lepšímu pochopení některého tématu, nebo jako inspiraci pro Vaši práci/hodnocení v některém z dalších workshopů.

Obrázek 1: Agenda aktivity typu workshop z pohledu učitele v e-learningovém systému Moodle

2.2 Vzájemné hodnocení domácích úkolů na PdF MU

Na jaře 2022 bylo vrstevnické hodnocení zavedeno i v dalším předmětu vyučovaném tentokrát na PdF MU. Jedná se o kurz MA0004 Matematická analýza 1, který pravidelně navštěvuje 70-80 studentů bakalářského studijního programu zaměřeného na přípravu učitelů matematiky 2. stupně základních škol. Osnova předmětu sestává z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné (dvě třetiny semestru) a dvou proměnných (závěrečná třetina výuky). Kurz je nabízen studentům 2. semestru a realizován formou dvouhodinové přednášky a dvouhodinového semináře jednou týdně, přičemž v seminárních skupinách bývá 25-30 lidí. Docházka na seminář je povinná, studenti v závěru výukového období absolvují závěrečný písemný test, v němž prokáží praktické dovednosti. Po úspěšném absolvování písemky se mohou přihlásit k ústní zkoušce prověřující i jejich teoretické znalosti [2].

Počínaje jarním semestrem 2022 byly zavedeny tři průběžné domácí úkoly, které se staly povinnou součástí předmětu, jejíž nesplnění znamená neudělení zápočtu. Jako zdroj zadání byly použity již připravené sady matematických problémů určených pro generování cvičných odpovědníků. Ukázku zadání domácího úkolu 2 je možné nalézt na Obrázku 2.

Odpovědník si můžete spustit opakovaně, ale vždy se Vám zobrazí stejné zadání, které je náhodně generováno z předem připravené sady. Po otevření odpovědníku se Vám zobrazí zadání, které si zkopírujete či opište. Součástí jsou též instrukce k odevzdání řešení.

Řiďte se pokyny uvedenými v interaktivní osnově, na stránce Týden 7 - Domácí úkol 2.

Řešení úkolu vložte jako jeden PDF soubor do odevzdávacího s názvem **Domácí úkol 2**. Termín nejpozdějšího odevzdání: **neděle 9. dubna 2023 23:59**.

Přejeme vám hezkou zábavu při této matematicko-detektivní práci :)



Varování: Znění testových otázek je autorským dílem. Šíření otázek bez písemného souhlasu autora je porušením autorských práv a jako takové může být postihováno dle platných zákonů.

1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3}$$

a sestrojte její graf, na němž vyznačte veškeré význačné body (průsečíky s osou x , lokální extrémy, inflexní body) i přímky (asymptoty bez směrnice i se směrnici), pokud existují.

Graf nakreslete rukou na papír (případně dotykovým perem na tabletu). Jinou barvou zvýrazněte křivku funkce, jinou barvou význačné body a jinou barvou asymptoty.

Vaše výpočty přehledně strukturujte a postupujte chronologicky, tj. od určení definičního oboru až po asymptoty. V případě bodů nás zajímají obě souřadnice, u inflexních bodů $[x_0, y_0]$ spočítejte také první derivaci $f'(x_0, y_0)$.

Obrázek 2: Ukázka zadání domácího úkolu 2 v předmětu MA0004 Matematická analýza 1

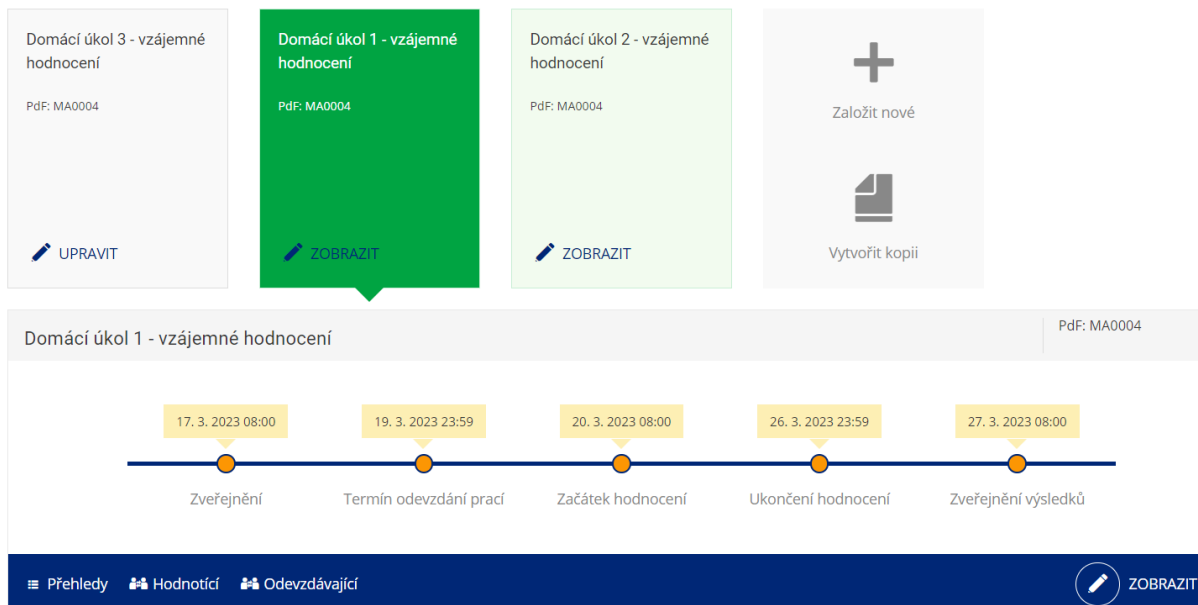
Studenti během výukového období postupně připravují řešení, aby následně prováděli vzájemné hodnocení tří prací jiných náhodně vybraných spolužáků. Každý student má jedinečné zadání, čímž učitelé kurzu chtějí zamezit situacím, kdy jeden student řešení připraví a ostatní jej pouze převezmou a odevzdají. Řešení svých kolegů hodnotí studenti anonymně, na základě tří kritérií. Vyjadřují se k

1. správnosti a korektnosti řešení,
2. obsahové přesnosti a úplnosti, případně chybám ve výpočtech, a
3. přehlednosti, názornosti a úpravě řešení.

Zpětná vazba zadávají studenti kvantitativně (každé ze tří výše uvedených kritérií na škále od 0 do 10) i slovním komentářem. E-learningovou platformou, na níž výše zmiňované aktivity probíhají, se stal Informační systém Masarykovy univerzity. Ukázka agendy Vzájemné hodnocení z pohledu učitele je přiložena níže, na Obrázku 3. Je nutno podotknout, že první termín “Zveřejnění” se týká data, kdy budou studenti informováni o spuštění vzájemného hodnocení, nikoliv termínu, od kterého jim bude k dispozici zadání úkolu (ten byl stanoven na 9. 3. 2023).

V podzimním semestru 2022 byla podobná koncepce tří domácích úkolů a jejich vzájemného hodnocení zavedena i v dalším předmětu MA0005 Algebra 2 tematicky zaměřeném na lineární algebru a nabízeném studentům 3. semestru bakalářského studijního programu zaměřeného na budoucí přípravu učitelů matematiky 2. stupně základních škol [3].

Vzájemná hodnocení vybraných předmětů



Obrázek 3: Agenda Vzájemné hodnocení z pohledu učitele v Informačním systému MU

2.3 Kritéria vzájemného hodnocení a jejich vývoj

V semestru podzim 2021, kdy bylo vrstevnické hodnocení poprvé vyzkoušeno v předmětu BPC-MAS Matematický seminář na FEKT VUT, byla zpětná vazba na video prezentace požadována kvantitativně (na škále od 0 do 10) s volitelným slovním komentářem vysvětlujícím zadanou známku. Hodnotitelé vyplňovali jednoduchý formulář, kde každé ze tří kritérií bylo popsáno tímto způsobem:

- Rozsah:** Příprava pokrývá kompletně dané téma a je smysluplně strukturovaná; délka přípravy odpovídá zadání.
- Formální a obsahová přesnost:** v přípravě jsou správně používány matematické pojmy; postup vysvětlení je logický a bez chyb.
- Srozumitelnost:** výklad je jasný a pochopitelný; obrazová část přípravy je srozumitelná a přehledná; výklad je přiměřeně názorný; příprava je užitečná pro pochopení tématu.

V případě předmětů vyučovaných na PdF MU byla taktéž zvolena tři kritéria a tentýž způsob zpětné vazby pomocí škály 0 až 10 a slovního komentáře k bodovému hodnocení. Na základě zkušeností s hodnocením příprav studenty FEKT byla však jednotlivá hlediska podrobněji vysvětlena a byla přidána motivace k poctivému vyplnění slovního komentáře. Nabízeny jsou formulace k jednotlivým kritériím, a to pro škálové hodnocení i slovní komentář:

- Správnost a korektnost řešení:** hodnotíte, zda je postup řešení zadaných příkladů zvolen korektně, zapsán logicky správně (jednotlivé části výpočtu na sebe navazují) a jsou splněny formální požadavky na zápis matematických rovnic a výrazů (uvedení limit a specifikace limitního bodu všude tam, kde to má být, správně vyznačené úpravy atd.); pro všechny příklady dohromady vyberte hodnocení na číselné škále (0 ... zcela nesprávný a nekorektní postup, 10 ... zcela správný a korektní postup).
- Správnost a korektnost řešení (komentář hodnotitele):** zde uveďte komentář/vysvětlení číselného hodnocení co se týče správnosti a korektnosti řešení zadaných příkladů; pomůže to Vašemu kolegovi/kolegyni k tomu, aby si lépe uvědomil/a, v čem se dopouští chyb; může se

jich v budoucnu vyvarovat, například během řešení závěrečné zápočtové písemky, a nepřijít tak zbytečně o body.

3. **Obsahová přesnost a úplnost, chyby ve výpočtech:** hodnotíte, zda je řešení příkladů úplné (všechny úkoly či otázky jsou provedeny/zodpovězeny), zda jsou či nejsou ve výpočtech chyby, zda jsou výsledky a mezivýsledky správně interpretovány a zapsány a zda je finální řešení uvedeno a je správně; pro všechny příklady dohromady vyberte hodnocení na číselné škále (0 ... velké množství chyb, řešení není úplné, 10 ... ve výpočtech nejsou chyby a řešení je úplné a správně).
4. **Obsahová přesnost a úplnost, chyby ve výpočtech (komentář hodnotitele):** zde uveďte komentář/vysvětlení číselného hodnocení co se týče obsahové přesnosti, úplnosti a chybovosti řešení zadaných příkladů; pomůže to Vašemu kolegovi/kolegyni k tomu, aby si uvědomil/a, kde udělal chyby, na co opomněl odpovědět a proč nesprávně interpretoval výsledky; může se jich v budoucnu vyvarovat, například během řešení závěrečné zápočtové písemky, a nepřijít tak zbytečně o body.
5. **Přehlednost, názornost a úprava řešení:** hodnotíte, zda je řešení příkladů srozumitelně zapsáno a vhodně strukturováno (lze se v něm dobře orientovat), je doplněno krátkými vysvětlujícími komentáři či názornými obrázky/grafy; pro všechny příklady dohromady vyberte hodnocení na číselné škále (0 ... v řešení se nelze orientovat, 10 ... řešení je přehledně zapsáno a jednotlivé kroky jsou mi naprosto srozumitelné).
6. **Přehlednost, názornost a úprava řešení (komentář hodnotitele):** zde uveďte komentář/vysvětlení číselného hodnocení co se týče přehlednosti, názornosti a úpravy řešení zadaných příkladů; pomůže to Vašemu kolegovi/kolegyni k tomu, aby si uvědomil/a, jak docílit čitelnosti a srozumitelnosti zápisu řešení, aby jeho práci byl schopen ocenit a využít i někdo jiný než on sám; může mu to v budoucnu pomoci, například během řešení závěrečné zápočtové písemky, aby zbytečně nepřišel o body, protože se opravující neorientuje v jeho výpočtech a celkovém řešení.

3 Hodnocení aktivit vrstevnického hodnocení studenty

Vzhledem k tomu, že vzájemné hodnocení bylo ve všech třech předmětech zavedeno teprve nedávno a více času věnovali garanti a učitelé kurzů spíše otázkám návrhu a implementace této myšlenky, na seriózní přípravu vyhodnocení této studijní aktivity nezbylo mnoho času. Na PdF MU byla v jarním semestru 2022 studentům položena pouze jedna otevřená a velmi obecná otázka, která se objevila v zadání závěrečného písemného testu z předmětu MA0004 Matematická analýza. V případě FEKT VUT a předmětu BPC-MAS Matematický seminář vyplňovali studenti na konci semestrů podzim 2021 a 2022 dotazník zahrnující čtyři otázky relevantní pro tento příspěvek, z nichž dvě byly uzavřené.

3.1 Slovní komentáře studentů PdF MU

Otázka položená studentům, kteří absolvovali řádný termín závěrečného testu z Matematické analýzy 1 v semestru jaro 2022, zněla: *Jak hodnotíte domácí úkoly a vzájemné hodnocení? (Smysluplné pozitivní/negativní hodnocení či náměty ke změně budou oceněny bodem navíc.)*. Odpovědělo celkem 62 studentů (26 mužů, 36 žen). Ze získané zpětné vazby bylo identifikováno celkem 14 různých typů podnětů, přičemž u většiny z nich bylo možné rozpoznat pozitivní/negativní charakter hodnocení. K analýze slovních komentářů byl zvolen systém podobný otevřenému kódování, který byl použit v práci [4].

Nejčastěji se studenti vyjadřovali k aktivitě obecně (33 kladných hodnocení), přičemž přibližně stejný počet (28 kladných vs. 2 negativní hodnocení) vyzdvihoval možnost procvičit si díky domácím

úkolům a jejich hodnocení probíranou látku a připravit se tak s předstihem na závěrečný test. Studenti také upozorňovali na fakt, že kromě řešení vlastního úkolu si museli spočítat i příklady, kterými se zabývali tři jejich kolegové, aby jim mohli potvrdit správnost výsledků. Někteří ocenili, že si jako budoucí učitelé mohli poprvé vyzkoušet hodnotit práci někoho jiného nebo že mohli kvalitu svého řešení porovnat s ostatními. Tři upozornili na příliš mnoho bodových škál pro každé ze tří kritérií a každý z řešených příkladů, což je zaměstnávalo na úkor slovního hodnocení. S tím zřejmě souvisí i časová náročnost vzájemného hodnocení, což pět studentů explicitně uvedlo. Asi největší problém studenti viděli v neúplném hodnocení své práce od spolužáků (celkem 11 negativních komentářů kritizujících především absenci slovních komentářů). Určitý rozpor lze rozpoznat i co se týče kvality hodnocení, když se 12 studentů vyjádřilo k práci svých kolegů negativně, 5 naopak pozitivně. Nejčastějším argumentem podporujícím negativní zkušenost byla nejednoznačnost zpětné vazby, kdy správnost studentova řešení jeden hodnotitel potvrdil, druhý naopak vyvrátil a třetí se nevyjádřil vůbec. Z dalších podnětů, které studenti poskytli, zmiňme ještě požadavek, aby řešitelé úkolů zapsali kromě řešení i zadání příkladů a aby učitelé po termínu odevzdání domácího úkolu zveřejnili vzorové řešení příkladů, nebo alespoň výsledky, kvůli snadnějšímu poskytnutí zpětné vazby od hodnotitelů či naopak jejímu porozumění autory řešení.

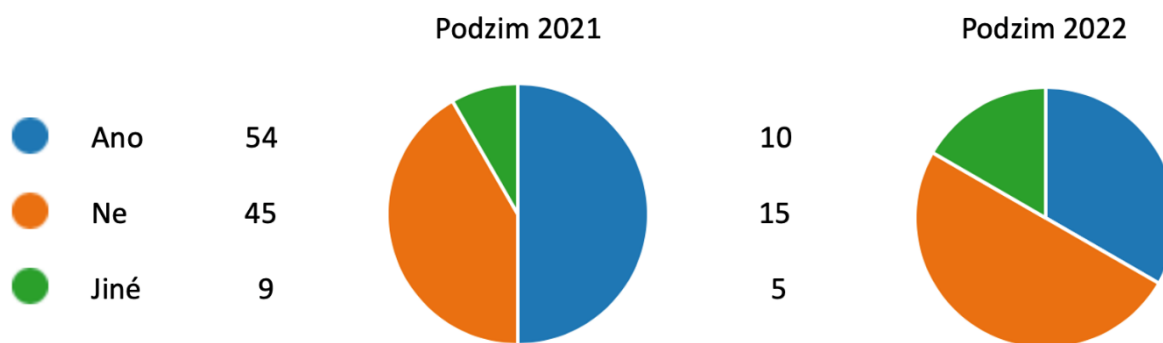
V aktuálním semestru jaro 2023 bylo nastavení vzájemného hodnocení upraveno dle podnětů získaných ze zpětné vazby. V instrukcích k řešení úkolů byli studenti požádáni, aby vždy zapsali i zadání problémů. Po ukončení termínu pro odevzdání domácího úkolu bylo vždy zveřejněno vzorové řešení vybrané sady příkladů, aby se hodnotitelé při poskytování zpětné vazby mohli nechat inspirovat. Zjednodušen byl též systém hodnocení, když bylo požadováno škálové hodnocení tří výše uvedených kritérií pro všechny příklady dohromady, čímž vznikl větší prostor pro slovní komentář. Během seminářů byli studenti vyzýváni, aby k přípravě zpětné vazby přistoupili poctivě a kolegiálně, tj. aby měli na paměti, že je v zájmu všech získat kvalitní hodnocení své práce. Navíc bylo pravidelně zdůrazňováno, že jde o povinnou součást hodnocení, takže nesplnění jedné z částí, ať už odevzdání úkolu či jeho hodnocení, znamená neudělení zápočtu, a tudíž nepřipuštění k ústní části zkoušky. Zda se tentokrát podařilo zmírnit negativní aspekty vrstevnického hodnocení, to se ukáže díky chystanému dotazníku, který bude studentům poslán na konci jarního semestru 2023.

3.2 Výsledky dotazníku a slovní komentáře studentů FEKT VUT

V závěru obou semestrů (podzim 2021, podzim 2022) byli studenti požádáni o vyplnění dotazníku zpětné vazby na předmět BPC-MAS Matematický seminář. Dotazník vyplnilo celkem 108, respektive 30 studentů. Nahrávání videí a vzájemného hodnocení se týkalo několik otázek. Pro zhodnocení, zda myšlenka tvorby videí studenty a jejich vzájemné hodnocení naplnila záměry popsané v kapitole 1.1, jsou relevantní tyto:

1. Pomohly mi přípravy (nahrávání a hodnocení videí) k lepšímu pochopení matematiky?
2. Bylo pro mě přínosné sledovat a hodnotit přípravy spolužáků?
3. Co bylo na přípravách dobré/pozitivní?
4. Co bych na přípravách vylepšil/a a jak?

Odpovědi na otázky 1. a 2. jsou shrnuty v následujících grafech.



Obrázek 4: Odpovědi na otázku “Pomohly mi přípravy (nahrávání a hodnocení videí) k lepšímu pochopení matematiky?”



Obrázek 5: Odpovědi na otázku “Bylo pro mě přínosné sledovat a hodnotit přípravy spolužáků?”

Z Obrázků 4 a 5 lze vypočítat, že studenti vnímali aktivitu natáčení a vzájemného hodnocení videí v roce 2021 pozitivněji než v roce 2022, přestože jich museli vypracovat dvojnásobné množství, což může působit překvapivě. Příčinou byly s největší pravděpodobností nejasnosti ohledně formy odevzdávání příprav v roce 2022. Studenti dostali možnost odevzdat první přípravu v libovolném formátu, zatímco pro druhou přípravu byla požadovaná forma sjednocena na video. Tito studenti hodnotili aktivitu negativněji než studenti, kteří museli odevzdat 4 přípravy ve formě videa. Tento rozdíl se projevil výrazněji v odpovědích na otázku číslo 1. Lze tedy usoudit, že pokud je po studentech požadováno výhradně natočení videa, tak o něco více než polovina studentů to následně vyhodnotí jako přínosné k pochopení matematiky. Pokud ale studenti “vycítí” šanci, že by video natočit nemuseli, raději se tomu vyhnou a tím pádem se připraví o možnost, že by to pro ně mohlo být přínosem. Zajímavé je také to, že v odpovědích na otázku číslo 2 byl rozdíl zanedbatelný. Z toho můžeme odhadovat, že sledování videí natočených spolužáky studentům obecně nevadilo a přibližně polovina to považovala za přínosné.

Z odpovědí na otázku číslo 3 bylo možné vyčíst, do jaké míry studenti pochopili smysl aktivity tvorby videa a vzájemného hodnocení. Studenti nejčastěji uváděli, že natáčení videí je přiměřeně hlouběji si prostudovat a pochopit zadané téma, a také procvičit se v tvorbě videa. Někteří studenti ocenili přesnou definici požadovaného rozsahu a podbodů zadaného tématu, a možnost hodnotit přípravy jiných studentů. Příjemným překvapením byl komentář studenta, který díky této aktivitě pochopil, že vytvořit něco edukativního a smysluplného není nic jednoduchého.

Odpovědi na otázku číslo 4 přinesly užitečné podněty, jakým způsobem by bylo možné aktivitu natáčení videí a jejich vzájemného hodnocení dále vylepšit. Nejčastěji uváděné konstruktivní odpovědi byly:

- sjednotit nahrávací médium,
- zlepšit přístup k videím ostatních studentů,
- méně videí za semestr, ale s povinností napsat aspoň nějaký slovní komentář k hodnoceným videím,
- snížit požadovanou délku videa,
- zadat všechna témata na začátku semestru,
- prodloužit lhůtu pro hodnocení,
- porovnání úrovně zpracování vůči ostatním videím,
- návrhy, co vylepšit při opakování hodnoceného tématu,
- možnost výběru z více témat,
- doporučit vhodné prostředky pro nahrávání/editaci videa.

4 Diskuze nad výhodami a nevýhodami vrstevnického hodnocení

Ze zkušeností při implementaci vrstevnického hodnocení na obou fakultách vyplývá potřeba jasně nastavených pravidel a termínů, které nelze obejít. Vyplácí se připravit a na začátku semestru zveřejnit písemně harmonogram všech aktivit, jasné instrukce k odevzdání úkolů či příprav, vysvětlení, jak bude probíhat vzájemné hodnocení, jaké jsou postihy za nesplnění dílčí části některé z aktivit. Na druhou stranu je vyžadována určitá flexibilita ve výjimečných případech, kdy je student nemocný či jinak omluven, a tudíž nedokáže odevzdat úkoly či připravit vzájemné hodnocení do určených termínů. Na PdF MU to učitelé řešili náhradními úkoly spočívajícími například v přípravě vzorového řešení cvičného odpovědníku na zadané téma. Na FEKT VUT je doba na zpracování přípravy přibližně 6 týdnů (podzimní semestr 2022), takže i v případě 1-2 týdnů nemoci je možné zvládnout video prezentaci připravit, když to student nenechá na poslední chvíli. Učitelé tedy neopravují práce studentů, na druhou stranu řeší řadu organizačních záležitostí spojených s aktualizací informací o úkolech a vzájemném hodnocení, administrací celého procesu, řešením výjimek atd.

V případě předmětů na PdF MU si vyučující vyhrazují právo vrátit řešení domácího úkolu k přepracování, nesplňuje-li požadavky formulované v zadání. Tohoto práva už několikrát využili, když při letním procházení škálového hodnocení objevili překvapivě nízké hodnoty nebo výrazný bodový nesoulad u některých studentů. Důležité přitom je, že vzájemné hodnocení je anonymní. Studenti se v případě nedostatků nebojí zadat nízké známky a tím vyjádřit svou nespokojenost s kvalitou zpracování. Učitelé pak snáze odhalí případy, kdy student odevzdal nehotové či kvalitativně naprosto nedostačující řešení zadaných problémů. Samotné hodnocení už není autorizováno učiteli, z čehož vyplývají potenciální nedostatky vrstevnické zpětné vazby, na což ostatně někteří studenti sami upozornili (viz kapitola 3.1). Na druhou stranu, hodnotitelé používají jazyk možná více srozumitelný jejich spolužákům než exaktní a formální zpětná vazba učitele. Předměty, které jsou vyučovány na PdF MU, navštěvují budoucí učitelé matematiky na 2. stupni ZŠ. Prostřednictvím vrstevnického hodnocení se tedy učí nejen jak citlivě vysvětlit nedostatky v řešení, ale i ocenit přednosti práce, případně motivovat ke zlepšení.

Požadavek natočení videa pro studenty FEKT VUT má výhodu v tom, že pokud student pochopí zadání, tj. “aby výkladu bylo rozumět”, podněcuje to kvalitní práci se zdroji a schopnost výběru toho podstatného. Nelze jen vzít stránky z wikipedie o daném tématu a ty převyprávět, je potřeba si rozmyslet koncepci videa, čím bude hlas doprovázen, aby byl výklad uchopitelný a srozumitelný atd., a aby se vešel do časového limitu. Nevýhodou videa je heterogenita studentské kohorty. Na začátku

bakalářského studia jsou velké rozdíly ve vyspělosti a motivaci studentů, a tudíž v úrovni zpracování tématu. Výhodou vrstevnického hodnocení je, že student je motivován odevzdat kvalitní práci, aby se “neshodil” před spolužáky. Pozitivně je vnímán i fakt, že student kvůli hodnocení zhlédne videa jiných studentů, což mu může pomoci k lepšímu pochopení prezentované látky. Pro vyučující je výhodné, že nemusí procházet všechny odevzdané práce, jen ty namátkou vybrané. Odlišná úroveň zpětné vazby způsobená rozdíly ve vyspělosti a motivaci studentů se naopak jeví jako nevýhoda vrstevnického hodnocení. Aby zpětná vazba byla kvalitní a efektivní, hodnotitelům by pomohl, kromě jasných instrukcí, také krátký trénink, což je pro studenty elektroinženýrství nad rámec jejich studia. Nicméně i kvantitativní hodnocení odevzdaných videí může přinést užitečné informace, podobně jako hodnocení videí a jiných produktů na volně dostupných platformách na internetu (např. Youtube, Heureka, Google Maps).

Závěr

Hlavním cílem, kvůli němuž učitelé na PdF MU zavedli domácí úkoly využívající vrstevnické hodnocení, bylo přivést studenty k průběžné domácí přípravě, která doplní jejich účast na seminářích o aktivitu spočívající v poctivém procvičení získaných matematických znalostí a dovedností. Takový nástroj sice studenti již v minulosti měli k dispozici (v podobě cvičných odpovědníků či domácích úkolů opravovaných učiteli), zpětná vazba na jejich počínání však byla nedostačující nebo příliš zatěžující pro vyučující. Ze získaných slovních komentářů v závěrečném písemném testu lze konstatovat, že minimálně polovina účastníků kurzu MA0004 Matematická analýza 1 v semestru Jaro 2022 potvrdila splnění výše formulovaného hlavního cíle. Pokud by otázka v testu byla formulována přesněji, což je v plánu realizovat v aktuálním semestru, bylo by možné zjistit objektivněji (i na základě porovnání s výsledky písemné a ústní části zkoušky), zda jim aktivita pomohla k lepšímu pochopení procvičované látky a ke zdokonalení vlastních schopností řešit zadané problémy.

Cílem natáčení videí na FEKT VUT bylo, aby se studenti zamysleli nad zpracováním zadaného tématu a tím došlo k hlubšímu pochopení matematického konceptu. Podle odpovědí v dotazníku bylo tohoto cíle dosaženo u mírně nadpoloviční většiny studentů v roce 2021 a u necelé poloviny v roce 2022. Dále bylo záměrem, aby se studenti učili “matematicky” hovořit, tj. vyjadřovat se přesně tak, aby výkladu bylo rozumět. Dosažení tohoto cíle nebylo možné z dostupných dat ověřit, ale na základě textových komentářů ve vrstevnických hodnoceních se lze domnívat, že záměr byl splněn jen částečně. Cílem vrstevnického hodnocení bylo dát hodnotitelům možnost k hlubšímu porozumění témat připravených jinými studenty. Podle odpovědí v dotazníku bylo tohoto cíle dosaženo přibližně u poloviny studentů, a to v obou letech 2021 a 2022.

Na základě zkušeností s vrstevnickým hodnocením popsaných v tomto příspěvku můžeme usoudit, že tento koncept lze využít v matematických předmětech v inženýrských i jiných vysokoškolských studijních programech. Zároveň je potřeba dodat, že cíle i formy využití konceptu vrstevnického hodnocení se mohou v různých programech výrazně lišit. Mezi významné faktory, které mají vliv na cíle a formu vrstevnického hodnocení, patří: zaměření studijního programu, míra heterogenity studentské kohorty, časové možnosti vyučujících, časová dotace předmětu.

Poděkování

Tato publikace byla vytvořena za finanční podpory projektu “Boosting Sustainable Digital Education for European Universities (BoostEdU)”, registrační číslo 2020-1-CZ01-KA226-HE-094408, v rámci programu Erasmus+, výzvy Erasmus Strategic Partnerships.

Odkazy

- [1] Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- [2] Masarykova univerzita. (2023). *PdF:MA0004 Matematická analýza 1 – Informace o předmětu*. <https://is.muni.cz/predmet/ped/MA0004>
- [3] Masarykova univerzita. (2023). *PdF:MA0005 Algebra 2 – Informace o předmětu*. <https://is.muni.cz/predmet/ped/MA0005>
- [4] Rokos, L. (2020). Mikrovyučování jako prostor pro implementaci vrstevnického hodnocení do přípravy studentů učitelství. *Pedagogická orientace*, 30(3), 315–346. <https://doi.org/10.5817/PedOr2020-3-315>
- [5] Starý, K., & Laufková, V. (2016). *Formativní hodnocení ve výuce*. Praha: Portál.
- [6] Vysoké učení technické v Brně. (2023). *Detail předmětu – Matematický seminář*. <https://www.vut.cz/studenti/predmety/detail/258445>

ROZVOJ MATEMATICKÝCH A INFORMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ V RÁMCI KROUŽKU JUNIOR UNIVERZITY

MORÁVKOVÁ Zuzana, SCHREIBEROVÁ Petra

VŠB-TUO, Fakulta strojní, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie,
17. listopadu 2172/15, Ostrava-Poruba,
zuzana.moravkova@vsb.cz, petra.schreiberova@vsb.cz

Abstrakt: V článku je popsán koncept Junior univerzity a zapojení kolektivu GeoGebra Institutu Ostrava do této aktivity. Jednou z činností institutu je realizace kroužků pro žáky základních a středních škol se zaměřením na tvorbu zajímavých úloh a programování jednoduchých her. Soustředíme se především na využití kreativity u žáků a na rozvoj matematických a informatických dovedností.

Klíčová slova: Junior univerzita, matematika, GeoGebra, informatika, vzdělávání

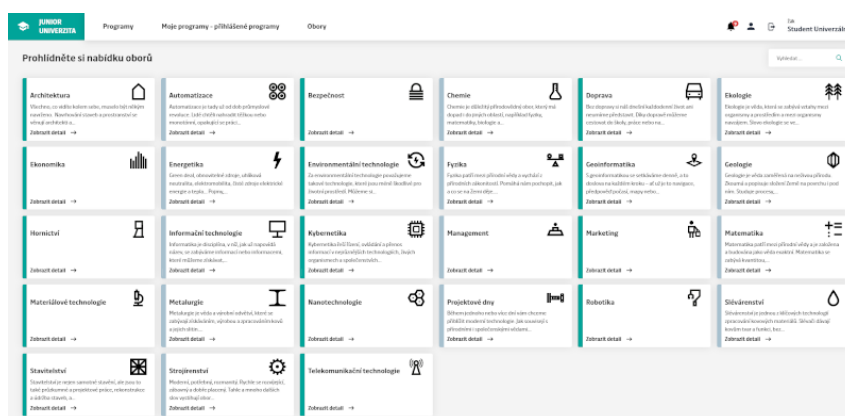
1 Junior univerzita na VŠB-TUO

V roce 2012 se začal na VŠB-TUO realizovat projekt pod značkou Zlepší si techniku, který měl za cíl plnit třetí roli univerzity, především zlepšit jméno naší školy u veřejnosti, propagovat studijní obory a dostat se do povědomí komunikací se základními a středními školami, s potenciálními zájemci o technické a přírodovědné obory a případné studium na VŠB-TUO. Pro naplnění tohoto cíle byla postupně vybudována síť lektorů a mentorů z řad akademických pracovníků VŠB-TUO, kteří se podílí na přípravě atraktivních programů, se kterými jezdí do škol, nebo třídy přijedou k nám na univerzitu. Další aktivitou pod značkou Zlepší si techniku jsou programy pro veřejnost a rodiče s dětmi v mimoškolní čas, jako například Den Země, Art&Science, Noc Vědců.

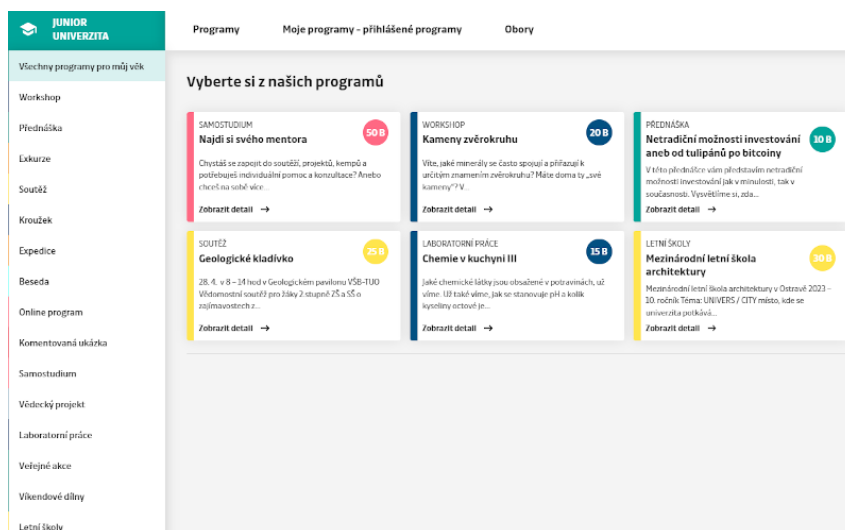
Komunikace s pedagogy na základních a středních školách i budování vztahu s veřejností se dařila. Postupem času se však začalo ukazovat, že není k dispozici žádný nástroj, jak uspokojit potřeby rodičů, kteří chtějí rozvíjet zájem dětí o přírodovědné a technické obory či potřeby pedagogů a kariérových poradců pro zapojení talentovaných žáků, tzn. individuální vztah s dětmi. Stávající systém bylo tedy potřeba upravit a rozšířit o volnočasové aktivity přímo pro žáky. Tato potřeba byla i v souladu se vznikajícím Strategickým záměrem VŠB-TUO 2021-2027 a se Strategiií vzdělávání v ČR do roku 2030+.

Od roku 2019 jsme se v týmu složeného z řad lektorů Zlepši si techniku (garanti za fakulty) a z týmu propagace pod vedením Mgr. Jarmily Černé věnovali přípravě nového formátu. K programům pro školy a veřejnost nově přibyla část pro žáky s názvem Junior univerzita (JUni) a vzniklo také nové komplexní webové prostředí, které již umožňuje přímou komunikaci se žáky i pedagogy [1].

Junior univerzita je unikátní systém pro děti od 7 let až po maturanty. Pilotní ročník byl spuštěn v říjnu 2021. Zájemci se ke studiu mohou přihlásit kdykoliv v průběhu roku a studovat lze i několik let za sebou. Žáci si z aktuální nabídky aktivit (kroužky, přednášky, exkurze, workshopy, vědecké projekty, SOČ, ...) sami vyberou, do které aktivity se zapojí (Obrázek 1, Obrázek 2).

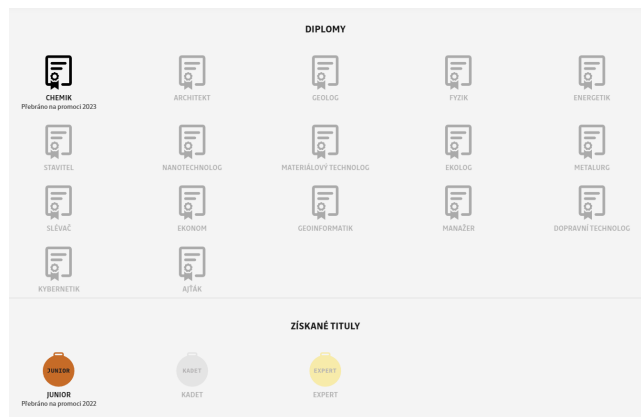


Obrázek 1: Webové prostředí JUni – obory



Obrázek 2: Webové prostředí JUni – programy

Pro lepší motivaci k absolvování vybraných aktivit a k pokračování ve studiu byl navržen systém hodnocení a odměn. Žáci za absolvování jednotlivých aktivit získávají na svůj osobní účet body, odznaky či diplomy, které vedou k získání titulů (Obrázek 3). Všechna získaná ocenění jsou žákům předána na slavnostní promoci (Obrázek 4).



Obrázek 3: Osobní účet – přehled diplomů a titulů

První promoce v rámci naší Junior univerzity proběhla 6. června 2022 v Univerzitní aule, kde byly předány nejen odměny a tituly cca 120 aktivním žákům, ale také ocenění aktivním lektorům a popularizátorům. (Obrázek 4).



Obrázek 4: Promoce JUnI v roce 2022

Zájem o nabízené programy stále roste. Ke konci roku 2022 bylo v systému JUní registrováno přes 840 žáků ze SŠ a ZŠ, proběhlo více jak 150 programů včetně 24 kroužků pro 1 100 účastníků. Zapojeno je cca 120 lektorů z řad odborných asistentů VŠB-TUO.

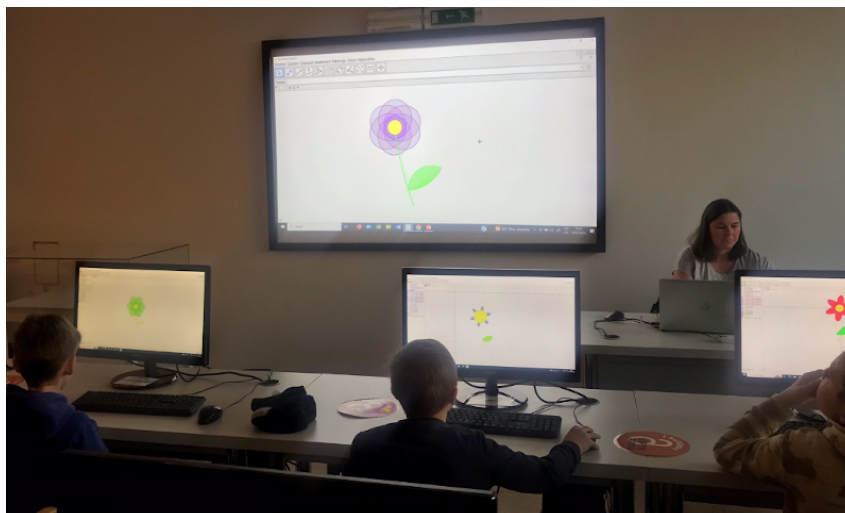
2 Kroužek Hry s GeoGebrou II

Na VŠB-TUO byl v roce 2016 založen GeoGebra Institut Ostrava, v současné době jej tvoří sedm z Katedry matematiky na Fakultě stavební a z Katedry matematiky a deskriptivní geometrie na Fakultě strojní. Jedním z hlavních cílů institutu je podpořit zájem žáků středních a základních škol o studium technických oborů na vysokých školách a propagace naší školy. Z těchto důvodů se již od začátku vzniku institutu aktivně podílíme na realizaci popularizačních a propagačních akcí. Hlavní činností je nejen organizace workshopů pro žáky (Obrázek 5) i učitele, ale také příprava podpůrných pomůcek dostupných na webu institutu [2].



Obrázek 5: Workshop pro žáky

Díky získaným zkušenostem z realizovaných akcí pro školy a spoustě kladných ohlasů se během vzniku Junior univerzity čtyři členové institutu rozhodli zapojit i do této aktivity. Již v pilotním ročníku jsme nabídli dva kroužky pro různé věkové skupiny. Po prvotních zkušenostech z pilotního ročníku jsme nabídku upravili a kroužky rozdělili podle znalostí programu GeoGebra pro věkovou kategorii 8 až 12 let. Za období 2021 – 2023 jsme zatím realizovali sedm cyklů pro celkem 56 žáků. Lekce jsou primárně zaměřené na kreativitu a představivost žáků, oblíbené jsou 3D modely a využití animací (Obrázek 6).



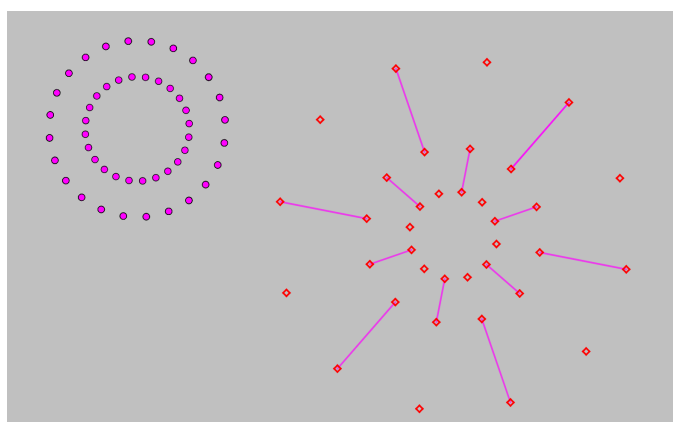
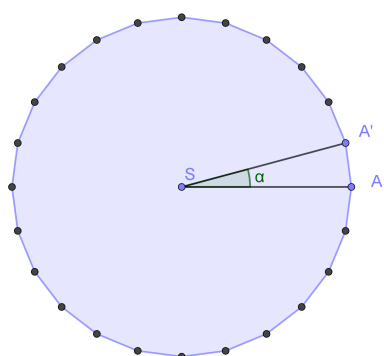
Obrázek 6: Kroužek pro žáky

3 Úlohy na jednotlivých lekcích

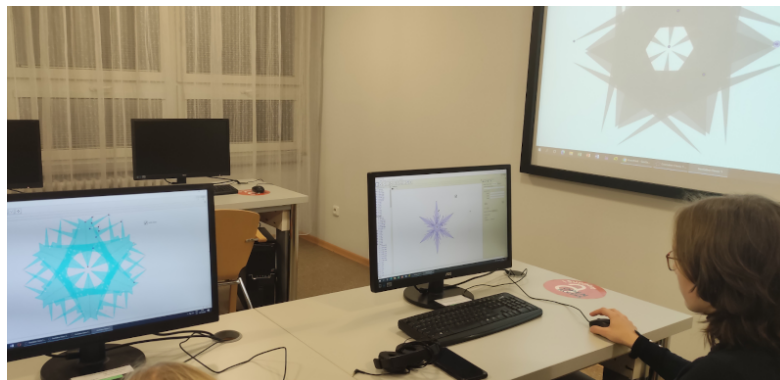
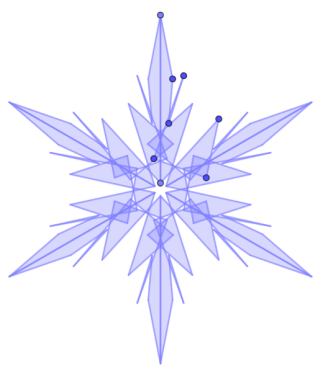
3.1 Geometrie

První seznámení s programem GeoGebra obvykle bývá na geometrických úlohách, na kterých žákům hravou formou ukazujeme základní geometrické principy. Využíváme především možnosti animace, která činí úlohy nejen zábavnými, ale pomáhá jim i lépe uvedené principy pochopit.

Jednou z takových úloh je demonstrace novoročního ohňostroje, na které ukazujeme princip rotace. Nejprve rotací bodu o daný úhel sestrojíme dva vrcholy budoucího n -úhelníka, který tvoří základ jednoho ohňostroje (Obrázek 7). S žáky vedeme diskusi, jaký je vztah mezi úhlem a počtem vrcholů n -úhelníka. Žáci obvykle vědí, že celý kruh má 360° a dělením pak najdeme výsledek. Pokud se žáci při dělení spletou, tak tuto chybu ihned vidí, neboť jim některé vrcholy chybí nebo naopak přebývají [3].


 Obrázek 7: Ohňostroj – velikost vnitřního úhlu n -úhelníka, rotace

Osovou symetrii a rotaci jsme využili při tvorbě sněhové vločky. Vytvořený n -úhelník pomocí osové symetrie zobrazíme přes osu a poté provedeme potřebný počet rotací. Žáci mohou změnou tvaru původního n -úhelníka dynamicky měnit tvar celé vločky (Obrázek 8). Okamžitá vizualizace změny tvaru vede k intuitivnímu pochopení principu symetrie a rotace. [4].



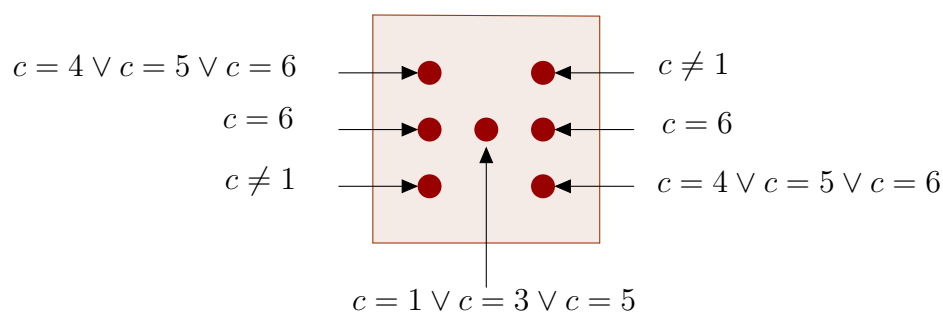
Obrázek 8: Sněhová vločka – osová symetrie, rotace

3.2 Programování

Pro rozvoj informatických dovedností máme připraveno několik her. Na lekci vždy postupujeme tak, že si hotovou hru zkusíme, následně necháme žáky popsat, jaký význam mohou mít použité objekty a pak si jednotlivé části hry společně vytvoříme.

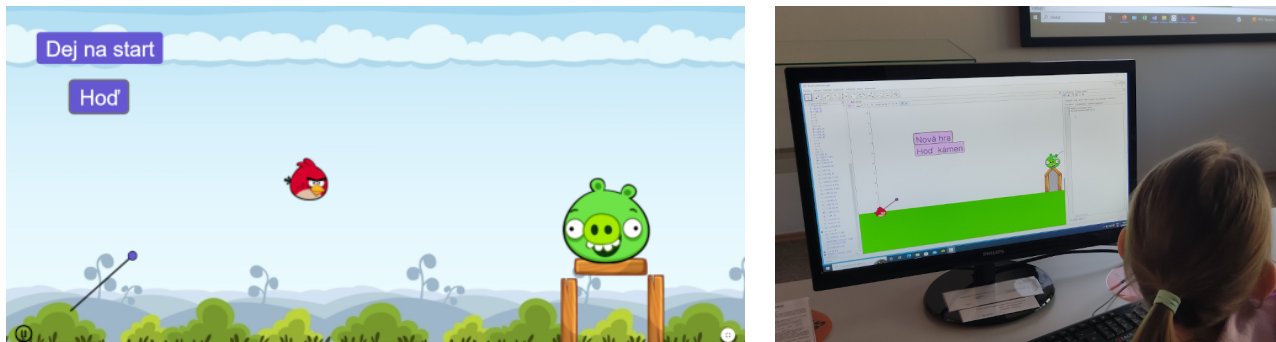
Ukázkou takové hry je simulace hodu kostkou, tedy vygenerování náhodného čísla a zobrazení příslušných počet ok na kostce. Kostku reprezentuje čtverec se sedmi body, jejichž zobrazení se řídí podle hodnoty náhodně vygenerovaného čísla (Obrázek 9).

I když žáci na prvním stupni neznají logické operace (negace, konjunkce, disjunkce), tak jim nedělá problém popsat operace *neplatí*, a zároveň, *nebo* a těmito slovy nadefinovat podmínky zobrazení jednotlivých ok [5].



Obrázek 9: Kostka – logické operace

Oblíbenou komplexní úlohou, ve které se kombinuje matematika, geometrie a informatika, je naprogramování zjednodušené verze hry Angry Birds. (Obrázek 10) Podle věků žáků volíme obtížnost prvků dané hry. Se středoškoláky si povídáme i o funkcích a fyzice. U žáků základní školy se soustředíme více na geometrii a hrací prvky. Stavíme na oblibě a znalosti dané hry [6].



Obrázek 10: Zjednodušená varianta hry Angry Birds

Závěr

Z našich bohatých zkušeností a kladných ohlasů na naše kurzy se ukazuje, že program GeoGebra je velmi vhodným nástrojem pro zatraktivnění matematiky. Výhodou je, že se jedná o nekomerční a zdarma šířitelný program, který lze využít pro všechny věkové kategorie, od ZŠ až po VŠ. Žáci i studenti mohou být aktivní, kreativní a díky okamžité vizualizaci snáze pochopí probíraná témata.

Reference

- [1] Zlepší si techniku [online]. Dostupné z: <https://zlepsisitechniku.vsb.cz>
- [2] GeoGebra Institut Ostrava [online]. Dostupné z: <http://ggi.vsb.cz>
- [3] Novoroční ohňostroj [online].
Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/xk4khvkn#material/munf3usz>
- [4] Sněhová vločka [online].
Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/xk4khvkn#material/bcswxw5p>
- [5] Hoď kostkou [online].
Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/xk4khvkn#material/N24vwxbB>
- [6] Rozzlobení ptáčky [online].
Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/xk4khvkn#material/fkh34vhp>

GENEROVÁNÍ HEXAHEDRÁLNÍCH SÍTÍ POMOCÍ POLYCUBE DEFORMACE

Motyčková Kristina, Sadowská Marie

VŠB-TU Ostrava, IT4Innovations, Studentská 6231/1b, 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail na hlavního autora příspěvku: kristina.motyckova@vsb.cz

Abstrakt: Plně automatické a robustní vygenerování hexahedrálních sítí je stále otevřeným problémem navzdory více než 30-ti letému úsilí vědecké komunity. Jeden z přístupů, který se toho snaží dosáhnout, je generování hexahedrálních sítí pomocí deformace daného 3D objektu na PolyCube. Tento postup je možné rozdělit do několika kroků. Vstupem je kvalitní isotropní tetrahedrální síť daného objektu. Tu si postupně v pěti iteracích „předdeformujeme“ pomocí rotací hran tetrahedronů vždy o minimální úhel normály povrchových uzlů k nejbližšímu souřadnému směru za pomoci kvaternionů s jejich následnou propagací do objemu. Poté si vytvoříme tzv. charts - označíme si plochy povrchových trojúhelníků dle největší blízkosti jejich normály k souřadným směrům. Upravené charts pak narovnáme a vytvoříme PolyCube, tj. reprezentaci daného objektu pomocí sjednocení kvádrů. Nyní na těchto sjednocených kvádrech vytvoříme poměrně jednoduše hexahedrální síť. Využitím barycentrických souřadnic a stejné konektivity tetrahedrálních uzlů provedeme zpětné mapování hexahedrální sítě z PolyCube na původní objekt. Takto vytvořená hexahedrální síť zpravidla potřebuje ještě upravit kvalitativně horší prvky, např. pomocí paddingu.

Klíčová slova: hexahedrální síť, PolyCube, kvaterniony, charts, barycentrické souřadnice, padding

STRUKTUROVANÝ OSOBNOSTNÍ DOTAZNÍK PISP (PORTFOLIO INDIVIDUÁLNÍ STRUKTURY POTŘEB): JEHO KONSTRUKCE A PŘÍKLAD POUŽITÍ NA CHARAKTERIZACI LIDÍ BEZ DOMOVA VE SROVNÁNÍ S BĚŽNOU POPULACÍ

A structured personality questionnaire PISP (A Portfolio of the Individual Structure of Human Needs): Its construction and an application to homeless people's personality traits in comparison to a common population

MÜLLER Ivo

VŠB–TUO, KMDG, Ostrava-Poruba
ivo.muller@vsb.cz

Abstrakt: Tento výzkum si klade za cíl empirickými metodami vytipovat v lidské psychice důležité determinanty (dimenze osobnosti), které odlišují osoby postižené sociální marginalizací od lidí do společnosti začleněných. Teoretickým východiskem a nástrojem je psychometricky chápaná osobnost člověka. Při dimenzionálním popisu osobnosti je možné každého člověka charakterizovat souborem čísel (profilem skóre), kde každý jednotlivý skóre umísťuje člověka někam mezi dva extrémní póly sledované dimenze (vlastnosti). Data získaná z vlastního strukturovaného dotazníku (PISP) od uživatelů domovů se zvláštním režimem provozovaných Armádou spásy jsou zpracována a vyhodnocena metodami matematické statistiky (testy hypotéz, faktorová analýza). Jsou prokázány statisticky významné rozdíly (na hladině 0,001) mezi cílovou a kontrolní populací u šesti dimenzí z celkem deseti sledovaných, a sice *míra aktivace, soběstačnost, směřování, zdroje pohody, centrum řízení a transcendence*. Některé dimenze vytvářejí společný shluk na hlubší úrovni osobnosti (faktor 1. řádu), zde nazvaný jako „orientace na dění kolem“.

Klíčová slova: lidé bez domova, dimenze osobnosti, psychologické potřeby, domov se zvláštním režimem, faktorová analýza

Abstract: Utilizing empirical methods, the research aims at identifying important mental determinants (personality traits) that distinguish persons socially marginalized from people well functioning in society. A theoretical basis and tool is a psychometrically conceptualized human personality. In a dimensional approach to personality, each person can be characterized by a set of numbers (a profile of scores), where each score places the person somewhere in between two extreme endpoints of a given dimension/trait. Data from the original questionnaire (PISP) administered in Salvation Army's special-regimen housing facilities have been put through statistical analysis and properly evaluated (hypothesis testing, factor analysis). In six dimensions out of ten under consideration, a statistically significant difference (p-value <.001) has been found between a targeted and control populations, namely *Arousal, Self-reliance, Directedness, Sources of well-being, Center of control, Transcendence*. Several dimensions cluster on a deeper personality level, forming a first-order factor, here denoted as *Involvement in what's going on around one*.

Keywords: homeless people, personality dimensions, psychological needs, special regimen housing, factor analysis

1. Úvod

Přístavy Armády spásy jsou jakožto domovy se zvláštním režimem (DZR) specifické svým posláním, organizací služby i cílovou skupinou uživatelů. Pro kvalitu poskytovaných služeb je důležité sledovat, jakým způsobem a do jaké míry jsou zajišťovány životní potřeby ubytovaných klientů, přičemž toto sledování může probíhat z pohledu samotných osob, z pohledu obsluhujícího personálu, anebo z pohledu celé naší společnosti, která svými cílenými legislativními úpravami tuto formu pobytové služby umožňuje a upravuje. Obecně lze říci, že všechny tři strany mohou mít zájem na tom, aby individuální žití i společné soužití obyvatel Přístavů probíhalo jak v atmosféře spokojenosti klientů, tak v dobrých pracovních podmínkách personálu, a zároveň za konsenzu společnosti, která má snahu postarat se o své marginalizované či různými nešťastnými životními okolnostmi postižené členy.

1.1 Jemný úvod do psychologické problematiky osobnosti a potřeb

Problematika potřeb v těchto zařízeních je velmi široké téma, které může pokrývat veškeré fungování člověka, od základní hygienické obsluhy, přes zajištění stravy a ošacení, až po mezilidské vztahy a duchovní směřování. Potřeby zasahují člověka v jeho fyziologické existenci, působí jako důležité faktory při formování osobnosti, při emočním reagování, při budování sebepojetí a profilování vlastního já, ovlivňují stanovování cílů i schopnost jejich plnění, vstupují do interakcí s druhými lidmi, s přáteli i s úřady, pomáhají dodávat životu řád a smysl – abychom zmínili alespoň některé důležité oblasti. Problematikou potřeb se zabývala řada vlivných psychologických teorií lidské osobnosti (srv. Balcar, 1991; Drapela, 1997, Hall & Linzey, 1978; Massey, 1981). Psychologie osobnosti umisťuje potřeby do tzv. energetizujícího systému psychiky, společně s pudy/instinkty, city/emocemi a motivací. Tento systém se pak doplňuje a spolupracuje s dalšími systémy, zejména s kognitivním (myšlení, jazyk, paměť, plánování, řešení problémů) a s volním (stanovování a dosahování cílů).

Základním existenčním principem všech živých organismů je vyhýbat se podnětům nepříjemným a vyhledávat podněty příjemné. V původní hrubé podobě to znamená pohyb pryč od bolesti a směrem ke slasti. U vyšších živočichů a zejména u člověka se však tyto primární stimuly různě transformují a zjemňují, takže namísto fyzické bolesti může vystupovat například trapná situace, nezvyklé prostředí, absence běžně známých objektů, nebo třeba jen nějaká nepříjemná představa, vzpomínka či pocit; namísto tělesné slasti pak například pochvala, zaběhnutý režim, umělecký požitek, nebo jen příjemná představa, vzpomínka či pocit. Potřebou může být v podstatě cokoli, co se naváže na některý z výše uvedených podnětů a v organismu vyvolá tendenci (touhu, odhodlání) započít nějakou činnost (pohybovou či myšlenkovou), jež má v konečném důsledku za cíl vyhledat a podržet to, co je vnímáno jako příjemné, anebo odstranit to, co je vnímáno jako nepříjemné.

Poměrně známá je Maslowova hierarchická pyramida potřeb (Maslow, 1967, 1970), kdy základnu tvoří takzvané potřeby nižší, tedy existenční a fyziologické, jako jsou potřeba potravy, přístřeší, bezpečí, odpočinku a rozmnožování, na něž navazují další vrstvy potřeb vyšších, např. potřeby náležitosti, přijetí, sebeúcty, až po potřeby nejvyšší, jež jsou produktem civilizačního vývoje a kam se řadí potřeby estetické, vzdělávací, relaxační či duchovní. Součástí tohoto modelu je princip, že potřeby na vyšších úrovních začínají být pocíťovány jako aktuální až v okamžiku, kdy jsou uspokojeny potřeby z úrovně nižších, a naopak, při nedostatku v potřebách základních ustupují všechny vyšší vrstvy do pozadí. Jinými slovy, kručí-li nám v břiše hlady, tak nám až tolik nevádí, nemůžeme-li si zajít do divadla na Shakespeara.

Tento základní Maslowův model může dobře posloužit jako výchozí bod i pro zde popisovaný výzkum, bude však užitečné připojit k němu několik doplňujících poznámek. Zprv, struktura potřeb je u každého člověka individuální, přičemž každá obecná potřeba, např. potřeba náležitosti, se člení na dílčí a drobnější, avšak konkrétnější potřeby, např. mít

kolem sebe rodinu a být jejím platným členem, mít kruh přátel a být mezi nimi oblíben, zastávat funkci v pracovním kolektivu apod. Toto členění je možné provádět do libovolného stupně podrobnosti. Zadržím, struktura potřeb není statická, nýbrž se dynamicky proměňuje v čase, jednak působením vnějších podmínek (změna prostředí, proměnlivost stimulů), jednak v důsledku pouhého plynutí biologického času (hlad a žízeň, procesy zrání a stárnutí). Tato proměnlivost se projevuje v časových horizontech různých řádů, u některých potřeb v řádu let či desetiletí (potřeba partnerského vztahu), u jiných v řádu dnů i hodin (potřeba odpočinku nebo vybití napětí).

Zatřetí, člověk je schopen záměrným volným úsilím ovlivňovat relativní důležitost jednotlivých potřeb, tzn. že některé, které považuje za ušlechtilé (např. potřeba se vzdělávat), upřednostní, zatímco jiné (např. potřeba ovládat druhé lidi) se snaží potlačovat. Toto záměrné upřednostňování a upozadování potřeb ve smyslu pěstování určitých rysů osobnosti na úkor jiných, je součástí budování a přebudování charakteru, které probíhá vlastně po celý život člověka, od dětství až do pozdního stáří. Jako hlavní tendence se v něm obvykle projevuje jistá kontinuita vývoje, čili důležitým determinačním faktorem je už to, které potřeby a jakým způsobem se člověk naučil uspokojovat v minulosti. Metody a postupy, které se mu osvědčily, si s sebou nese dále životem jako návyky a začleňuje je do více či méně stabilní struktury osobnosti, jako nadstavbu nad základní vrozený temperament. Tato struktura se přirozeně a samovolně mění působením vlivů, jako jsou například hormonální změny nebo akumulace zkušeností, avšak pozměnit ji nějakým zásadnějším způsobem bývá obtížné, zejména není-li k tomu člověk opravdu odhodlán. Čili shrnuto, vymanit se ze zajetých kolejí není snadné, avšak při dostatečné motivaci či silné vůli je to uskutečnitelné.

Začtvrté, potřeby je možné „vyrábět uměle“, někdy docela snadno, např. potřeba dát si několikrát denně kávu nebo cigaretu, potřeba dokončit rozluštěnou křížovku, potřeba koupit si ten nejlepší produkt opěvovaný v reklamě. Jde vlastně o to, že člověk dobrovolně přijme nějaký cíl (třeba i ne zcela vědomě), jehož dosažení mu přinese příjemný pocit – a naopak, stav nedosaženého cíle je spojen s pocitem spíše nelibými čili s frustrací. Jedná se o poměrně zajímavý postřeh ohledně fungování lidské motivace: aktivní člověk, který je zvyklý si stanovovat cíle a usilovat o jejich plnění, si připravuje spoustu příležitostí pro příjemné pocity z odměny, pokud se mu cílů daří dosahovat nebo se k nim alespoň přibližovat, avšak zároveň riskuje frustrací a zklamáním, pokud se mu toto nedaří; zatímco pasivní člověk, který si navykl o nic příliš neusilovat, se sice vyhne nepříjemným pocitům zklamání z prohry, avšak zároveň se připravuje o možnost pocitů radostných z případných úspěchů. I toto je součástí strategií při uspokojování potřeb, které se odrážejí ve struktuře osobnosti.

Zapáté, o jakém člověku bychom mohli říci, že jsou všechny jeho potřeby uspokojeny? Znamená to, že v žádném okamžiku vůbec nevnímá pocit nedostatku? Evidentně nikoli, vždyť toto tvrzení samo o sobě představuje antitezi života, kdy život je souborem složitých a vzájemně se ovlivňujících procesů, jejichž souhra v lepším případě dosahuje jakési dynamické, tj. neustále porušované a obnovované rovnováhy. Stav uspokojených potřeb nelze tedy chápat v takto striktním smyslu, ale volněji, a to možná na dvou rovinách. Jako víceméně pravidelné obnovování rovnováhy, tj. vyrovnávání deficitu, u potřeb základnějších a krátkodobějších, které daný člověk pociťuje jako pro něj důležité (strava, hygiena, společenský kontakt, zábava, sex), na jednom pólu, a jako určitý pocit spokojenosti či smíření v důležitých životních oblastech (profesní dráha, rodina, smysl života) v dlouhodobější perspektivě na pólu druhém. Pokud bychom hledali k výrazu „uspokojení potřeb“ synonyma, asi bychom nenašli lepší slova než spokojenost, pohoda, dobrá nálada, vyrovnanost. Ovšem za těmito slovy se mohou skrývat různé cesty k výslednému stavu a různá míra vynaloženého úsilí na jeho dosažení a udržení.

Všechny výše uvedené postřehy je dobré mít na zřeteli, je-li naším úkolem sledovat a vyhodnotit míru uspokojování potřeb u populace osob dlouhodobě pobývajících v Přístavech.

Ačkoli v jednotlivostech mohou být jejich individuální osudy a životní okolnosti velmi rozmanité, obecně je možné u této skupiny lidí vystihnout následující specifika, která se promítají i do oblasti potřeb a osobnosti:

- a) vyšší věk, tj. fáze pozdní dospělosti a stáří,
- b) úbytek kognitivních schopností, tj. zhoršená paměť, úbytek jazykových schopností, narušené logické myšlení, zhoršená komunikace, demence,
- c) oslabení sociální sítě, tj. zhoršené či přerušené kontakty s rodinou i s bývalými přáteli,
- d) omezení kontaktu s okolním světem, často v důsledku tělesného postižení, duševního onemocnění nebo finanční tísně,
- e) stíny minulosti: životní krachy, závislosti na návykových látkách, exekuce, ztráta domova, rozpad osobnosti apod.

V rámci zde prezentovaného výzkumu jsme hledali vhodný kompromis, který by nám umožnil neslevit příliš v širší záběru, a přitom se neutopit v detailech problematiky, jejíž rozmanitost jsme se snažili nastínit v předchozích odstavcích. Jednalo se spíše o pilotní průzkum v dané oblasti, o mapování a hledání zajímavých témat a souvislostí, než o ověřování konkrétních, již formulovaných hypotéz. V tomto článku se zaměříme na porovnání uživatelů Přístavů s širší populací, a sice pomocí statistické analýzy kvantitativních dat. Kromě výsledků pro souhrnnou populaci uživatelů všech čtyř stávajících Přístavů Armády spásy v ČR uvedeme rovněž některé údaje pro Přístav v Šumperku, který jsme zvolili jako vhodného představitele středně velkého zařízení tohoto typu.

1.2 Střípky do mozaiky z výzkumných studií

Snaha podchytit specifické osobnostní rysy člověka bez domova není zdaleka nová, nicméně prvotní úsilí bylo zaměřeno spíše popisně a kvalitativně (Levinson, 1965). Pozdější studie již využívaly kvantitativních postupů, přičemž se jednak rozšiřoval okruh zkoumaných vzájemných souvislostí, jednak se zacházelo do detailnějších analýz. Problematické konkrétních osobnostních vlastností a psychických stavů u lidí bez domova se věnovali například Guarnaccia a Henderson (1993), kteří se zaměřili na efektivitu, komunikační kompetenci a snahu zalíbit se druhým, nebo Summerlin (1995), který zkoumal sebeaktualizaci, osamělost a depresivitu. Řada studií se snažila podchytit skutečnost, že mezi lidmi bez přístřeší se poměrně často vyskytují psychické poruchy, přičemž nebývá vždy zřejmé, zda se jedná o příčinnou souvislost a kterým směrem tato příčinnost míří. Například Churchard et al. (2019) se věnují projevům autismu. Vyslovují předběžný závěr, že komunita bezdomovců skutečně vykazuje zvýšený výskyt autistických rysů a že jednotlivci takto postižení mohou mít určité společné osobnostní vzorce a potřeby, konkrétně, že bývají více společensky vyloučení a že mívají menší sklony ke zneužívání návykových látek. Salavera et al. (2013) sledovali úspěšnost léčby v závislosti na typu duševní poruchy. Zjistili, že u poruch osobnosti typu B (antisociální, hraniční a narcistní – dle DSM IV) jsou horší vyhlídky setrvání v léčbě oproti poruchám typu C (závislostní).

Z Maslowovy hierarchie potřeb vycházel výzkum Sumerlina a Normana (1992), v němž se snažili prokázat, že v důsledku neuspokojených základních potřeb bude skupina lidí bez domova skórovat významně níže na stupnici sebeaktualizace (Short Index of Self-actualization, Jones & Crandall, 1986). Tento předpoklad se nicméně nepotvrdil, což svědčí ve prospěch jistých specifických adaptivních strategií bezdomovců.

Faktorový přístup pro popis struktury osobnosti představil již Cattell (1946, 1950). Od té doby je tento přístup stále využíván, i když má své zastánce i odpůrce, výhody i nevýhody (viz např. McDonald, 1991). Například Schnittgerová et al. (2012) jej použili při hledání klíčových komponent psychické pohody a psycho-sociálního fungování u starších lidí přebývajících v domovech pro seniory. Za tři latentní faktory označili: niternou psychickou nepohodu, sociální podpůrné sítě a fyziologickou funkčnost (zejména spánek). Sumerlin (1995) aplikoval faktorovou analýzu při hledání modelu adaptivního přizpůsobení na vzorku

145 lidí žijících na ulici. Jeho výsledný model obsahoval tři faktory: snahu o přizpůsobení, nadhled nad situací a adaptační zdroje. Přitom se potvrdila Maslowova domněnka, že uspokojivé mezilidské vztahy jsou dobrou cestou k duševnímu zdraví.

2. Metody a nástroje

2.1 Testový dotazník

Sběr dat jsme provedli formou dotazníkového šetření mezi uživateli i zaměstnanci Přístavů. Náš základní nástroj, **Portfolio individuální struktury potřeb (PISP)**, je koncipován jako strukturovaný psychologický test osobnosti malého rozsahu (30 položek), ve formě testového dotazníku pro vyplnění respondentem (*self-report questionnaire*). Forma dotazníku byla vedena záměrem jeho následného zpracování metodou faktorové analýzy. Tato statistická metoda umožňuje pomocí rozboru korelační struktury mezi položkami získávat z tzv. povrchových faktorů skryté (latentní) faktory vyššího řádu. Položky (otázky) byly sestaveny tak, aby vždy tři z nich sytily jeden povrchový faktor. Těchto povrchových faktorů bylo tedy deset a zároveň představovaly vybrané oblasti potřeb. Lze se na ně též dívat jako na určité dimenze ve struktuře osobnosti, které nás zajímají právě s ohledem na různorodé potřeby uživatelů. Každou z dimenzí chápeme jako kontinuum, které je charakterizováno popisem svých dvou protilehlých pólů. I když se tyto póly tradičně označují jako plus a minus, neznamená to nutně, že minus pól je nějakým způsobem špatný, méněcenný či opovržením hodný. Může se jednat pouze o odlišné preference či způsoby uspokojování potřeb. Vybraných deset dimenzí pro analýzu potřeb popisuje tabulka 1. Dimenze jsou uspořádány zhruba ve směru potřeb od nižších po vyšší.

Tabulka 1. Dimenze z portfolia potřeb PISP.

	dimenze	plus pól (+)	minus pól (-)	pol.
1.	MA míra aktivace	činnost, společenské dění, komunikace, pohyb	klid, ústranní, nečinnost	2 11 28
2.	SO soběstačnost (základní provoz)	soběstačnost, běžné denní úkony, aktivity denního života (jídlo, oblečení, hygiena, vaření, praní, koupání)	zabezpečení, nechat se opečovávat, nestarat se o domácnost (dostat obléct, najíst, vyspat)	8 23 26
3.	UP udržování pořádku	pořádek, útulno, čisto, věci na svých místech (jako v klicce)	provozní chaos, nezatažovat se úklidem (jako v tanku)	1 19 25
4.	SD struktura dne	režim dne, pravidelnost, dodržování pravidel, rovnost všech před zákonem	volná náplň dne, změny a překvapení, tolerance přestupků druhých	7 20 21
5.	SM směřování	plánování do budoucnosti, postupné cíle, smysluplné směřování	nic si neplánovat, brát věci jak přicházejí	9 16 24
6.	ZP zdroje pohody	trvalé vnímání radosti z každodenních maličkostí, z živé víry, vnitřní zdroj energie	čas od času vysadit a pořádně zrelaxovat, zapomenout na starosti, vnější zdroj úlevy	10 14 18
7.	SZ sociální zakotvení	jeden blízký vztah, mít se komu vypovídat, mít pevný bod	více povrchných známostí, široká síť	5 12 30
8.	CŘ centrum řízení	svět jako výzva, ve které umím obstát; zvládání vlastními silami, víra ve vlastní schopnosti	svět jako ohrožení, s nímž stále zápasím; zvládání zubů nehty, na mě si neprijdou	6 13 22
9.	PS přínos světu a druhým	pocit důležitosti pro druhé, mám jim co nabídnout, umím je zaujmout a vést	nechat se hýčkat druhými, mají mě rádi, jsem oblíbený, stmeluji	3 4 15
10.	TR transcendence (smysl života)	život má vyšší smysl, smrti vše nekončí, Bůh jako dobro a láska	život vznikla běží náhodou, smrt je konec, Bůh je lidský výmysl	17 27 29

Tricet položek bylo do dotazníku zařazeno v náhodném pořadí. Formátem odpovědí je šestibodová Likertova stupnice s možnostmi od „úplně nesouhlasí“ po „úplně souhlasí“. Výstupem z dotazníku je uspořádaný vektor deseti skóru, jeden skóre pro každou dimenzi, přičemž tento vektor je možno chápat jako osobnostní profil. Pro standardizaci dotazníku a zároveň pro možnost srovnání populace uživatelů v Přístavech s obecnou populací ČR jsme dotazník PISP připravili rovněž ve formě pro veřejnost, která byla k dispozici online a určena k vyplnění komukoli, především však všem zaměstnancům Armády spásy.

2.2 Metody pro výzkumné otázky

Ačkoli se jednalo o testování v zásadě pilotní, čili průzkumové, přesto nás už ve fázi koncipování dotazníku zajímaly některé výzkumné otázky (pracovní hypotézy):

O1. Projeví se v některých dimenzích významný rozdíl mezi lidmi z Přístavů a širší populací?

Odpověď poskytne standardní dvouvýběrový t-test na ověřování shodnosti středních hodnot u dvou nezávislých populací.

O2. Budou sledované dimenze mezi sebou relativně nezávislé, anebo se seskupí do určitých shluků? Jinými slovy, bude přirozené výsledné skóry interpretovat jako vícerozměrný profil, anebo je bude možné sčítat do podoby nadřazených indexů?

O3. Objeví-li se shluky, bude možné mezi nimi identifikovat nějaký shluk čili faktor vyššího řádu?

Odpověď na tyto dvě otázky je zcela v možnostech faktorové analýzy, kterou jsme následně použili ke zpracování dat. Pro naše výpočty v programovacím prostředí „Matlab“ jsme adaptovali explorační faktorovou analýzu s iteračním postupem a s pomocnou metodou hlavních komponent pro odhad parametrů. Rotaci výsledných faktorových zátěží jsme neprováděli, aby bylo možné snáze porovnat výstupy pro různé datové sady. Kritériem pro výsledný počet faktorů (tj. skrytých dimenzí vyššího řádu) byl počet příslušných vlastních čísel větších než jednička a zároveň alespoň 80% vysvětlené společné variability, tj. index podmíněnosti (i.p.) $\geq 0,80$.

3. Data a subjekty

Sběr dat proběhl ve všech čtyřech Přístavech Armády spásy na území ČR: Frýdek-Místek, Ostrava-Kunčičky, Ostrava-Zukalová a Šumperk, a sice v průběhu srpna až října 2020. Se sběrem dat od uživatelů pomáhali tři vyškolení tazatelé. Uživatelé se účastnili dobrovolně a za svou účast neobdrželi žádnou odměnu. Získaná data byla anonymizována. Z celkového počtu 179 uživatelů se podařilo získat kompletně vyplněný dotazník PISP od 118 z nich, což představuje míru návratnosti 66%.

Před statistickým zpracováním jsme se rozhodli tento soubor dále filtrovat. Cílem tohoto postupu bylo odstranit z dat málo věrohodné výpovědi (ačkoli uživatel sice nějaké odpovědi poskytl, tak máme podezření, že jsou jeho odpovědi zkreslené, např. že se nesoustředil, že otázky nepochopil, že neměl zájem o nich přemýšlet apod.). Jedná se o období *lie-score* (LS), tedy škály občas zařazované do osobnostních dotazníků na podchycení respondentů, kteří ať už záměrně či nezáměrně dodávají nestandardní odpovědi. Zde použitý LS-skóre se pohybuje v rozmezí 0 až 10, přičemž vyšší hodnoty svědčí o nevěrohodných údajích. Výše zmíněné filtrování dat pak spočívalo v tom, že do další analýzy vstupovaly pouze dotazníky s hodnotou LS-skóru nižší nebo rovnou pěti a tyto představovaly základní statistický soubor z Přístavů (N = 86). Filtrováním jsme tedy ztratili 32 (pravděpodobně nevěrohodných) statistických jednotek. Při použití téhož filtru u standardizačního souboru nebyl vyřazen nikdo.

Základní demografické charakteristiky dvou hlavních souborů, tj. sledované populace z Přístavů a standardizačního souboru, jsou uvedeny v tabulce 2, pro ilustraci doplněné o údaje za šumperský Přístav.

Tabulka 2. Základní demografické charakteristiky.

soubor	N	pohlaví		průměr	věk						
		muži	ženy		20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
stdizační	113	29	84	40,4	23	32	29	24	5	0	0
Přístavy	86	59	27	64,0	0	0	4	18	41	22	1
Šumperk	25	17	8	63,4	0	0	1	8	8	7	1

4. Výsledky

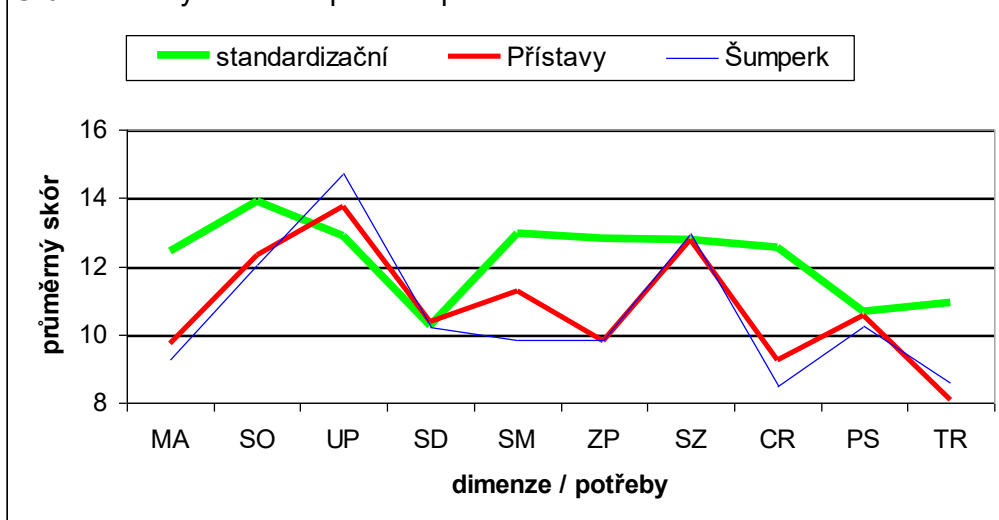
Základní popisné charakteristiky jednotlivých dimenzí z portfolia potřeb PISP spolu s výsledky t-testu jsou uvedeny v tabulce 3 a v grafu 1.

Tabulka 3. Charakteristiky dimenzí z portfolia potřeb a jejich statistická významnost.

soubor		MA míra aktivace	SO soběstač- nost	UP udržování pořádku	SD struktura dne	SM směrování	ZP zdroje pohody	SZ sociální zakotvení	CR centrum řízení	PS prospěch světu	TR transcen- dence
stdizační	Ø s.o.	12,4 2,7	13,9 2,6	12,9 3,6	10,3 2,6	13,0 2,0	12,8 2,2	12,8 2,2	12,6 2,4	10,7 1,9	10,9 4,6
Přístavy	Ø s.o.	*** 9,7 3,7	*** 12,3 3,7			*** 11,3 3,4	*** 9,8 2,5		*** 9,3 3,0		*** 10,6 5,1
Šumperk	Ø s.o.	9,3 3,8	12,0 3,1	14,7 2,9	10,2 3,7	9,8 2,9	9,8 3,0	13,0 3,0	8,5 2,9	10,2 3,0	8,6 4,7

Pozn.: Ø průměr, s.o. směrodatná odchylka; hvězdičky označují statisticky významnou odchylku od průměru z předchozího řádku (* na hladině 0,05, ** na hladině 0,01, *** na hladině 0,001).

Graf 1. Profily dimenzí z portfolia potřeb.



4.1 Rozdíly v průměrné úrovni dimenzí

Průměrné hodnoty dimenzí ze standardizačního souboru nám mohou posloužit jako vhodná základní nivelizační laťka, se kterou pak můžeme porovnávat hodnoty z Přístavů. U některých dimenzí je průměr umístěn výše (kolem 13 až 14), u jiných níže (kolem 10 až 11). Tyto rozdíly nemají pro interpretaci žádný význam, jde vlastně jen o stanovení jakési arbitrární „nuly“ na pomyslné stupnici měřicího přístroje. Hodnoty nižší než průměr znamenají posun k zápornému pólu, vyšší než průměr ke kladnému pólu příslušné dimenze (Ohledně náplně jednotlivých dimenzí a jejich pólů viz tabulku 1.) Variabilita dimenzí vyjádřená směrodatnou odchylkou se pohybuje v rozmezí 2 až 3, pouze u transcendence (TR) je znatelně vyšší (4,6). Znamená to větší rozptýlenost odpovědí v této dimenzi směrem k oběma krajním pólům škály.

Průměrné hodnoty z Přístavů jsou oproti souboru standardizačnímu obecně na stejné nebo nižší úrovni (směrodatné odchylky se o něco zvýšily). Jedinou výjimkou je udržování pořádku (UP), kde se uživatelé Přístavů (možná překvapivě) jeví jako více tíhnoucí k pořádku než obecná populace. Možné vysvětlení by mohlo souviset s věkem, na stáří člověk totiž více ocení, najde-li věci na svých místech. Výrazně nižší průměrné hodnoty (statisticky významně na hladině 0,001) mají škály míra aktivace (MA), soběstačnost (SO), směřování (SM), zdroje pohody (ZP), centrum řízení (CR) a transcendence (TR).

Zastavme se na chvíli u těchto škál jednotlivě. Stručně řečeno, nižší míra aktivace (MA) zřejmě souvisí především s věkem, neboť se stářím stále markantněji narůstají problémy se sníženou pohyblivostí, se zhoršenými kognitivními schopnostmi (paměť, pozornost, komunikace) a pro člověka je pak příjemnější uzavírat se do svého vnitřního poklidného a bezpečného světa, kde na něj nejsou kladeny takové nároky. Navíc na stáří člověk již nepotřebuje být výdělečně činný, čímž odpadá spousta dříve nevyhnutelných aktivit. Nicméně je rovněž možné, že u nižší míry aktivace přetrvává nějaký rys osobnosti z dřívějšího života, tedy že daný člověk vždy preferoval klid a ústraní, že vykazoval samotářské sklony.

Zajímavý je nižší skóre u zdrojů pohody (ZP), který naznačuje, že lidé z Přístavů nejsou zvyklí hledat a nacházet rozptýlení, osvěžení a povzbuzení v drobných věcech každodenního života, ale spíše prožívají trvale určitý neklid a napětí, které pak jednou za čas potřebují vybit razantnějším způsobem. U zdravého životního stylu by to mohlo znamenat zajít si do posilovny nebo na hokejový zápas, avšak do tohoto pólu spadají také různé nezdravé vzorce, jako alkoholové excesy či nákupní horečky. Posun k zápornému pólu u centra řízení (CR) znamená sníženou sebedůvěru v tom smyslu, že člověk neustále bojuje s okolním nepřátelským světem, přičemž spíše prohrává než vyhrává, nebo ho to alespoň stojí velké množství sil. Musí vymýšlet různé kličky a strategie, aby vůbec obstál, a přitom nebyl přistižen. Znamená to život v ohrožení. Nižší hodnota transcendence (TR) vypovídá o celkovém životním zaměření, že život a lidské snažení nemá žádný vyšší či hlubší přesah, že všechno běží jen nějakou setrvačností či náhodou a že smrtí člověka je nevyhnutně všemu konec. Možná že samy o sobě nemusejí být pozice v blízkosti těchto tří pólů nutně nijak nezdravé ani ohrožující, zvláště jsou-li vykompenzovány něčím příjemným a posilujícím v jiných oblastech, avšak jejich kumulace u jedné osoby již jistě ohrožení přinášet může.

Pokles pozorujeme ještě u dalších dvou dimenzí, ačkoli už ne tak markantní (přesto statisticky významný). Nižší soběstačnost (SO) je pochopitelná už jen s ohledem na cílovou skupinu, rovněž tak směřování (SM), kdy člověk na stáří, spolu s úbytkem sil, zdraví, společenských kontaktů i finančních prostředků přichází také o své plány a cíle. Nicméně toto je možné chápat i jako určitý plod životní moudrosti, kdy člověk nakonec zjišťuje, že vlastně o nic usilovat nepotřebuje a že je příjemné brát věci tak, jak přicházejí.

Údaje za šumperský Přístav musíme brát vzhledem k malému rozsahu výběru s rezervou, nicméně i ony vykazují tytéž tendence jako data pro Přístavy celkově. U žádné z dimenzí jsme nezjistili významný rozdíl v úrovni oproti souboru ze všech Přístavů.

4.2 Shluky dimenzí čili faktory

Posuny v průměrných úrovních však nezachycují zdaleka všechny souvislosti, které je možné z dotazníků PISP získat. Zajímavé informace přinášejí rovněž vztahy mezi dimenzemi, vyjádřené pomocí různě vztahovaných korelací. Přítomnost korelací mezi dimenzemi potřeb by nasvědčovala tomu, že tyto dimenze mají něco společného, že vlastně měří nějaké společné jádro, společný koncept. Naopak nekorelované dimenze představují samostatné směry v osobnosti, něco jako pravoúhlá souřadnicová soustava v geometrii. Obě varianty mají své příjemné stránky: ta první umožňuje hledat a koncipovat skryté dimenze vyšších řádů, čili obecnější faktory osobnosti (právě o toto se snaží metoda faktorové analýzy), ta druhá znamená existenci dále neslučitelných základních os, neredukovatelné „kostry“ osobnosti, na niž mohou být navěšeny další dílčí dimenze. Aniž bychom zabíhali do podrobností, poznamenejme pouze, že faktorová analýza hledá v datech hlubší strukturu právě pomocí vhodně maximalizovaných korelací, přičemž při jejich hledání jsou v rámci statistického modelu kladeny určité doplňující požadavky na rozložení variability do jednotlivých proměnných.

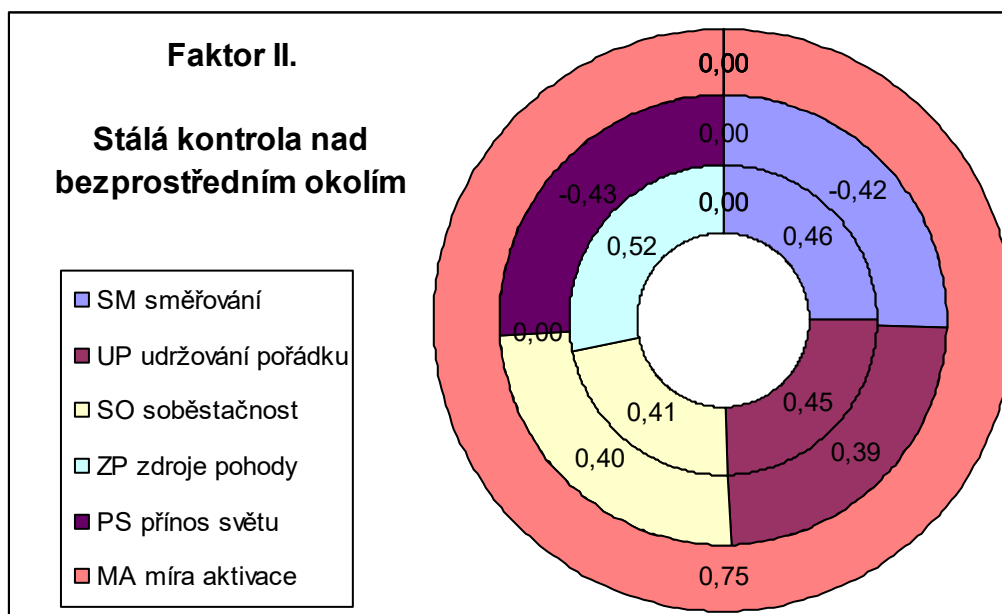
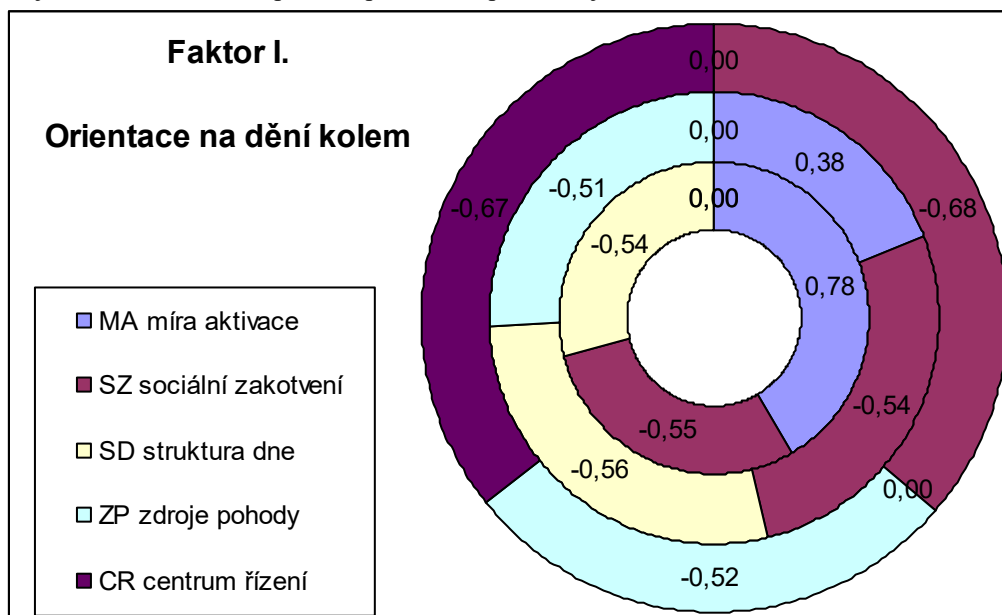
Jaké byly výsledky? Podívejme se nejprve na standardizační soubor z internetového dotazníku. Obyčejné korelace mezi deseti dimenzemi (sledovanými proměnnými) se pohybovaly v absolutní hodnotě v rozmezí 0,20 až 0,33, což hodnotíme jako korelace spíše mírné až nepodstatné, vzhledem k očekávané přítomnosti náhodného šumu, běžného u společenskovedních dat. Zřejmě není vyloučena ani jedna z možností, tj. že by dimenze mohly stát samostatně, anebo že by se mohly některé z nich seskupovat. Výstupy z faktorové analýzy uvádí tabulka 4 a graf 2. Údaje z tabulky je možno interpretovat následovně. První faktor je sycen, postupně od více k méně významným, dimenzemi míra aktivace (MA), sociální zakotvení (SZ) a struktura dne (SD), přičemž mírou významnosti jsou čísla uvedená pod nimi neboli faktorové zátěže (jsou to vlastně korelace mezi příslušnou dimenzí a prvním faktorem). Záporné znaménko udává nepřímý vztah mezi dimenzí a faktorem. Vidíme tedy, že první faktor je především určován mírou aktivace (přímo, tj. čím vyšší aktivace, tím vyšší faktor) a do menší míry sociálním zakotvením a strukturou dne (nepřímo). Otázka pro interpretaci zní, jaký společný koncept by mohly tyto tři proměnné pokrývat, přičemž je třeba uvážit i orientaci k plus nebo minus pólu (viz tabulku 1). Jako přijatelná se jeví interpretace tohoto **prvního faktoru** jako „orientace na dění kolem“ (činnost, komunikace, široká síť známostí, volná náplň dne, změny a překvapení).

Tabulka 4. Faktorová analýza pro data PISP.

soubor	index podmíněnosti	I. faktor orientace na dění kolem				II. faktor stálá kontrola nad okolím				III. faktor
stdizační	0,86	MA	SZ	SD	ZP	SM	UP	SO		
		0,78	-0,55	-0,54	0,52	0,46	0,45	0,41		
Přístavy	0,91	SD	SZ	ZP	MA	PS	SM	SO	UP	
		-0,56	-0,54	-0,51	0,38	-0,43	-0,42	0,40	0,39	
Šumperk	0,90	SZ	CŘ	SM	ZP	MA			TR	
		-0,68	-0,67	-0,58	-0,52	0,75			0,50	

Graf 2. Faktorová analýza pro data PISP – dva nejvýraznější faktory.

Legenda: vnitřní kruh – standardizační soubor, mezikruží – Přístavy celkově, vnější kruh – Přístav Šumperk. Vepsaná čísla představují faktorové zátěže.



Obdobně postupujeme u **druhého faktoru**. Zde vystupují zhruba ve stejné míře a se stejným znaménkem čtyři dimenze: zdroje pohody (ZP), směřování (SM), udržování pořádku (UP) a soběstačnost (SO). Snad by se daly shrnout pod hlavičku „**stálá kontrola nad bezprostředním okolím**“. Třetí významný faktor již nalezen nebyl.

Nyní k výsledkům pro data z Přístavů. Na první pohled je patrné, že výstupy jsou o něco roztráštěnější (více dimenzí pod jedním faktorem, menší zátěže) a svou strukturou se od standardizačních dat liší. Odlišnost jsme sice očekávali, jde však o to, zda se podaří ji nějak smysluplně vysvětlit. První faktor má společné proměnné míru aktivace (MA), sociální zakotvení (SZ) a strukturu dne (SD), s těmiž znaménky, čili je poměrně dobře patrné, že se jedná o tentýž faktor, který jsme výše označili jako „orientaci na dění kolem“. Pouze míra aktivace je zde méně výrazná a navíc se připojila dimenze zdroje pohody (ZP), ve směru

vnějších zdrojů úlevy, což odpovídá orientaci na vnější dění. Druhý faktor má společné směřování (SM, s opačným znaménkem), soběstačnost (SO) a udržování pořádku (UP), navíc se připojuje přínos světu a druhým (PS). Totožnost tohoto faktoru s výše identifikovaným „stálá kontrola nad bezprostředním okolím“ není zcela jasná, neboť kromě zájmu o bezprostřední okolí (kladné UP, SO) se zde rovněž projevuje zaměření na sebe a na přítomnost (záporné SM, PS). Pro dosažení dostatečně vysokého indexu podmíněnosti byl připojen ještě třetí faktor, který však obsahuje jedinou významnou dimenzi soběstačnost (SO). Ta se projevila už ve faktoru předchozím, nicméně se zdá, že je pro tento soubor proměnnou důležitou, proto se nyní objevuje ještě samostatně.

Údaje pro Šumperk jsou uvedeny spíše jen pro ilustraci, neboť soubor neobsahuje dostatečné množství respondentů. Je vidět, že výše nalezená struktura se dále tříští a dimenze se přeskupují, to je však nutným výsledkem narůstajícího šumu v malých datech.

Shrneme-li tuto část výzkumu, podařilo se nám u souboru běžné populace identifikovat dva faktory (skryté dimenze vyššího řádu), které jsme pracovníčně nazvali jako *orientaci na dění kolem*, primárně sycenou mírou aktivace (MA), a *stálou kontrolou nad bezprostředním okolím*, sycenou zhruba ve stejné míře několika dimenzemi. První z těchto faktorů je docela dobře pozorovatelný rovněž u populace uživatelů Přístavů. Druhý z nich je méně výrazný a je patrně poněkud posunutý, směrem k většímu zaměření na vlastní osobu a přítomný okamžik.

Na závěr ještě dodejme, že interpretace výstupů z faktorové analýzy obecně nebývá jednoduchá a vyžaduje značný vhled do zkoumané problematiky. Ve snaze dosáhnout lepšího vysvětlení výsledků se někdy používá tzv. rotace faktorových zátěží, která však do celého postupu vnáší mnohem větší míru subjektivity a nejednoznačnosti.

6. Diskuze a výhledy

Na tomto místě bychom rádi poznamenali, že dotazník PISP představuje metodologicky poměrně sofistikovaný nástroj našeho výzkumu, sestavený podle dobrých psychometrických zásad (srv. Furr, 2008; Kaplan & Sacuzzo, 1993; Rust & Golombok, 2009). O žádném jiném psychologickém testu, který by se zaměřoval na tuto část struktury osobnosti a na tuto skupinu respondentů, v současné době nevíme, ani v republikovém, ani v celosvětovém měřítku. Z tohoto hlediska můžeme PISP považovat za zcela původní přínos této studie.

Naše další výzkumné úsilí bychom rádi zaměřili na provedení konstruktové a diskriminační validace porovnáním s některými vybranými psychologickými testy, například se *Škálou duševní pohody* (Ryff, 1995) či s *Krátkou škálou resilience* (Brief Resilience Scale, Smith et al., 2008, 2010; Sanchez et al., 2021), na rozšíření standardizačního souboru a na administraci dotazníku u dalších respondentských skupin.

Odkazy

- [1] BALCAR, K. 1991. *Úvod do studia psychologie osobnosti*. Chrudim: Mach.
- [2] CATTELL, R. B. 1946. *Description and measurement of personality*. Yonkers, NY: World Book.
- [3] CATTELL, R. B. 1950. *Personality: A Systematic, Theoretical, and Factual Study*. New York: McGraw-Hill.
- [4] CHURCHARD, A., RYDER, M., GREENHILL, A., et al. 2019. The Prevalence of Autistic Traits in a Homeless Population. *Autism*, 23(3), 665–676.
- [5] DRAPELA, V. J. 1997. *Přehled teorií osobnosti*. Praha: Portál.
- [6] FURR, R. M. 2008. *Psychometrics: An Introduction*. Sage Publications.

- [7] GUARNACCIA, V., HENDERSON, J. J. 1993. Self-Efficacy, Interpersonal Competence, and Social Desirability in Homeless People. *Journal of Community Psychology*, 21(4), 335–338.
- [8] HALL, C. S., LINZEY, G. 1978. *Theories of Personality* (3rd ed). New York: Wiley.
- [9] JONES, A., CRANDALL, R. 1986. Validation of a Short Index of Self-Actualization. *Personality and Social Psychology Bulletin*, 12(1), 63–73.
- [10] KAPLAN, R. M., SACCUZZO, D. P. 1993. *Psychological Testing*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.
- [11] LEVINSON, B. M. 1965. The Homeless Man. *Psychological Reports*, 17(2), 391–394.
- [12] MASLOW, A. H. 1967. Self-Actualization and Beyond. In J. F. T. Bugental (ed.), *Challenges of Humanistic Psychology*. New York: McGraw-Hill.
- [13] MASLOW, A. H. 1970. *Motivation and Personality*. New York: Harper & Row.
- [14] MASSEY, R. F. 1981. *Personality Theories: Comparisons and Syntheses*. New York: Van Nostrand.
- [15] MCDONALD, R. P. 1991. *Faktorová analýza a příbuzné metody v psychologii*. Praha: Academia.
- [16] RUST, J., GOLOMBOK, S. 2009. *Modern Psychometrics: The Science of Psychological Assessment*. London & New York: Routledge.
- [17] RYFF, C. D., KEYES, C. L. 1995. The Structure of Psychological Well-Being Revisited. *Journal of Personality and Social Psychology*, 69(4), 719–727.
- [18] SALAVERA, C., TRICAS, J. M., LUCHA, O. 2013. Personality Disorders and Treatment Dropout in the Homeless. *Neuropsychiatric Disease and Treatment*, 9, 379–387.
- [19] SANCHEZ, J., ESTRADA-HERNANDEZ, N., BOOTH, J., et al. 2021. Factor Structure, Internal Reliability, and Construct Validity of the Brief Resilience Scale (BRS): A Study on Persons with Serious Mental Illness Living in the Community. *Psychology and Psychotherapy: Theory, Research and Practice*. Advance online publication <https://doi.org/10.1111/papt.12336>.
- [20] SCHNITTGER, R. I. B., WALSH, C. D., CASEY, A. M., et al. 2012. Psychological Distress as a Key Component of Psychosocial Functioning in Community-Dwelling Older People. *Aging and Mental Health*, 16(2), 199–207.
- [21] SMITH, B. W., DALEN, J., WIGGINS, K., et al. 2008. The Brief Resilience Scale: Assessing the Ability to Bounce Back. *International Journal of Behavioral Medicine*, 15(3), 194–200.
- [22] SMITH, B. W., TOOLEY, E. M., CHRISTOPHER, P. J. et al. 2010. Resilience as the Ability to Bounce Back from Stress: A Neglected Personal Resource? *The Journal of Positive Psychology*, 5(3), 166–176.
- [23] SUMERLIN, J. R. 1995. Adaptation to Homelessness: Self-Actualization, Loneliness, and Depression in Street Homeless Men. *Psychological Reports*.
- [24] SUMERLIN, J. R., NORMAN, R. L. 1992. Self-Actualization and Homeless Men – A Known-Groups examination of Maslow Hierarchy of Needs. *Journal of Social Behavior and Personality*, 7(3), 469–481.

MATHS SUPPORT CENTRE PŘI UNIVERZITĚ TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ

PÁTÍKOVÁ Zuzana, SEDLÁČEK Lubomír

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, Ústav matematiky,
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
patikova@utb.cz

Abstrakt: Cílem příspěvku je sdílet zkušenost se vznikem a provozem podpůrného centra pro výuku matematiky (Maths Support Centre) na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně. Support centrum nabízí studentům univerzity možnost konzultací matematických témat mimo rozvrhovanou výuku v bezpečném prostředí. S dlouhodobým působením support centra jsou svázané také různé provozní a organizační aspekty. Popisem jejich konkrétního stavu v našem support centru se zabýváme v tomto článku.

Klíčová slova: výuka matematiky, support centrum, konzultace matematiky

1 Úvod

Vzhledem k tomu, že matematika je základem a klíčovým nástrojem ve všech technických oborech, je pro úspěšné studium na vysokých školách technického typu nezbytné, aby studenti měli v této zásadní vědní disciplíně znalosti a dovednosti na dostatečně vysoké úrovni. Bez nich mají většinou velké potíže s porozuměním pokročilejším matematickým konceptům a jejich aplikací v těchto oborech, což bývá velmi často spojeno s předčasným ukončením studia. Z tohoto důvodu jsme se na naší univerzitě rozhodli poskytnout studentům pomoc a posílit podporu právě při zvládnutí matematických předmětů. Vybudovali jsme podpůrné centrum pro podporu výuky matematiky (Maths Support Centre, MSC), které si klade za cíl poskytovat studentům individuální a efektivní pomoc při zvládnutí matematického učiva.

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně má šest fakult, matematické předměty se učí na čtyřech z nich a jejich výuku zajišťují akademičtí pracovníci Ústavu matematiky, který je organizačně zařazen pod Fakultu aplikované informatiky. Vyučujeme většinou studenty prvních ročníků technicky a ekonomicky zaměřených oborů. Na univerzitě nemáme odborné matematické studijní programy ani programy s učitelstvím matematiky. Naše Maths Support Centrum vzniklo na počátku akademického roku 2016/17. K jeho vzniku vedla identifikace potřeby, zajištění personálního zabezpečení a podmínek provozu, a to na základě koncepce support center, se kterou jsme se seznámili v zahraničí [1, 2]. Níže popíšeme naši potřebu vzniku MSC a dosavadní zkušenosti s provozem tohoto support centra.

2 Proč potřebujeme MSC?

V posledních desetiletích lze konstatovat, že úroveň matematických znalostí a schopností u studentů přicházejících do prvních ročníků vysokých škol se postupně snižuje. Pozorovány jsou vážné nedostatky nových studentů v technických matematických dovednostech, jako jsou plynulé algebraické i numerické výpočty, značný pokles schopnosti zpracovat problém, který vyžaduje více než jednořádkové řešení a změněný posun vnímání toho, co matematika je a co nabízí. Vzhledem k tomu, že matematické základy, zvládnutí některých matematických technik i schopnost samostatně logicky myslet, jsou potřeba v mnoha dalších navazujících předmětech a odpovídají profilu absolventa technicky zaměřené vysoké školy, je potřeba tento stav reflektovat a reagovat na něj. Tento stav je zrcadlen v celé České republice, ale je podstatně znatelnější na menších univerzitách lokálního charakteru. Nastupující studenti přicházejí z různých druhů škol s různou dotací matematiky. Navíc trendem posledních let je v České republice fakt, že státní maturitu z matematiky volí stále méně zájemců (17 % v roce 2022) a studenti tak přicházejí do hodin matematiky v prvním ročníku VŠ po dlouhé pauze bez procvičování a upevňování. Cílem našeho MSC je umožnit studentům, kteří mají zájem, dorovnat úroveň znalostí na potřebnou úroveň a také poskytnout prostor studentům, kteří k pochopení matematického učiva potřebují více času a práce pod vedením.

Zdaleka ne všichni studenti, kteří by mohli využít služeb MSC z důvodu nízkých znalostí, tak nakonec činí. Je to možná také proto, že nezanedbatelná část studentů jde na vysokou školu jen na zkoušku, aniž jsou sami motivováni k úsilí, které s sebou studium přináší. Tento stav je umožněn i tím, že na mnoha našich oborech lze ke studiu nastoupit bez přijímacích zkoušek, a na školu se tak dostanou i ti, kdo pro toto studium nemají předpoklady. Těžko říci, zda je nízká motivace k dalšímu vzdělávání ovlivněná hlavně společenským nastavením na rychlý zisk co nejjednodušší cestou, nepotřebností vysokoškolského titulu v oborech s nedostatkem zaměstnanců, a tudíž možností vydělávat dostatek peněz bez této podmínky, nebo jinými důvody. My zde chceme být podporou pro ty, kdo o ni stojí. A také pro ty, kteří nemají s matematikou problém, ale chtějí se o ní dozvědět více. Naštěstí i takoví studenti jsou.

3 Personální zajištění MSC

Myšlenka vzniku a provozování support centra byla od počátku kladně přijata většinou pedagogických pracovníků ústavu matematiky na UTB ve Zlíně. V průběhu let s námi spolupracovalo také několik studentů (všech úrovní). Tyto aktivity byly ale většinou krátkodobé z důvodu dalších pracovních povinností studentů. Zapojení pedagogičtí pracovníci mají k této práci své důvody – většinou převládá touha pomoci studentům a podpořit je tak v jejich snaze o pochopení některých témat a úspěšně tak zvládnout studium nelehkého předmětu, jako je matematika. Vyučující také využívají centrum k nadstandardní možnosti konzultací se svými studijními skupinami, a tím tedy další možnost seberealizace v pracovním procesu. Finanční hledisko zde nehraje roli. Spíše záleží na časových možnostech jednotlivých pracovníků v daném období. Kritickým místem personálního zajištění u nás je osoba manažera support centra. Tato role aktuálně leží na jediné osobě bez výhledu na možnost prostřídání nebo předání zodpovědnosti dál. Zapojení tutoři jsou tím nejdůležitějším, co dělá support centrum úspěšným, ale bez promyšlené koordinace se efektivita pomoci zbytečně snižuje. Naším aktuálním úkolem je nadchnout a zapojit nové spolupracovníky, a také zajistit nahraditelnost manažersko-koordináční pozice.

4 Podpora institucionálního vedení

Support centrum u nás nevzniklo nařízením „shora“, ale na základě podnětu z řad pedagogů, a vedením fakulty byla tato myšlenka od počátku velmi podporována. Materiální a finanční podpora byla závislá na aktuálních možnostech vedení fakulty. Podařilo se nám dohodnout základní podmínky ohodnocení tutorů a také získat důstojný prostor pro konzultace. Pod pojmem support centrum si také lze představit speciálně upravenou a vybavenou učebnu vyčleněnou pouze pro toto využití. Tutoři z řad pedagogických pracovníků dostávají za služby symbolické odměny navíc, v systému hodnocení pracovníků se jim služby pro MSC také započítávají do pedagogického úvazku. Studenti tutoři dostávají stipendium, které je sice nižší než běžná odměna za brigádní práci jinde, ale zatím jsme nenarazili na to, že by nízká odměna byla důvodem k ukončení spolupráce. Se support centrem je počítáno při realizaci různých typů projektů na snižování studijní neúspěšnosti. Díky takovým příležitostem jsme měli možnost vytvořit materiály pro studenty (aktivita fakulty) a také nakoupit licence hry Variant Limits, kterou jsme pod hlavičkou MSC mohli nabízet (aktivita rektorátu). Centrum zatím zůstává pod fakultou, i když slouží všem studentům univerzity. Jedním z možných dalších kroků je přesunutí organizační jednotky pod rektorát, ale zatím v tomto kroku nespatřujeme výhody, které by převážily aktuální stabilní stav.

5 Forma podpory výuky, lokace a vybavení

Volba formy podpory výuky matematiky byla od počátku inspirovaná drop in centry v Norsku a Anglii. Proto prvním nápadem bylo vytvořit jednu konzultační místnost vybavenou literaturou, vhodným nábytkem, tabulí a PC a zde provozovat prezenční konzultační služby. Pro tyto potřeby se nám podařilo získat místnost, která nebyla využívána pro běžnou výuku z důvodu malé kapacity. Umístění místnosti je docela vhodné pro studenty studující v budově fakulty, nachází se v hlavním foyer na dohled od vstupu do budovy. Na druhou stranu poloha naší budovy stranou od ostatních budov univerzity ve Zlíně může být mírnou nevýhodou pro studenty ostatních fakult.

V této místnosti konzultace probíhaly výhradně až do doby „covidové“. Během tohoto období jsme rozšířili naše služby také do online prostředí ve formě konzultací přes MS Teams za využití grafických tabletů. Aktuálně nabízíme obě možnosti podpory studentů: konzultace prezenční v místnosti MSC či jiné a konzultace online přes Teams. Nově rozšiřujeme prezenční konzultace také do dalších budov univerzity, abychom možnost jejich využití přiblížili jak studentům jiných fakult, tak pedagogům našeho ústavu, kteří zde zajišťují výuku. Výzvou do dalších období je navázat spolupráci s dalšími fakultami univerzity a rozšířit službu support centra i do jejich lokací. Slibujeme si od toho více studentů využívajících našich služeb.

O online konzultace mají zájem zejména studenti kombinovaného studia, využíváme ji také se studenty Fakulty logistiky a krizového řízení, která sídlí mimo Zlín, v Uherském Hradišti. Online forma je také hojně využívána studenty relevantních fakult při opakování hlavních témat ve větších skupinách na začátku zkuškového období. S těmito akcemi máme velmi dobré zkušenosti, propagujeme je přes proděkany pro výuku na jednotlivých fakultách.

6 Propagace a udržitelnost

Proto, aby support centrum mělo smysl a jeho služby mohli využívat studenti, kteří je potřebují, je nutné naše služby propagovat. Od počátku provozu máme webovou stránku [3], na které je

zveřejněn aktuální rozvrh, ale také materiály a různé odkazy pro podporu výuky. Máme založen facebookový účet, který však není příliš aktivní. Hlavní propagace probíhá v úvodních hodinách matematiky našimi vyučujícími. Studenti dostanou letáček s detailními informacemi o MSC a odkazem na webovou stránku. S grafickou formou letáčku nám ochotně pomohli univerzitní grafici.

Rezervy stále vidíme ve zvýšení informovanosti o existenci a funkci MSC v řadách nematematických pedagogických pracovníků. V případě jejich informovanosti mohou právě oni doporučit studentům konzultaci, upozorují-li jejich nedostatky v matematice.

Velkou nevýhodu spatřujeme v nutnosti každý rok centrum znovu a znovu propagovat, protože studenti nás nejvíce potřebují právě v prvním ročníku studia. Na počátku každého akademického roku se snažíme dát o sobě vědět, a to formou oznámení na sociálních sítích blízkých organizačních jednotek, umístěním oznámení do univerzitního televizního systému, zvyšováním povědomí o nás kontaktem se zástupci studentské unie. Dále vidíme velký prostor k rozšíření propagace a zviditelnění centra již ve fázi, kdy si studenti vybírají zaměření studia. Obava právě z matematiky je u studentů velmi častá, a informace o tom, že zde bude někdo, na koho se budu moci v případě nesnázi při studiu matematiky obrátit, jim může přinést v této oblasti uklidnění.

Pro lepší udržitelnost centra je potřeba pracovat průběžně na personálním zajištění tutorů i na podpoře vedení. Výzvou pro nás je přilákat spolupracující studenty tutorů, kteří by s námi pracovali delší dobu. O návštěvách v MSC vedeme základní statistiku, na jejím základě provádíme vyhodnocení počtu studentů a také počtu odučených hodin jednotlivými tutorů. Zprávu pololetně rozesíláme vedení ústavu a vedení fakulty.

7 Spolupráce s dalšími podpůrnými centry

Support centrum jistě může existovat i zcela samostatně bez kontaktů s dalšími centry. Pro MSC ve Zlíně je však kontakt s ostatními podobně naladěnými lidmi a institucionálními jednotkami velmi důležitý a přínosný. Pomáhá překlenout náročnější období, dodává motivaci a inspiraci pro další práci. Sdílení zkušeností napříč institucemi pomáhá lepší funkčnosti a produktivitě center. Proto úzce spolupracujeme a sdílíme naše úspěchy i neúspěchy s dalšími support centry, kterým chceme za tuto podporu a spolupráci touto cestou poděkovat.

Každé centrum je postaveno na lidech a jejich pracovních i osobních kvalitách, a sdružení těchto nadšenců do většího celku přináší benefity z kontaktů s podobně zaměřenými lidmi. Spolupráce na školeních nebo projektech má téměř přímý dopad na studenty, se kterými se v centrech pracuje. Navíc to vše přispívá k profesnímu rozvoji zapojených tutorů z řad pedagogů i studentů. Ve Velké Británii, domovské zemi support center, existuje jejich aktivní síť pod názvem Sigma Network [4]. Přestože Sigma Network vznikala za jiných podmínek, než jsou aktuálně v České republice, přesto by obdobné definování rámce spolupráce support center u nás mohlo vést k produktivní spolupráci a také ke stabilizaci podpory výuky matematiky na vysokých školách.

Závěr

Celkově lze konstatovat, že support centra pro podporu výuky matematiky jsou velmi užitečným nástrojem, který přispívá k efektivnímu vzdělávání studentů. Pokud se studenti setkávají s obtížemi v matematice, mohou se obrátit na příslušné support centrum, kde získají pomoc od zkušených lektorů. Tato pomoc jim umožní překonat obtíže a zlepšit výsledky v nejen matematických předmětech. V dnešní době, kdy úroveň matematických dovedností a znalostí studentů vstupujících na vysoké školy klesá, jsou support centra pro podporu výuky matematiky stále důležitější.

Zabezpečují kvalitní vzdělávání studentů a pomáhají jim připravit se na náročnou vysokoškolskou výuku. Doufejme, že se bude tato služba dále rozvíjet, a že ji bude moci využívat co nejvíce studentů, protože naší hlavní motivací je pomoci studentům, aby mohli s jistotou a úspěchem absolvovat matematické předměty, a tím získat důležité vědomosti a dovednosti pro svůj další akademický i profesní růst.

Odkazy

- [1] PÁTÍKOVÁ, Zuzana. 2016. Podpůrná centra pro výuku matematiky na vysokých školách. Lávička, Miroslav. *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2016*. Plzeň: Vydavatelský servis, s. 97-100. ISBN 978-80-86843-52-0.
- [2] PELL, G., CROFT, T. 2008. Mathematics support—support for all? *Teaching mathematics and its applications*, 27, 167-173. Preprint: Loughborough University. Journal contribution. <https://hdl.handle.net/2134/906>.
- [3] Maths Support Centre, Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, URL: <https://fai.utb.cz/msc>.
- [4] Sigma Network for excellence in mathematics and statistics support, URL: <https://www.sigma-network.ac.uk>.

ÚVOD DO NEPARAMETRICKÉ PREDIKTIVNÍ INFERENCE

PŘIBYLOVÁ Lenka

Katedra aplikované matematiky,
Fakulta elektrotechniky a informatiky,
VŠB Technická Univerzita Ostrava,
Tř. 17. listopadu 15, Ostrava-Poruba
email: lenka.pribylova@vsb.cz

Abstrakt: Neparametrická prediktivní inference je moderní metoda, která ke klasickým úlohám ve statistice přistupuje zcela nestandardním způsobem. Velkou výhodou neparametrické prediktivní inference je použitelnost pro data malého rozsahu. Při použití této metody není třeba předpokládat žádný vstupní tvar rozdělení, jako tomu bývá u klasických přístupů.

Klíčová slova: neparametrická prediktivní inference, horní, dolní pravděpodobnost, anastomóza

1 Neparametrická prediktivní inference

Neparametrická prediktivní inference (Nonparametric predictive inference, NPI) je moderní metoda, která ke klasickým úlohám ve statistice přistupuje zcela nestandardním způsobem. Neparametrická prediktivní inference indikuje vlastnosti následujícího pozorování x_{n+1} vstupujícího do studie na základě předchozích n pozorování x_1, \dots, x_n . NPI přístup nahrazuje testování hypotéz u standardních metod.

Neparametrická prediktivní inference má široké pole působnosti. Může suplovat testování hypotéz při srovnávání kvantilů dvou skupin, lze jej použít při odhadech parametrů binomického rozdělení a také při srovnání doby přežití pro různé léčebné skupiny. Tento přístup je vhodný převážně v případech, kdy má datový soubor malý rozsah.

Koncepci neparametrické prediktivní inference [1] představil v roce 1993 prof. Frank Coolen, který nyní působí na Durhamské univerzitě.

1.1 Teoretický základ NPI

Teoretický základ neparametrické prediktivní indukce je postaven na několika pojmech, které jsou definovány za základě standardních pojmů z axiomatické teorie pravděpodobnosti.

Definice 1. Necht (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor. Funkci P na \mathcal{A} splňující Kolmogorovy axiomy

$$(A1) \quad P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{A}$$

$$(A2) \quad P(\Omega) = 1,$$

$$(A3) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \text{ pro množiny } A_i \in \mathcal{A} \text{ po dvou disjunktní,}$$

nazýváme *pravděpodobnost*. Struktura (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá *pravděpodobnostní prostor*.

V definici 1 jsme zopakovali definici standardně chápané pravděpodobnosti zavedené axiomatickým způsobem, kterou v tomto kontextu budeme nazývat *klasická pravděpodobnost*. V následující definici uvedeme zcela odlišný přístup k zavedení pojmu pravděpodobnost. Této pravděpodobnosti se někdy říká *intervalová pravděpodobnost*, protože každému náhodnému jevu nepřisuzuje pouze jednu hodnotu pravděpodobnosti, ale interval možných pravděpodobností.

Definice 2. Necht (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor. Necht \mathcal{K} označuje množinu pravděpodobností na (Ω, \mathcal{A}) . Funkce F na \mathcal{A} se nazývá *F-pravděpodobnost se strukturou \mathcal{M}* , jestliže pro libovolné $A \in \mathcal{A}$ platí

1. $F(A) = [L(A), U(A)]$, kde $0 \leq L(A) \leq U(A) \leq 1$,
2. $\mathcal{M} = \{P \in \mathcal{K} \mid L(A) \leq P(A) \leq U(A)\} \neq \emptyset$,
3. $\inf_{P \in \mathcal{M}} P(A) = L(A)$, $\sup_{P \in \mathcal{M}} P(A) = U(A)$.

Funkce L se nazývá *dolní pravděpodobnost (lower probability)*, funkce U se nazývá *horní pravděpodobnost (upper probability)*. Struktura (Ω, \mathcal{A}, L) se nazývá *F-pravděpodobnostní pole*.

Pozn. F -pravděpodobnost bývá také nazývána *prediktivní intervalová pravděpodobnost*, neboť každému náhodnému jevu A přiřazuje interval $[L(A), U(A)]$. Rozdíl $U(A) - L(A)$, tedy délka tohoto intervalu, je označován jako *neurčitost (nejistota)*. F -pravděpodobnost je označována za *imprecise probability*, v kontrastu k *precise probability*¹.

F -pravděpodobnost je zobecněním standardně zavedené pravděpodobnosti, ale F -pravděpodobnost již nesplňuje Kolmogorovy axiomy (není splněna σ -aditivita). Kolmogorovská pravděpodobnost je speciálním případem F -pravděpodobnosti pro $L=U$. F -pravděpodobnost v tomto případě přiřazuje náhodnému jevu $A \in \mathcal{A}$ jediné číslo, klasická pravděpodobnost $P(A)$, které je degenerovaným případem intervalu $[L(A), U(A)]$.

F -pravděpodobnost má řadu vlastností, z nichž uvedeme pro ilustraci následující:

1. Pro libovolnou F -pravděpodobnost a libovolný jev A jsou L a U konjugované, tj. pro každé $A \in \mathcal{A}$ platí $L(A) = 1 - U(A^c)$, kde A^c je komplement jevu A . Konjugovanost zajišťuje, že F -pravděpodobnost je jednoznačně dána jednou z funkcí L, U .
2. Funkce L je superaditivní a funkce U je subaditivní, tj. pro libovolné disjunktní jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

$$L(A) + L(B) \leq L(A \cup B),$$

$$U(A \cup B) \leq U(A) + U(B).$$

¹Teorii F -pravděpodobnosti se zabývá společnost *The society for Imprecise probability*

3. Necht (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor, necht \mathcal{M}_0 označuje neprázdnou množinu klasických pravděpodobností na (Ω, \mathcal{A}) . Pak $F_0 = [L_0, U_0]$, kde

$$L_0(A) = \inf_{P \in \mathcal{M}_0} P(A), \quad U_0(A) = \sup_{P \in \mathcal{M}_0} P(A),$$

je F -pravděpodobnost, přičemž platí, že $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$.

Pozn. V dalším textu bude použito následující značení pro dolní a horní pravděpodobnost. Dolní pravděpodobnost budeme označovat symbolem \underline{P} , horní pravděpodobnost symbolem \overline{P} .

1.2 Hillův předpoklad $A(n)$

Předpokládejme, že je dáno n ($n \in \mathbb{N}$) pozorování x_1, x_2, \dots, x_n , kde $x_i \in \mathbb{R}$ a $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty$. Termínem *Hillův předpoklad $A(n)$* je označován vstupní předpoklad studie, viz [3]: schopnost predikovat pravděpodobnosti výskytu následujícího pozorování x_{n+1} na základě výskytu n předchozích pozorování x_1, x_2, \dots, x_n vztahem

$$\begin{aligned} P(0 < X_{n+1} < x_1) &= P(x_i < X_{n+1} < x_{i+1}) = P(x_n < X_{n+1} < \infty) = \\ &= \frac{1}{n+1}, \text{ kde } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Necht \mathcal{B} je Borelovské σ -pole nad \mathbb{R} , necht $B \in \mathcal{B}$. Dolní a horní pravděpodobnost jevu $X_{n+1} \in B$ jsou dány po řadě vztahy ($|A|$ označuje počet prvků množiny A)

$$\underline{P}(X_{n+1} \in B) = \frac{1}{n+1} |\{j : I_j \subset B\}|,$$

$$\overline{P}(X_{n+1} \in B) = \frac{1}{n+1} |\{j : I_j \cap (a, b) \neq \emptyset\}|.$$

Pozn. Elementárními prostředky klasické teorie pravděpodobnosti nelze obecně určit přesnou (*precise*) pravděpodobnost jevu $X_{n+1} \in B$, pokud není množina B přímo rovna sjednocení intervalů (x_i, x_{i+1}) . Užitím klasické teorie pravděpodobnosti lze pouze odhadnout, v jakých mezích se bude hodnota pravděpodobnosti jevu $X_{n+1} \in B$ pohybovat. Hodnoty těchto mezí jsou právě hodnoty dolní a horní pravděpodobnosti pro jev $X_{n+1} \in B$.

1.3 Zavedení M-funkce

M-funkcí (mass function) náhodné veličiny X na intervale (a, b) rozumíme množinovou funkci M_X , jejíž předpis je dán vztahem

$$M_X(a, b) = P(a < X < b).$$

Jedná se tedy o množinovou funkci, jejímž argumentem je interval (a, b) a výstupní hodnotou pravděpodobnost jevu $X \in (a, b)$.

Jelikož v tomto pojetí obecně nemusí být splněny Kolmogorovy axiomy, platí vztahy, které v klasické teorii pravděpodobnosti neplatí. Např. součet pravděpodobností přes všechny množiny, které nemusí být disjunktní, je rovna 1.

Vlastnosti M funkce:

1. $\forall(a, b) : M_X(a, b) \in [0, 1]$,
2. $\sum_{\forall(a,b)} M_X(a, b) = 1$.

Mějme dáno n pozorování x_1, \dots, x_n , $0 < x_1 < \dots < x_n < \infty$, splňujících Hillův předpoklad. Zabýváme se prediktivní pravděpodobností pro náhodnou veličinu X_{n+1} , jejíž realizací je následující pozorování x_{n+1} , které chceme odhadnout na základě předchozích n pozorování. Na základě Hillova předpokladu platí, že pravděpodobnost padnutí následujícího pozorování x_{n+1} do libovolného z intervalů (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, \dots, n$ je konstantní a je rovna $\frac{1}{n+1}$, neboť n dělicích bodů rozdělí kladnou poloosu na $n+1$ intervalů a dle Hillova předpokladu mají všechny stejnou pravděpodobnost, že obsáhnou x_{n+1} . Tento předpoklad je poněkud překvapivý, neboť intervaly (x_i, x_{i+1}) mohou být obecně nestejně délky.

Výše uvedené lze pomocí M -funkce zapsat následujícím způsobem:

$$M_{X_{n+1}}(0, x_1) = M_{X_{n+1}}(x_i, x_{i+1}) = M_{X_{n+1}}(x_n, \infty) = \frac{1}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

2 Analýza přežití pomocí NPI

V této kapitole se budeme zabývat pouze situací pro necenzorovaná data. Popis situace pro cenzorovaná data a další podrobnější informace může čtenář nalézt v např. lit. [2], [6].

2.1 Dolní a horní funkce přežití pro necenzorovaná data

Definice 3. Necht T označuje dobu přežití, S funkci přežití. *Dolní funkce přežití* \underline{S} pro dobu přežití T je definována vztahem $\underline{S}(t) = \underline{P}(T > t)$ pro $t \geq 0$, *horní funkce přežití* \overline{S} vztahem $\overline{S}(t) = \overline{P}(T > t)$ pro $t \geq 0$.

Pozn. Dolní \underline{S} , resp. horní \overline{S} , funkce přežití pro dobu přežití X_{n+1} jsou dány pro $x \geq 0$ vztahy

$$\underline{S}(x) = \underline{P}(X_{n+1} > x), \quad \overline{S}(x) = \overline{P}(X_{n+1} > x).$$

Hodnoty K-M odhadu $\hat{S}_{X_{n+1}}$ funkce přežití v setříděných časech $0 < x_1 < \dots < x_n < \infty$ lze pro necenzorovaná data vyjádřit ve tvaru

$$\hat{S}_{X_{n+1}}(x_j) = \frac{n+1-j}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\hat{S}_{X_{n+1}}(x) = 1, \quad x < x_1, \quad \hat{S}_{X_{n+1}}(x) = 0, \quad x > x_n.$$

Dolní a horní funkce přežití pro necenzorovaná data, $j = 1, \dots, n-1$

$$\underline{S}_{X_{n+1}}(x) = \underline{P}(X_{n+1} > x) = \hat{S}_{X_{n+1}}(x_{j+1}) = \frac{n-j}{n+1}, \quad x \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$\overline{S}_{X_{n+1}}(x) = \overline{P}(X_{n+1} > x) = \hat{S}_{X_{n+1}}(x_j) = \frac{n+1-j}{n+1}, \quad x \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_{X_{n+1}}(x) &= 1, \quad x < x_1, \quad \bar{S}_{X_{n+1}}(x) = \frac{1}{n+1}, \quad x > x_n, \\ \underline{S}_{X_{n+1}}(x) &= \frac{n}{n+1}, \quad x < x_1, \quad \underline{S}_{X_{n+1}}(x) = 0, \quad x > x_n.\end{aligned}$$

Dolní a horní funkce přežití jsou po částech konstantní funkce. Jejich grafy proto mají schodový tvar, stejně jako grafy Kaplanových-Meierových křivek přežití. Pokud data nejsou cenzorována, tak graf horní funkce přežití splývá s Kaplanovou-Meierovou křivkou. Graf dolní funkce přežití v tomto případě vzniká pouze „posunutím“ grafu horní funkce přežití. Situace je jiná v případě cenzorovaných dat. Cenzorování rozšiřuje plochu mezi NPI křivkami. Graf dolní funkce přežití strměji klesá v případě cenzorovaných dat. Horní funkce přežití klesá jen v pozorovaném čase sledované události, dolní funkce přežití klesá v každém pozorovaném čase události, tj. v čase sledované události i v cenzorovaném čase. Na prvním intervalu, tj. na intervalu $[0, x_1)$, je horní funkce přežití rovna jedné a dolní funkce přežití rovna $\frac{n}{n+1}$. Na posledním intervalu, tj. na intervalu (x_n, ∞) , je horní funkce přežití rovna kladné konstantě a dolní funkce přežití rovna nule.

2.2 Porovnání doby přežití dvou skupin v případě necenzorovaných dat

V předchozí kapitole bylo popsáno, jak konstruovat grafy křivek dolních a horních funkcí přežití, které jsou obdobou Kaplan-Meierových křivek v klasickém pojetí analýzy přežití. V této kapitole uvedeme popis rozhodovacího pravidla, na základě jehož výsledku můžeme jednoznačně rozhodnout, zda se doby přežití X, Y , dvou skupin pacientů liší. Nejprve uveďme vztahy pro dolní a horní pravděpodobnost jevu: „doba přežití následujícího pacienta ze skupiny X je menší než doba přežití následujícího pacienta ze skupiny Y “.

Nechť $x_1, \dots, x_{n_x}, y_1, \dots, y_{n_y}$ představují dvě skupiny X, Y setříděných pozorovaných časů přežití. Označme n_x , resp. n_y , počet jedinců, u nichž nastala sledovaná událost ve skupině X , resp. Y . V případě necenzorovaných dat jsou dolní a horní pravděpodobnosti pro jev $X_{n+1} < Y_{n+1}$ dány následujícími vztahy

$$\begin{aligned}\underline{P}(X_{n_x+1} < Y_{n_y+1}) &= \frac{1}{(n_x + 1)(n_y + 1)} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \chi(x_i < y_j), \\ \bar{P}(X_{n_x+1} < Y_{n_y+1}) &= \frac{1}{(n_x + 1)(n_y + 1)} \left[\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \chi(x_i < y_j) + (n_x + n_y + 1) \right].\end{aligned}$$

Neurčitost je v tomto případě rovna

$$\bar{P}(X_{n+1} < Y_{n_y+1}) - \underline{P}(X_{n+1} < Y_{n_y+1}) = \frac{1}{n_x + 1} + \frac{1}{n_y + 1} = \frac{n_x + n_y + 1}{(n_x + 1)(n_y + 1)}. \quad (1)$$

NPI indikace rozdílu mezi dobou přežití u dvou skupin

V případě porovnávání dvou skupin pomocí NPI se používá k detekci rozdílu mezi dobou přežití dvou skupin X, Y jedno z následujících dvou rozhodovacích pravidel [2]:

1. (*Silná indikace*) platnost vztahu

$$\underline{P}(X_{n_x+1} < Y_{n_y+1}) > 0,5 \quad (2)$$

silně indikuje, že doba přežití Y je delší než doba přežití X .

2. (*Slabá indikace*) platnost vztahu

$$\underline{P}(X_{n_x+1} < Y_{n_y+1}) > \underline{P}(X_{n_x+1} \geq Y_{n_y+1}) \quad (3)$$

slabě indikuje, že doba přežití Y je delší než doba přežití X .

3 Aplikace NPI přístupu pro analýzu přežití v oblasti biomedicínských dat

Nejprve uvedme klasický přístup k analýze přežití pro reálná data. Data se týkala analýzy výskytu anastomotického leaku při operacích rekta. Studie byla realizována na chirurgickém oddělení Nemocnice Nový Jičín a.s. a čítala 200 pacientů. Data ve studii byla necenzorovaná.

3.1 Klasický přístup analýzy přežití modelující dobu do výskytu leaku

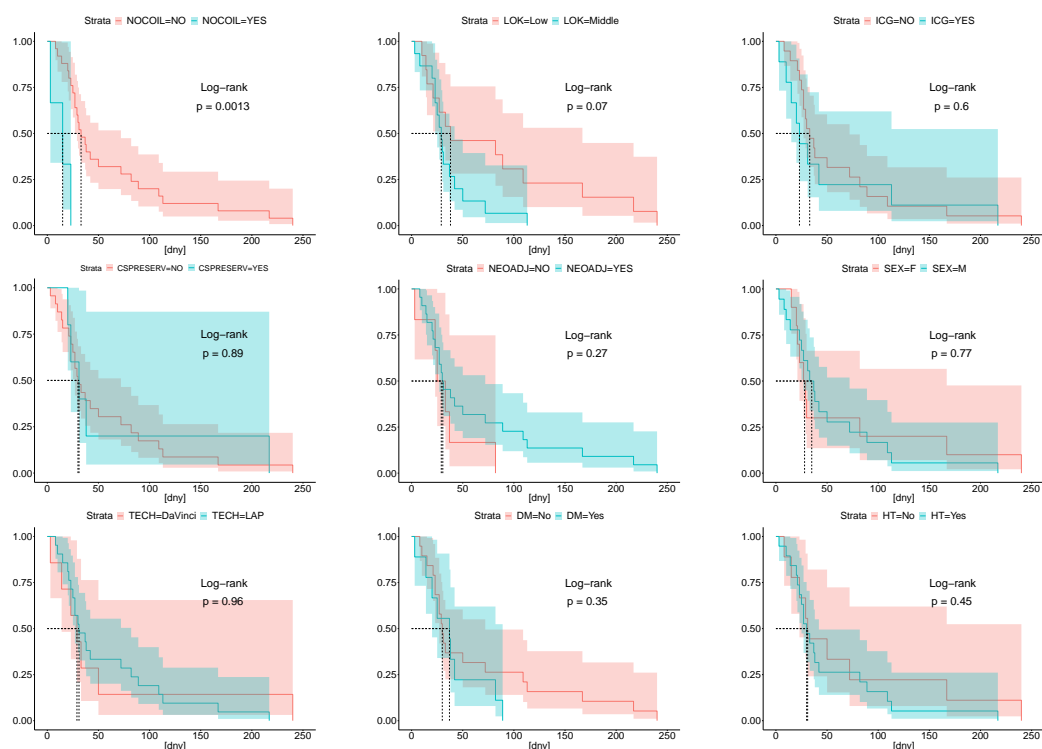
Analýza přežití se týkala kvalitativní proměnné s názvem TTLEAK popisující dobu do výskytu leaku (dny). Prvním krokem klasické analýzy přežití bývá konstrukce Kaplanova-Meierova odhadu a vizuální porovnání skupin pomocí Kaplanových-Meierových křivek [4]. Pro stanovení exaktního závěru byl použit test pomocí G_ρ třídy funkcí. Funkci třídy G_ρ použitou pro testování existence signifikantního rozdílu doby do výskytu leaku pro varianty kategoriálních proměnných zavedli Harrington a Fleming (1982), s vahami na každém okamžiku události (ne vždy nutně úmrtí) $\hat{S}_\rho(t)$, kde \hat{S} je Kaplanův-Meierův odhad funkce přežití S . V případě $\rho = 0$ se jedná o log-rank test a v případě $\rho = 1$ se jedná o ekvivalent Peto-Peto modifikace Gehanova-Wilcoxonova testu, ad [5]. Přehled p-hodnot log-rank testu a Mannova-Whitneyova testu je uveden v následující tabulce.

Nyní uvedme přehled proměnných vyskytujících se v dalších analýzách; proměnné související s anamnézou pacienta: ateroskleróza (AS), cukrovka (DM), hypertenze (HT), lokalizace nádoru (LOK), pohlaví (SEX); proměnné související s použitými přístupy při operaci a následnou terapií: zachování břišní tepny (CSPRESERV), fluorescenční angiografie (ICG), neo-adjuvantní terapie (NEOAJ), speciální trubice zavedená v konečniku (NOCOIL), operační technika (TECH).

Tabulka 1: Analýza doby do výskytu leaku, klasický přístup (p-value)

Proměnná	Log-rank test	Wilcoxon test
NOCOIL	0,001*	0,034*
LOK	0,070*	0,240
ICG	0,600	0,313
SEX	0,770	0,867
TECH	0,960	0,577
HT	0,450	0,712
DM	0,350	0,623
AS	0,560	0,707
CSPRESERV	0,890	0,928
NEOAJ	0,270	0,502

Vzhledem k tomu, že data nebyla cenzorovaná, tak v tabulce 1 nevidíme příliš velký rozdíl v závěrech použití Mannova-Whitneyova testu a log-rank testu. Jako signifikantní proměnné proměnné ovlivňující dobu do výskytu leaku se ukázaly dvě proměnné: NOCOIL a LOK. Doba do výskytu anastomotického leaku pro pacienty se zavedeným transanálním drenem nocoil je signifikantně kratší, než u pacientů bez transanálního drenu nocoil (p-value=0,001, log-rank test). Kaplanova-Meierova křivka pro dobu do výskytu leaku pro pacienty bez transanálního drenu nocoil leží pod Kaplanovou-Meierovou křivkou doby do výskytu leaku pro pacienty s transanálním drenem nocoil, viz obrázek 1. Doba do výskytu anastomotického leaku pro pacienty s lokalizací middle je signifikantně kratší než u pacientů s lokalizací low (p-value=0,070, log-rank test). K-M křivka pro dobu do výskytu leaku pro pacienty s lokalizací middle, tj. ve střední části rektu, leží pod K-M křivkou doby do výskytu leaku pro pacienty s lokalizací low, tedy v dolní části rektu. Nebyl nalezen statisticky významný vliv následujících proměnných na dobu do výskytu leaku: ICG (p-value=0,600), SEX (p-value=0,770), TECH (p-value=0,960), HT (p-value=0,450). K-M křivky pro varianty těchto proměnných se protínají v několika bodech, neleží jedna pod druhou. Významný vliv na dobu do výskytu leaku nebyl prokázán ani u proměnných DM (p-value=0,350), AS (p-value=0,560), CSPRESERV (p-value= 0,890), NEOADJ (p-value=0,270).



Obrázek 1: Doba do výskytu leaku pro jednotlivé proměnné (K-M křivky)

Závěr klasické analýzy přežití. Užitím klasické analýzy přežití byl potvrzen statisticky významný rozdíl mezi dobou do výskytu anastomotického leaku pro varianty proměnných NOCOIL (p-value= 0,001) a LOK (p-value=0,070). Pacienti, kteří měli zaveden transanální dren NOCOIL měli signifikantně kratší dobu do výskytu leaku. Pacienti s lokalizací nádoru middle (střední oblast) měli signifikantně kratší dobu do výskytu leaku než pacienti s lokalizací low (nižší oblast). Nebyl nalezen statisticky významný rozdíl mezi dobou do výskytu leaku a variantami ostatních monitorovaných proměnných: ICG (p-value=0,600), SEX (p-value=0,770),

TECH (p-value=0,960), HT (p-value=0,450), DM (p-value=0,350), AS (p-value=0,560), CSPRESERV (p-value= 0,890), NEOADJ (p-value=0,270). Doba do výskytu leaku se tedy statisticky významně nelišila pro pacienty s použitou zobrazovací technikou nebo bez použití této techniky, nelišila se ani u mužů a žen, u pacientů s a bez hypertenze, cukrovky, příp. aterosklerózy, při zachování, resp. nezachování břišní tepny, při použití resp. nepoužití neoadjuvantní terapie. K otestování byl použit log-rang test. Testováno bylo na 10% hladině významnosti.

3.2 NPI přístup analýzy přežití aplikovaný pro popis doby do výskytu anastomotického leaku

K výpočtům pomocí NPI jsme určili hodnoty M -funkce, dolních a horních funkcí přežití doby do výskytu anastomotického leaku na intervalech $(x_i, x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n$, viz tabulka 2. Situace je graficky znázorněna na obrázku grafů dolní a horní funkce přežití pro všechny varianty monitorovaných proměnných. Dolní pravděpodobnosti jevu $X_{n_x+1} < Y_{n_y+1}$ jsou pro všechny případy variant monitorovaných proměnných uvedeny v tabulce 3. Neurčitost indikace pro jednotlivé proměnné jsme v tomto případě určili na základě vztahu 1.

Tabulka 2: Dolní a horní funkce přežití

$x \in (x_i, x_{i+1})$	$M(x_i, x_{i+1})$	$\underline{S}(x)$	$\overline{S}(x)$
(0,3)	1/29	28/29	1
(3,8)	1/29	27/29	28/29
⋮			
(23,25)	2/29	19/29	20/29
(25,27)	1/29	18/29	19/29
(27,29)	2/29	16/29	17/29
⋮			
(113,197)	1/29	3/29	4/29
(197,217)	1/29	2/29	3/29
(217,240)	1/29	1/29	2/29
(240,∞)	1/29	0	1/29

Pomocí NPI přístupu byla potvrzena silná indikace rozdílu mezi dobou do výskytu anastomotického leaku u variant pěti monitorovaných proměnných: NOCOIL, LOK, ICG, CSPRESERV, NEOADJ. Doba do výskytu anastomotického leaku pro pacienty se zavedeným transanálním drenem nocoil je kratší než u pacientů bez transanálního drenu nocoil (silná indikace). Dolní pravděpodobnost $\underline{P} = 0,635$ jevu: „doba do výskytu leaku pro následující pozorování pro NOCOIL=YES je menší než pro NOCOIL=NO“ je větší než 0,5

$$\underline{P}([NOCOIL = YES]_4 < [NOCOIL = NO]_{26}) = 0,635 > 0,5.$$

Obě křivky, dolní i horní funkce přežití, pro pacienty s nocoil leží pod NPI křivkami přežití pro pacienty bez nocoil, viz obrázek 2.

Pro ženy je doba do výskytu leaku kratší než pro muže (slabá indikace, $\underline{P}([SEX = M]_{19} > [SEX = F]_{11}) > \underline{P}([SEX = M]_{19} < [SEX = F]_{11})$).

Závěr analýzy přežití pomocí NPI pro dobu do výskytu leaku. Užitím neparametrické prediktivní inference jsme našli pět významných faktorů pro dobu do výskytu anastomotického

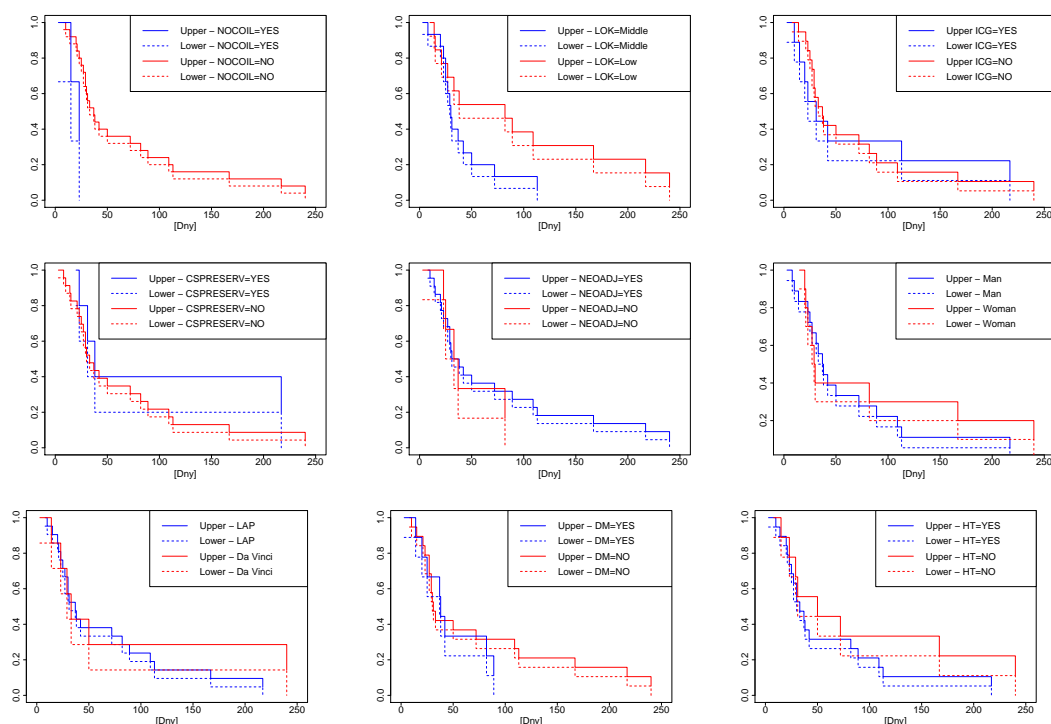
Tabulka 3: Silná a slabá indikace doby do výskytu leaku

Proměnné	X (n_x)	Y (n_y)	$\underline{P}(X < Y)$	$\underline{P}(X > Y)$
NOCOIL	YES (3)	NO (25)	0,635	0,077
LOK	Middle (15)	Low (13)	0,549	0,317
ICG	YES (9)	NO (19)	0,530	0,320
SEX	F (10)	M (18)	0,445	0,407
TECH	DaVinci (7)	Lap (21)	0,477	0,352
HT	YES (19)	NO (9)	0,465	0,385
DM	YES (9)	NO (19)	0,480	0,375
AS	NO (17)	YES (11)	0,468	0,389
CSPRESERV	NO (23)	YES (5)	0,583	0,382
NEOAJD	NO (6)	YES (22)	0,509	0,329

Tabulka 4: Neurčitost indikace rozdílu doby do výskytu leaku

Proměnné	X (n_x)	Y (n_y)	$\underline{P}(X < Y)$	$\bar{P}(X < Y)$	$\bar{P} - \underline{P}$
NOCOIL	YES (3)	NO (25)	0,635	0,913	0,279
LOK	Middle (15)	Low (13)	0,549	0,679	0,129
ICG	YES (9)	NO (19)	0,530	0,675	0,145
SEX	F (10)	M (18)	0,445	0,584	0,139
TECH	DaVinci (7)	Lap (21)	0,477	0,642	0,165
HT	YES (19)	NO (9)	0,465	0,610	0,145
DM	YES (9)	NO (19)	0,480	0,625	0,145
AS	NO (17)	YES (11)	0,468	0,602	0,134
CSPRESERV	NO (23)	YES (5)	0,583	0,784	0,201
NEOAJD	NO (6)	YES (22)	0,509	0,689	0,180

leaku. Pomocí NPI přístupu byla potvrzena *silná indikace* rozdílu mezi dobou do výskytu anastomotického leaku variant proměnných NOCOIL, LOK, ICG, CSPRESERV a NEOAJD. Pravděpodobnost jevu, že doba do výskytu leaku pro další pozorování pro NOCOIL=YES je menší než doba do výskytu leaku pro další pozorování pro NOCOIL=NO je rovna $\underline{P} = 0,634$, pro LOK ($\underline{P} = 0,549$), ICG ($\underline{P} = 0,530$), CSPRESERV ($\underline{P} = 0,583$) a NEOAJD ($\underline{P} = 0,509$). V těchto třech případech byla tato pravděpodobnost větší než 50%. Dále byla pomocí NPI přístupu detekována *slabá indikace* rozdílu mezi dobou do výskytu anastomotického leaku variant ostatních proměnných. Rozdíl nebyl detekován jako silný mezi pravděpodobnostmi přežití pro dobu do výskytu anastomotického leaku proměnných: SEX ($\underline{P} = 0,407$), TECH ($\underline{P} = 0,352$), HT ($\underline{P} = 0,465$), DM ($\underline{P} = 0,480$), AS ($\underline{P} = 0,389$). Grafická vizualizace výsledků byla realizována pomocí křivek dolní a horní funkce přežití pro všechny varianty monitorovaných proměnných. Koncepti použití NPI přístupu analýzy přežití pro popis rizikových faktorů doby do výskytu leaku jsme prezentovali v [7].



Obrázek 2: Dolní a horní doba do výskytu leaku pro jednotlivé proměnné

3.3 Srovnání závěrů klasické analýzy přežití a neparametrické prediktivní inference

Metodou klasické analýzy přežití jsme označili dva signifikantní faktory ovlivňující dobu do výskytu leaku: zavedení speciální trubice do konečníku (NOCOIL) a lokalizace nádoru (LOK). U ostatních proměnných (ICG, SEX, TECH, HT, DM, AS, CSPRESERV, NEOADJ) nebyl nalezen statisticky významný rozdíl mezi dobou do výskytu leaku a jednotlivými variantami proměnných. Testováno bylo na hladině významnosti $\alpha = 0,10$ pomocí log-rank testu.

Tabulka 5: Srovnání výsledků klasického a NPI přístupu pro dobu do výskytu leaku

Proměnné	p-value (log-rank test)	$\underline{P}(X_{m+1} < Y_{n+1})$
NOCOIL	0,001*	0,634
LOK	0,070*	0,549
ICG	0,600	0,530
SEX	0,770	0,445
TECH	0,960	0,477
HT	0,450	0,465
DM	0,350	0,480
AS	0,970	0,468
ICHS	0,400	0,404
CSPRESERV	0,890	0,583
NEOADJ	0,270	0,509

Závislost doby do výskytu leaku na kategoriálních proměnných byla metodou neparametrické

trické prediktivní inference charakterizována následujícím způsobem. Pokud byla dolní pravděpodobnost jevu: *následující pozorování ze skupiny X je menší než následující pozorování ze skupiny Y* větší než 50 %, tedy tento jev je pravděpodobnější než jev opačný, tak byl silně indikován rozdíl mezi časy do výskytu u skupin X a Y. Konkrétně byl tento rozdíl *silně indikován* u proměnných NOCOIL, LOK, ICG, CSPRESERV a NEOADJ. U všech ostatních proměnných SEX, TECH, HT, DM, AS, ICHS, byl indikován rozdíl pouze *slabou indikací* mezi dobou do výskytu leaku a variantami proměnných.

Závěr

Při porovnání výsledků obou metod je třeba brát na zřetel skutečnost, že každá z těchto dvou metod vypovídá něco jiného. Klasická analýza přežití na základě náhodného výběru dokáže indukovat vlastnost populace, z níž byla vybrána. Kdežto NPI indikuje chování následujícího pozorování na základě předchozích n pozorování. V tabulce 5 jsou uvedeny p-hodnoty log-rank testu a hodnoty pravděpodobností $P(X_{m+1} < Y_{n+1})$ pro indikaci pomocí NPI testu. Srovnání závěrů klasické analýzy přežití a neparametrické prediktivní inference pro analýzy rizikových faktorů pro dobu do výskytu leaku bylo publikováno v [7].

Reference

- [1] Augustin, T., Coolen, F.P.A. Nonparametric predictive inference and interval probability. Journal of Statistical Planning and Inference 2004, vol. 124, s. 251-72. ISSN: 0378-3758
- [2] Coolen, F.P.A., Yan, K.J.: Nonparametric Predictive Comparison of Two Groups of Lifetime Data. ISIPTA'03: Proceedings of the Third International Symposium on Imprecise Probabilities and their Applications 2003, s. 148-61.
- [3] Hill, B.M. De Finetti's theorem, induction, and A(n) or Bayesian nonparametric predictive inference (with discussion). Bayesian Statistics 3, Bernardo et al. (eds.), Oxford University Press, Oxford 1988, s. 211-241
- [4] Hosmer, D.W., Lemeshow, S., May, S.: Applied Survival Analysis, Regression Modeling of Time-to-Event Data. Hoboken: Wiley, 2008.
- [5] Peto, R., Peto, J.: Asymptotically efficient rank invariant test procedures (with discussion). Journal of the Royal Statistical Society 1972, Series A, vol.135, s. 185-206.
- [6] Příbylová L.: Stochastické modelování a optimalizace rizik, disertační práce, VŠB Technická Univerzita Ostrava, 2019
- [7] Příbylová L., Briš R., Martínek L., Benčurik V.: The use of survival analysis to investigate risk factors for anastomotic leak, Proceedings of the International Conference on Information and Digital Technologies 2019, June 25-27, pg. 386-395, Zilina, Slovakia, ISBN 978-1-7281-1400-2, ©2019 IEEE

STŘEDNÍ HODNOTA NÁHODNÉ VELIČINY

RABASOVÁ Marcela

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie,
17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava - Poruba
marcela.rabasova@vsb.cz

Abstrakt: Tento příspěvek se zabývá možností, jak zatraktivnit výuku statistiky zařazením vhodných příkladů na výpočet střední hodnoty náhodné veličiny. K tomuto účelu mohou sloužit ukázky konkrétní aplikace střední hodnoty v praxi, v oblastech jako je například teorie hazardních her. Cílem je ukázat studentům význam a aplikovatelnost statistických konceptů v reálném životě, přitáhnout jejich pozornost a zvýšit jejich zájem o studium statistiky.

Klíčová slova: střední hodnota, náhodná veličina, pravděpodobnost, statistika

1 Úvod

Většina statistických kurzů začíná kapitolami o kombinatorice a pravděpodobnosti, což je problematika, která vyžaduje více logického myšlení než některé jiné kapitoly, v nichž stačí jen “mechanicky” dosazovat do známých vzorečků. Kvůli tomu nebývá začátek kurzu pro některé studenty oblíbený.

Poté následuje téma náhodné veličiny. K úvodu této kapitoly, kdy je nutné definovat náhodnou veličinu a všechny její charakteristiky, se váže spousta teorie a vzorečků, což bývá pro studenty nezajímavé a často i náročné na pochopení. Ukázkové příklady, kterými je třeba se “prokousat”, bývají často strohé, bez ukázek praktického využití, a to zejména z časových důvodů (málokdy je v osnovách dostatečný prostor na to, aby se tomuto tématu dalo věnovat více). V této fázi pak rapidně ubyde studentů, kteří až doposud jeví o probíranou problematiku alespoň minimální zájem. Proto, pokud to okolnosti dovolí, ráda v této části zařazuji pár příkladů na využití střední hodnoty náhodné veličiny v oblasti hazardních her. Toto téma spolehlivě přitáhne pozornost a v některých studentech vzbudí dokonce nadšení a touhu proniknout do této problematiky hlouběji.

V rámci příspěvku se nejprve seznámíme se základní definicí náhodné veličiny a její střední hodnoty, poté přejdeme k představení konkrétních příkladů využití střední hodnoty v teorii hazardních her.

2 Náhodná veličina

Výsledky některých náhodných pokusů (NP) jsou vyjádřeny reálným číslem (součet bodů při hodu dvěma kostkami, vzdálenost zásahu od středu terče, doba do poruchy určitého zařízení, délka vyráběné součástky, ...), u jiných tomu tak není (hod mincí, výsledek přijímacího řízení, ...). Také u druhé skupiny však bývá účelné každému výsledku náhodného pokusu přiřadit číslo (např. „líc“ = 1, „rub“ = 0; „uspěl“ = 1, „neuspěl“ = 0). Funkci, která každému jevu přiřadí reálné číslo, nazýváme náhodná veličina (NV).

Náhodná veličina X je funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.

Podle oboru hodnot rozlišujeme dva základní typy náhodných veličin – **diskrétní**, jejichž obor hodnot je konečná nebo nekonečná posloupnost, a **spojité**, jejichž oborem hodnot je interval. Zde jsou příklady některých náhodných veličin X a jejich oborů hodnot $H(X)$:

- 1) NP ... hod dvěma kostkami
 X ... součet bodů na obou kostkách
 $H(X) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
- 2) NP ... hod mincí
 X ... počet líců, které padly
 $H(X) = \{0,1\}$
- 3) NP ... tažení dvou karet z balíčku mariášových karet
 X ... počet es mezi taženými kartami
 $H(X) = \{0,1,2\}$
- 4) NP ... střelba na cíl
 X ... vzdálenost zásahu od středu terče
 $H(X) = \langle 0, \infty \rangle$

Každá náhodná veličina může být popsána svým oborem hodnot a pravděpodobností výskytů jednotlivých hodnot. Podstatou teorie pravděpodobnosti je možnost vyjádřit skutečnost, že náhodné veličiny, navzdory nahodilosti své realizace, podléhají určitým zákonitostem. Tyto zákonitosti charakterizují **distribuční a frekvenční funkce** náhodné veličiny.

Frekvenční funkce se v případě diskrétní náhodné veličiny nazývá **pravděpodobnostní funkce** nebo taky (**zákon**) **rozdělení pravděpodobnosti** a definuje se takto:

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je reálná funkce p definovaná vztahem:

$$p(x_i) = P(X = x_i), \forall x_i \in H(X),$$

tedy jako pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabyla hodnoty x_i .

Střední hodnotu náhodné veličiny X značíme $E(X)$ nebo taky μ . Je to základní charakteristika náhodné veličiny, která určuje jakýsi “střed”, kolem něhož kolísají její hodnoty. Pro diskrétní náhodnou veličinu se definuje vztahem:

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i).$$

3 Hazardní hry

Hazardní hra je aktivita, při které jsou vkládány sázky na nejistý výsledek s cílem získat peněžní nebo jiný druh hodnoty. Tato aktivita zahrnuje náhodný prvek, který ovlivňuje výsledek, a sázky jsou obvykle přijímány organizací nebo jednotlivcem, který z hazardní hry má zisk.

Hazardní hra se nazývá spravedlivá (férová), je-li střední hodnota výhry rovna vkladu do hry. Očekávaný výnos ze sázky je pak roven nule, tj. žádná strana v dlouhém období nedosáhne ani zisku, ani neutrpí ztrátu.

Př.1: V ruletě se při sázce na jedno číslo (od 0 do 36) vyplácí v případě výhry 35násobek vsazené částky. Je tato hra spravedlivá?

Řešení:

v ... vklad do hry

X ... velikost výhry

$$H(X) = \{0, 35v\} = \{x_1, x_2\}$$

$$p(x_1) = P(X = 0) = \frac{36}{37}$$

$$p(x_2) = P(X = 35v) = \frac{1}{37}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 0 \cdot \frac{36}{37} + 35v \cdot \frac{1}{37} = \frac{35}{37}v < v$$

Střední hodnota výhry je menší než vklad do hry a tato hra není spravedlivá (je výhodná pro provozovatele).

Př.2: Při hodu třemi kostkami dostanete:

180 Kč, padnou-li tři šestky,

14 Kč, padnou-li dvě šestky,

2 Kč, padne-li jedna šestka.

Stanovte vklad do hry, aby hra byla spravedlivá.

Řešení:

v ... vklad do hry

X ... velikost výhry

$$H(X) = \{0, 2, 14, 180\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$p(x_1) = P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$p(x_2) = P(X = 2) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$p(x_3) = P(X = 14) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$$

$$p(x_4) = P(X = 180) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 14 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + 180 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 2,5$$

Aby byla tato hra spravedlivá, musel by být vklad do hry 2,50 Kč.

Př.3: Při hodu jednou kostkou:
 dostanete 5 Kč, padne-li číslo 6,
 dostanete 1 Kč, padne-li číslo 4 nebo 5,
 zaplatíte 2 Kč, padne-li číslo 1, 2 nebo 3.
 Je tato hra spravedlivá?

Řešení:

v ... vklad do hry

X ... velikost výhry

$$H(X) = \{-2, 1, 5\} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$p(x_1) = P(X = -2) = \frac{3}{6}$$

$$p(x_2) = P(X = 1) = \frac{2}{6}$$

$$p(x_3) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = -2 \cdot \frac{3}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} > 0 = v$$

Střední hodnota výhry je větší než vklad do hry a tato hra není spravedlivá (je výhodná pro hráče).

Závěr

Zahrnutí příkladů z teorie hazardních her do výuky statistiky má několik výhod. Zaprvé, ukazuje studentům konkrétní situace, ve kterých lze střední hodnotu aplikovat. To pomáhá studentům vidět statistiku jako praktický a relevantní nástroj, který nachází uplatnění v různých oblastech života. Zadruhé, využití příkladů z oblasti hazardních her může vzbudit zvědavost a zájem studentů, protože tato oblast je pro mnoho z nich přitažlivá a zajímavá.

Volba jednodušších typů příkladů pak studenty povzbuzuje v jejich studiu, stávají se aktivnější, angažovanější a zapojují se více do učebního procesu, což vede k hlubšímu porozumění a lepšímu zapamatování učiva.

MATHEMATICS AND STATISTICS LEARNING SUPPORT AND THE POWER OF FEEDBACK

REBENDA Josef¹

¹Vysoké učení technické, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky, Technická 2848/8, 616 00 Brno a Středoevropský technologický institut, Purkyňova 656/123, 612 00 Brno
rebenda@vutbr.cz

Abstract: Feedback is often mentioned as an important part of evaluation of Mathematics and Statistics Learning Support (MSLS) provision. Focus of the feedback in MSLS is given mostly on student feedback to the support they received, and to MSLS in general. However, we can look at MSLS and feedback from another perspective: the service itself might be considered as an agent providing feedback which is, or should be, an integral part of the learning process. In this paper we argue that MSLS provision perfectly fits within constructivist approach to feedback and should be promoted with this perspective.

Keywords: mathematics and statistics learning support, constructivist approach to feedback, learner-centered feedback, feedback as a part of the learning process

1 Introduction

Mathematics and statistics learning support (MSLS) in universities can be defined as „any extra, optional, non-compulsory programme or facility that assists students in developing mathematical and/or statistical confidence and skills during their enrolled study in a degree course, whether undergraduate or postgraduate, but with no credit associated with the learning support programme. Sometimes, such learning support may be aligned with specific components of the degree course, but its assistance is optional and supplementary to the designated activities of the programme attaining credit towards a degree.“ ([3])

Mathematics and statistics learning support (MSLS) has developed throughout years from an individual-based response to local needs and small-scale operations into a respected service embedded in universities' organisational structures. In England, the sigma Network was established as a professional association for those working in (or with an active interest in) mathematics and statistics support in higher education ([7]). It collaborates with similar networks that cover Scotland and Ireland and has links to MSLS services at universities in other countries including Australia, New Zealand, Norway, Czech Republic, Switzerland, Germany and the Netherlands.

In our context we focus on physical centres or online-based services providing general MSLS, with at least some autonomy, and with focus on the general development of students' mathematical and statistical skills. The general overall aim for a MSLS centre is to help students attain the level of mathematical and statistical confidence they need to achieve their potential in their degree, whatever that level might be, and whatever the discipline of their degree ([3]).

Anecdotal evidence would suggest that MSLS services have been invaluable in developing the confidence and competence of individual students and in enhancing students' experience of mathematics at university. However, such evidence is rarely sufficient to convince those who allocate funding, and MSLS services obviously need resources for their operation. Because MSLS centres have developed in response to student needs, scarce resources are almost completely oriented to meeting these needs. It requires a cultural shift in the views held of MSLS centres by universities and by the centres themselves, as playing a vital role in the overall learning fabric for the academic health and fulfilment of students and hence of the whole university ([3]).

Feedback is information provided by an agent (e.g., teacher, peer, book, parent, experience) regarding aspects of one's performance or understanding.

Feedback provision is seen as a key process in learning, providing information on actual performance in relation to the goal of performance. There is a large body of literature arguing for the importance of feedback in learning, yet there is an accruing body of evidence pointing to an inability of feedback to perform its function in practice. In particular, learner surveys have indicated that feedback is one of the most problematic aspects of the student experience ([4]).

On the other hand, in general, feedback is psychologically reassuring, and people like to obtain feedback about their performance even if it has no impact on their performance ([1]). It is important, therefore, not to confuse feelings that feedback is desirable with the question of whether feedback benefits performance ([2]).

2 Mathematics and Statistics Learning Support as a resource for feedback provision in learning mathematics

2.1 What is needed for effective feedback provision?

Feedback is often mentioned as an important part of evaluation of MSLS provision. Focus of the feedback in MSLS is given mostly on student feedback to the support they received in the drop-in or online, or to MSLS in general ([3], [5], [8]). But there is much more about feedback in MSLS.

Effective feedback answers three major questions: Where am I going? (the goals, FEED UP) How am I going? (FEED BACK) and Where to next? (FEED FORWARD) A major aim of the educative process is to assist in identifying these gaps ("How am I going?" relative to "Where am I going?") and to provide remediation in the form of alternative or other steps ("Where to next?"). That is, the pre-requisite properties for feedback include: i) information on the goal of performance, ii) information about how performance meets the goal, commonly referred to as the 'gap' and, iii) strategies to address the gap.

Teachers need to view feedback from the perspective of the individuals engaged in the learning and become proactive in providing information addressing the three feedback questions and developing ways for students to ask these questions of themselves. Students, too often, view feedback as the responsibility of someone else, usually teachers, whose job it is to provide feedback information by deciding for the students how well they are going, what the goals are, and what to do next ([2]).

This is not surprising. Typically, learners have rarely had explicit instruction or support in how to seek or use feedback, particularly when it might contradict or challenge their own internal view of how they see their performance. In order to improve the effectiveness of feedback, we need to focus not only on improving the quality of the externally provided message, but also focus on strengthening the self-evaluative capacity of learners. We need to shift focus to the role of the learner in engaging and using feedback. Some authors promote a constructivist approach to feedback rather than a didactic provision of performance information. This alternative framework encourages learners and educators to view feedback as a system of learning, rather than discreet episodes of educators ‘telling’ learners about their performance. This constructivist framework positions the learner as having agency and sets the learner on a path towards self-evaluation and self-regulation. Individual, relational and environmental factors can impact on the utility of feedback as a performance changing device ([4]).

For efficient learning, the focus of feedback is critically important. There are four major levels and the level at which feedback is directed influences its effectiveness. Feedback information can be targeted at the task (e.g., “Yes, that is the correct answer.”), process (e.g., “It looks like you used the wrong strategy for step two.”), regulative (e.g., “What would happen if you changed variable X?”) and/or self-level (e.g., “Great job!”). Effective feedback at the task, process, and self-regulatory levels is interrelated ([2]). We note that effective feedback at the task, process, and self-regulatory levels is also desired.

A better way to do feedback, underpinned by the theories of constructivist learning, puts i) the student at the centre of the feedback experience, and ii) frames feedback as an iterative, continuous part of learning that helps the learner to develop independent skills in self-monitoring and self-regulation. Contesting the traditional, behaviourist ‘feedback ritual’ requires leadership from educators, and a deliberate commitment to curricular re-design with purposeful and structured opportunities for learners to engage in feedback episodes, to put into place changes triggered by feedback, and finally, to re-evaluate performance in relation to set goals. Such a ‘system-orientated’ take on feedback design requires upskilling of both educators and learners and needs to factor in the influence of context, culture and relationships in learning ([4]).

Moreover, there is value in separating feedback from grading. When students receive grades and written comments, students focus on the grades and consequently learn less from the feedback ([6]).

To summarise, empirical evidence suggests that feedback is complex, and the interrelationship between the learner, the educator, the environment, the practice/knowledge culture and the specific task mean that a one size fits all model on ‘how to do feedback’ is likely to fall down on many levels in application ([4]).

2.2 How to address the needs for effective feedback provision in learning mathematics?

The question is, how to deal with all these theoretical requirements together? We argue that we can look for an answer by focusing on the environment component, which is often overlooked. It

might sound surprising, but without noticing it, universities and other higher education institutions have developed an environment where all the requirements mentioned earlier in this paper can be fulfilled. This brings us into the MSLS domain. The potential is there, and we will now take a brief overview of how the MSLS services can meet the expectations of constructivist approach to feedback.

We have mentioned that there is a distinction between the four levels of feedback: about the task (FT), about the processing of the task (FP), about self-regulation (FR), and about the self as a person (FS). FS is the least effective, FR and FP are powerful in terms of deep processing and mastery of tasks, and FT is powerful when the task information subsequently is useful for improving strategy processing or enhancing self-regulation ([2]). Within MSLS provision, it is possible to provide feedback on any of those four levels. If a learner brings in a completed task and asks for feedback on the result, FT might be provided. However, if feedback to the solving process is asked instead, it gives more space to FP and likely to FR as well, provided the MSLS tutors are prepared to give hints and cues and ask questions.

The effects of immediate feedback are likely to be more powerful for FT and delayed feedback more powerful for FP. There is no such a simple answer for FR ([2]). However, both immediate and delayed feedback can be provided within a MSLS service, both at a drop-in or online. It seems that it is easier to provide immediate feedback at a drop-in and delayed feedback online. However, there are strategies which tutors can develop to cover both immediate and delayed feedback in both environments. For example, the tutor at the drop-in might “need to walk around to see how other visitors are doing” and come back in a couple of minutes. Or try to type several short messages instead of composing one longer message in case of an online chat.

The essence of MSLS is that it is not formal. It enables students to try to engage with mathematics or statistics in an environment with no formal expectations of them other than that they are there to try. This is strength in providing an environment for students to face their fears, conquer weaknesses and develop confidence and self-knowledge ([3]). As we already have noticed, it is the feedback information and interpretations from assessments, not the numbers or grades, that matter, and the grades can even distract students from learning. It all means that the MSLS is convenient for providing feedback in this sense, as there are no grades or scores given. Learning progress is measured by the learner’s satisfaction, and that is the part where the learner’s feedback comes into action. It is very important because it contributes to improvement of the quality of provided services, and to tutors’ learning as well.

A vital contribution of MSLS systems is the message to students that it is both important and acceptable to identify mathematical weaknesses, and to seek and accept help. However, the use of MSLS systems is not restricted to those with the weakest skills. MSLS facilities play a significant role in the provision of sufficient systematic support to facilitate the development of confidence in mathematical and statistical skills to the level perceived by individual students to be necessary for their success in their tertiary studies. Like language, the totality of development in mathematics and statistics comes from formal and informal learning; MSLS is part of the overall spectrum of this development. The focus of MSLS tends to be on building mathematical and statistical fitness, confidence and transferability, all with reference to specific courses being taken by the students ([3]). This feature of MSLS provision is well in line with the concept of feedback as an integral part of the learning process, because it motivates learners to seek feedback whenever they feel they need it, and can provide both immediate and delayed feedback when it is needed.

It is important to note, however, that under particular circumstances, instruction is more effective than feedback. Feedback can only build on something; it is of little use when there is no initial learning or surface information. Feedback is what happens second. With inefficient learners, it is better for a teacher to provide elaborations through instruction than to provide feedback on poorly understood concepts ([2]). This fact should be acknowledged by MSLS managers, and if such situation happens, corresponding arrangements need to be made. For example, workshops with focus on poorly understood topics can be organised.

The last sentence of one of the recent papers is “Feedback, on average, is powerful, but some feedback is more powerful.” ([9]) We could paraphrase it as “Feedback, on average, is powerful, but feedback in a convenient environment is more powerful.”

Conclusion

We conclude by claiming that MSLS provision perfectly fits within constructivist approach to feedback and should be promoted with this perspective. Consequently, once this perspective is accepted by those who allocate funding, it will be right and proper to ask about the role of MSLS in student learning and in universities in general, not just to secure funding. We should push forward the cultural shift in the views held of MSLS centres by universities and by the centres themselves to ensure that MSLS services play their full role in universities.

Acknowledgment

This publication has been written with financial support from the project „Capacity Building in Mathematics and Statistics Learning Support in Norway and the Czech Republic (MSLS Net)“, registration number EHP-CZ-ICP-3-009, financed by the EEA Grants 2014-2021, programme Education. Iceland, Liechtenstein, and Norway contribute through EEA Grants to a more equal Europe, both socially and economically, and strengthen the relations between Iceland, Liechtenstein and Norway, and the 15 Beneficiary States in Europe.

References

- [1] ASHFORD, S. J., & CUMMINGS, L. L. (1983). Feedback as an individual resource: Personal strategies of creating information. *Organizational Behavior and Human Performance*, 32, 370-398.
- [2] HATTIE, J., & TIMPERLEY, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. DOI: 10.3102/003465430298487
- [3] MacGILLIVRAY H. & CROFT T. (2011). Understanding evaluation of learning support in mathematics and statistics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42:2, 189-212, DOI: 10.1080/0020739X.2010.519801
- [4] MOLLOY, E. and BOUD, D. (2013). Feedback models for learning, teaching and performance. In *Spector, J. M., Merrill, D., Elen, J. and Bishop, M.J. (Eds.), Handbook of Research on Educational Communications and Technology*. Fourth Edition. Springer: New York, 413-424. DOI: 10.1007/978-1-4614-3185-5_33

- [5] NÍ FHLOINN, E. (2009). The role of student feedback in evaluating mathematics support centres. In: *CETL-MSOR Conference 2009*, 7-8 Sept. 2009, Milton Keynes, UK. <https://doras.dcu.ie/21665/>
- [6] REINHOLZ D. L. (2018). Peer Feedback for Learning Mathematics, *The American Mathematical Monthly*, 125:7, 653-658, DOI: 10.1080/00029890.2018.1483684
- [7] sigma Network (2023). *Constitution and AGMs*, <https://www.sigma-network.ac.uk/constitution-and-agms/>
- [8] sigma Network (2023). *Gathering student feedback on mathematics and statistics support provision*, <https://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/Evaluation-Report-web-version.pdf>
- [9] WISNIEWSKI B., ZIERER K. and HATTIE J. (2020). The Power of Feedback Revisited: A Meta-Analysis of Educational Feedback Research. *Front. Psychol.* 10:3087. DOI: 10.3389/fpsyg.2019.03087

ZAJÍMAVÉ DŮSLEDKY PŘEROVNÁNÍ NEABSOLUTNĚ KONVERGENTNÍCH ŘAD

RUCKI Pavel

Ekonomická fakulta VŠB-TUO, Katedra matematických metod v ekonomice, Sokolská třída
33, 702 00 Ostrava 1
e-mail: pavel.rucki@vsb.cz

Abstrakt: Příspěvek pojednává o speciální třídě nekonečných číselných řad, jejichž přerovnání má vliv na její konvergenci. Prostřednictvím elementárních postupů lze ukázat, jakým způsobem ovlivňuje způsob přerovnání neabsolutně konvergentní řady hodnotu jejího součtu. Svým zaměřením rozšiřuje příspěvek standardní učivo matematické analýzy na VŠ především ve vztahu k Riemannově větě o přerovnání nekonečných řad.

Klíčová slova: nekonečná řada, přerovnání řad, neabsolutně konvergentní řada, alternující harmonická řada, Riemannova věta

1 Úvod

Neabsolutně konvergentní řadou rozumíme nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ reálných čísel, která konverguje, avšak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje k $+\infty$. Důsledkem toho je, že rozdělíme-li neabsolutně konvergentní řadu na dvě řady obsahující pouze kladné, resp. záporné členy posloupnosti (a_n) , pak tyto řady jsou nutně divergentní, tj.

$$\sum_{\substack{n=1 \\ a_n > 0}}^{\infty} a_n = - \sum_{\substack{n=1 \\ a_n < 0}}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Tato skutečnost hraje zásadní roli při přerovnávání takových řad, jak bude ukázáno ve větě 1. Při práci s členy neabsolutně konvergentních řad je zapotřebí jisté obezřetnosti, poněvadž v tomto případě není zaručena platnost běžných aritmetických zákonů (komutativní, asociativní, popř. distributivní zákon). V dalších částech se zaměříme zejména na důsledky plynoucí z porušení komutativního zákona. To má úzkou souvislost s tzv. přerovnáním nekonečné řady.

Definice 1. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ nazýváme přerovnáním nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, existuje-li bijekce π na množině \mathbb{N} taková, že $a'_n = a_{\pi(n)}$, pro $n = 1, 2, \dots$

Vezmeme-li alternující harmonickou řadu a její přerovnění:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots, \quad (2)$$

pak pomocí jednoduchých odhadů lze ukázat, že dané přerovnění (2) (tj. násobná aplikace komutativního zákona) nezachovává součet původní řady (1). Označíme-li jejich součty po řadě s a s' , pak platí

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right)}_{>0} - \dots < \frac{5}{6},$$

$$\begin{aligned} s' &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12} \right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)}_{>0} + \dots > \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Ve standardním kurzu matematické analýzy se často objevuje Riemannova věta o přerovnění neabsolutně konvergentních řad, které na tento výsledek dává obecnější náhled.

Věta 1 (Riemann, [2, str. 318]). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak lze najít její přerovnění $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ mající některou z uvedených vlastností:*

1. řada konverguje k předem zvolenému reálnému číslu s' ,
2. řada diverguje k $+\infty$, nebo k $-\infty$,
3. řada osciluje, tj. existují konstanty $\alpha < \beta$ takové, že

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a'_n = \alpha \quad \text{a zároveň} \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a'_n = \beta.$$

Důkaz Riemannovy věty je v podstatě konstruktivní – ukazuje postup, jak danou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnat, aby nastal jeden z uvedených případů. Nicméně nedává předem předpis bijekce π (návod), která toto přerovnění realizuje. Tento nedostatek lze ve speciálních případech odstranit a požadovaný předpis bijekce odvodit. To lze provést např. u alternujících řad, jimiž se budeme v dalších částech podrobněji věnovat.

2 Přerovnání alternujících řad

Nejdříve definujeme speciální typ přerovnání.

Definice 2. Necht (a_n) je klesající posloupnost kladných reálných čísel a p a q jsou přirozená čísla. Přerovnáme-li alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (3)$$

tak, aby se pravidelně střídaly bloky s p kladnými a q zápornými a shodně uspořádanými členy řady (3), budeme nově vzniklou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ nazývat přerovnáním řady (3) typu (p, q) , tj.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n := & \underbrace{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2p-1}}_p - \underbrace{a_2 - a_4 - \cdots - a_{2q}}_q \\ & + \underbrace{a_{2p+1} + a_{2p+3} \cdots + a_{4p-1}}_p - \underbrace{a_{2q+2} - a_{2q+4} - \cdots - a_{4q}}_q + \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

Případný součet této řady označíme $s'(p, q)$.

Např. řada (2) je přerovnáním řady (1) typu $(2, 1)$.

2.1 Přerovnání alternující harmonické řady do bloků o konstantním počtu členů

Uvažujme alternující harmonickou řadu (1). Již dříve jsme ukázali, že tato řada a její přerovnání (2) mají různé součty. Protože součet řady (1) je dobře znám ($\ln 2$), lze z něj vhodnými úpravami odvodit také součet druhé z uvedených řad. Definujme dvě posloupnosti

$$a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad b_n := \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k - 1, \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2k} & \text{pro } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pak najdeme součet $s'(2, 1)$ snadno takto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \ln 2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = s(2, 1) = \frac{3}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

přičemž v poslední řadě jsme vynechali nulové členy. Definujme-li navíc posloupnost

$$c_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} & \text{pro } n = 3k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

můžeme podobným způsobem získat součet $s'(4, 1)$:

$$s'(2, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \cdots = s'(4, 1) = 2 \ln 2.$$

Uvedený postup lze zobecnit a určit tak součty

$$s'(2^t, 1) = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \ln 2, \quad s'(1, 2^t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \ln 2, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Bohužel jeho nevýhodou je, že jej nelze použít v případě, kdy počet kladných, resp. záporných členů v daném bloku není mocninou čísla 2. Tento problém vyřešil už v roce 1839 německý matematik Martin Ohm (1792–1872):

Věta 2 (Ohm, [3]). *Nechť p a q jsou přirozená čísla. Pak pro součet řady $s'(p, q)$, která je přerovnáním alternující harmonické řady typu (p, q) , platí*

$$s'(p, q) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

Důkaz. Důkaz je založen na vztahu mezi n -tým částečným součtem harmonické řady a přirozeným logaritmem:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

přičemž $\gamma = 0,577215\dots$ je Eulerova konstanta. Nyní určíme n -tý částečný součet přerovnání řady (1) typu (p, q) tvořený N bloky kladných a záporných členů (tj. $n = (p+q)N$):

$$\begin{aligned} s'_n &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{k=mp+1}^{(m+1)p} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=mq+1}^{(m+1)q} \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{Np} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{Nq} \frac{1}{2k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2Np} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{Np} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{Nq} \frac{1}{k} \\ &= \ln(2Np) + \gamma + \varepsilon_{2Np} - \frac{1}{2} (\ln(Np) + \gamma + \varepsilon_{Np} + \ln(Nq) + \gamma + \varepsilon_{Nq}) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \varepsilon_{2Np} - \frac{1}{2} (\varepsilon_{Np} + \varepsilon_{Nq}). \end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $N \rightarrow \infty$ získáme:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s'_{(p+q)N} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}. \quad (5)$$

Pro ostatní indexy n lze vždy nalézt N takové, že $(p+q)N < n < (p+q)(N+1)$. Pak s'_n se liší od $s'_{(p+q)N}$ nejvýše o $p+q$ členů, které se limitně blíží 0, tj.

$$|s'_n - s'_{(p+q)N}| < \sum_{k=1}^p \frac{1}{2(Np+k)-1} + \sum_{k=1}^q \frac{1}{2(Nq+k)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |s'_n - s'_{(p+q)N}| = 0.$$

Odtud a z (5) plyne tvrzení věty, tj.

$$s'(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

□

Aplikací předchozí věty dostáváme konkrétní vyjádření součtu následujících řad:

$$s'(3, 2) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 6,$$

$$s'(1, 4) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots = 0,$$

$$s'(1, 100) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{200} + \frac{1}{3} - \frac{1}{202} - \frac{1}{204} - \dots - \frac{1}{400} + \frac{1}{5} - \dots = -\ln 5.$$

Prostřednictvím tohoto typu přerovnání lze vyjádřit pouze omezenou množinu reálných čísel ve tvaru $\ln(2\sqrt{p/q})$, $p, q \in \mathbb{N}$. Jinak řečeno je-li $e^{2\alpha}/4 \in \mathbb{Q}$, pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$, pak existuje přerovnání řady (1) typu (p, q) , jehož součet je α . Pro ostatní reálná čísla není taková korespondence možná. Pokud bychom se pokusili takto vyjádřit např. reálná čísla $\sqrt{2}$ nebo $\frac{1}{3} \ln 2$, dostali bychom se do sporu s algebraickou povahou (racionalitou) čísla $\frac{p}{q}$, viz např.

$$s(p, q) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{4} e^{\sqrt{2}}, \quad s(p, q) = \frac{1}{3} \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{4}. \quad (6)$$

2.2 Přerovnání alternující harmonické řady do bloků o proměnlivém počtu členů

V těchto případech lze použít obecnější typ přerovnání řady (1) obsahující bloky s proměnlivým počtem členů se shodným znaménkem. Nejdříve však představíme obecnější tvrzení, v němž stačí požadovat, aby se relativní počty kladných a záporných členů v prvních n členech přerovnané řady limitně blížily k jisté hodnotě. Následující věta je tedy zobecněním věty 2.

Věta 3 (Pringsheim, [4]). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ je přerovnání alternující harmonické řady a u_n označuje počet kladných členů v posloupnosti a'_1, a'_2, \dots, a'_n . Nechť dále existuje limita*

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}, \quad 0 < L < 1.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ konverguje a pro její součet s' platí

$$s' = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{L}{1-L}.$$

Důkaz. Označíme-li s'_n částečný součet přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, pak platí

$$s'_n = \sum_{k=1}^{u_n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-u_n} \frac{1}{2k}.$$

Následně postupujeme obdobně jako při dokazování věty 2. □

Součet s' lze vyjádřit i v jiném tvaru. Označíme-li v_n počet záporných členů v posloupnosti a'_1, a'_2, \dots, a'_n , pak z existence limity L plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - u_n}{n} = 1 - L \quad \text{a} \quad S = \ln 2 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{u_n}{v_n}. \quad (7)$$

Pro řadu (1) dostáváme $L = 1/2$, pro její přerovnání typu (p, q) pak $L = p/(p+q)$. V limitních případech, kdy $L = 0$, resp. $L = 1$, přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ diverguje k $-\infty$, resp. $+\infty$.

Volme nyní reálné číslo α takové, že $e^{2\alpha}/4$ je iracionální. V minulé části jsme ukázali, že neexistuje přerovnaní řady (1) typu (p, q) , které by mělo součet α . Přerovnejme nyní řadu (1) podle definice 2 s tím rozdílem, že v N -tém bloku bude právě p_N kladných a q_N záporných členů řady (1), dostaneme tak řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p_1 - 1}}_{p_1} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q_1}}_{q_1} + \underbrace{\frac{1}{2p_1 + 1} + \frac{1}{2p_1 + 3} + \cdots + \frac{1}{2(p_1 + p_2) - 1}}_{p_2} - \underbrace{\frac{1}{2q_1 + 2} - \frac{1}{2q_1 + 4} - \cdots - \frac{1}{2(q_1 + q_2)}}_{q_2} + \cdots \quad (8)$$

Rozlišíme dva případy.

1. Necht $\alpha > \ln 2$, pak $e^{2\alpha}/4 > 1$. Vytvoříme posloupnost nezáporných celých čísel (u_N) tak, aby $u_0 = 0$ a pro $N = 1, 2, \dots$

$$\frac{u_N}{N} < \frac{e^{2\alpha}}{4} < \frac{u_N + 1}{N}, \quad \text{tj.} \quad u_N := \left\lfloor \frac{Ne^{2\alpha}}{4} \right\rfloor,$$

přičemž $[x]$ označuje největší celé číslo menší nebo rovno x . Pak zřejmě $u_N/N \rightarrow e^{2\alpha}/4$ pro $N \rightarrow \infty$. Bude-li v přerovnané řadě (8) mezi jejími členy $a'_1, a'_2, \dots, a'_{u_N+N}$ právě u_N kladných a N záporných členů, pak podle věty 3 bude mít součet α (volíme $n = u_N + N$). K tomu stačí definovat počet kladných a záporných členů v N -tém bloku takto:

$$p_N := u_N - u_{N-1}, \quad q_N := 1, \quad N = 1, 2, \dots$$

Jinak řečeno počet kladných, resp. záporných, členů v prvních N blocích je roven $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = u_N$, resp. $q_1 + q_2 + \cdots + q_N = N$. Přerovnaní (8), které takto získáme, je specifické tím, že se mezi dvěma bloky s kladnými členy nachází jediný záporný člen. Označíme-li $\beta = e^{2\alpha}/4$, pak pro $N = 1, 2, \dots$ platí

$$\begin{aligned} u_N &= [N\beta] = [(N-1)\beta + \beta] = [(N-1)\beta] + \{(N-1)\beta\} + \beta \\ &= [(N-1)\beta] + [\{(N-1)\beta\} + \beta] = u_{N-1} + [\{(N-1)\beta\} + \beta], \end{aligned}$$

kde $\{x\} := x - [x]$ označuje zlomkovou část čísla x . Protože poslední celá část může nabýt pouze hodnot 0, nebo 1, snadno se ukáže, že

$$p_N = \left\lfloor \frac{e^{2\alpha}}{4} \right\rfloor, \quad \text{nebo} \quad p_N = 1 + \left\lfloor \frac{e^{2\alpha}}{4} \right\rfloor, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

a posloupnost (p_N) je tak omezená. V přerovnané řadě (8) jsou tudíž jednotlivé členy seřazeny takto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n &= \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p_1 - 1}}_{[e^{2\alpha}/4], \text{ nebo } 1+[e^{2\alpha}/4]} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2p_1 + 1} + \frac{1}{2p_1 + 3} + \cdots + \frac{1}{2(p_1 + p_2) - 1}}_{[e^{2\alpha}/4], \text{ nebo } 1+[e^{2\alpha}/4]} - \frac{1}{4} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2(p_1 + p_2) + 1} + \frac{1}{2(p_1 + p_2) + 3} + \cdots + \frac{1}{2(p_1 + p_2 + p_3) - 1}}_{[e^{2\alpha}/4], \text{ nebo } 1+[e^{2\alpha}/4]} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (10) \end{aligned}$$

Nyní ukážeme, že řada (10) má součet roven α . Je-li $s'_{p_1+\dots+p_N+N} = s'_{u_N+N}$ částečný součet přerovnané řady (8) obsahující právě N bloků kladných členů a N bloků záporných členů, pak ze (7) vyplývá

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s'_{u_N+N} = \ln 2 + \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \frac{u_N}{N} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2\alpha}}{4} = \alpha. \quad (11)$$

Ve zbývajících případech, kdy $u_N + N < n < u_{N+1} + N + 1$ pro nějaké přirozené N , existuje takové $m \in \{1, 2, \dots, p_{N+1}\}$, že

$$s'_n = s'_{u_N+N} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2(u_N+k)-1} < s'_{u_N+N} + \sum_{k=1}^{p_{N+1}} \frac{1}{2(u_N+k)-1} = s'_{u_{N+1}+N+1} + \frac{1}{2N}.$$

Navíc platí $s'_n > s'_{u_N+N}$, tj.

$$s'_{u_N+N} < s'_n \leq s'_{u_{N+1}+N+1} + \frac{1}{2N}.$$

Z věty o sevřených posloupnostech a z (11) ihned plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \alpha$$

a tedy řada (10) má součet α .

Tímto postupem můžeme najít přerovnání řady (1), jehož součet je roven např. $\sqrt{2}$. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty prvních několika členů posloupnosti u_N (celkový počet kladných členů v prvních N blocích) a posloupnosti p_N (počet kladných členů v N -tém bloku).

Tabulka 1: Přerovnání řady (1) mající součet $\alpha = \sqrt{2}$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
u_N	4	8	12	16	21	25	29	33	38	42	46	50	54	59	63	67	71
p_N	4	4	4	4	5	4	4	4	5	4	4	4	4	5	4	4	4
q_N	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Z (9) plyne, že posloupnost (p_N) nabývá hodnot 4 a 5. Protože je číslo $e^{2\sqrt{2}}/4$ iracionální, výskyt hodnoty 5 mezi hodnotami 4 v posloupnosti (p_N) není periodický. V přerovnané řadě (10) se tedy nepravidelně střídají bloky se čtyřmi, resp. pěti kladnými členy. Pro doplnění je níže uveden výčet několika prvních indexů N , pro které N -tý blok obsahuje právě pět kladných členů, tj. $p_N = 5$:

$$N = 5, 9, 14, 18, 22, 27, 31, 35, 40, 44, 48, 53, 57, 61, 66, 70, 75, 79, 83, 88, 92, 96, \dots$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{6} + \\ & + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{8} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{39} + \frac{1}{41} - \frac{1}{10} + \dots \end{aligned}$$

2. Necht' nyní $\alpha < \ln 2$, pak $e^{2\alpha}/4 < 1$. Postupujme podobně jako v přechozím případě. Nejdříve definujeme posloupnost nezáporných celých čísel v_N tak, aby $v_0 = 0$ a pro $N = 1, 2, \dots$

$$\frac{N}{v_n + 1} < \frac{e^{2\alpha}}{4} < \frac{N}{v_n} \Rightarrow v_n + 1 > \frac{4N}{e^{2\alpha}} > v_n, \quad \text{tj.} \quad v_N := \left\lfloor \frac{4N}{e^{2\alpha}} \right\rfloor.$$

Pak zřejmě $N/v_N \rightarrow e^{2\alpha}/4$ pro $N \rightarrow \infty$. Aby přerovnaná řada (8) měla součet α , stačí, aby mezi jejími členy $a'_1, a'_2, \dots, a'_{N+v_N}$ bylo právě N kladných a v_N záporných členů. Necht' pro počet kladných členů p_N , resp. záporných členů q_N v N -tém bloku platí:

$$p_N := 1, \quad q_N := v_N - v_{N-1}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Počet kladných, resp. záporných, členů v prvních N blocích je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_N = N$, resp. $q_1 + q_2 + \dots + q_N = v_N$. V přerovnané řadě (8) se tedy mezi dvěma bloky se zápornými členy nachází jediný kladný člen. Z analogických úvah jako v případě 1 plyne, že posloupnost (q_N) je omezená a

$$q_N = \left\lfloor \frac{4}{e^{2\alpha}} \right\rfloor, \quad \text{nebo} \quad q_N = 1 + \left\lfloor \frac{4}{e^{2\alpha}} \right\rfloor, \quad N = 1, 2, \dots \quad (12)$$

V přerovnané řadě (8) jsou tudíž jednotlivé členy seřazeny takto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = & 1 - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q_1}}_{[4/e^{2\alpha}], \text{ nebo } 1+[4/e^{2\alpha}]} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{2(q_1+1)} - \frac{1}{2(q_1+2)} - \dots - \frac{1}{2(q_1+q_2)}}_{[4/e^{2\alpha}], \text{ nebo } 1+[4/e^{2\alpha}]} + \frac{1}{5} \\ & - \underbrace{\frac{1}{2(q_1+q_2+1)} - \frac{1}{2(q_1+q_2+2)} - \dots - \frac{1}{2(q_1+q_2+q_3)}}_{[4/e^{2\alpha}], \text{ nebo } 1+[4/e^{2\alpha}]} + \frac{1}{7} - \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Nyní ukážme, že součet řady (13) je roven α . Postupujme obdobně jako v případě $\alpha > \ln 2$. Ze (7) přímo plyne

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s'_{N+q_1+\dots+q_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} s'_{N+v_N} = \ln 2 + \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \frac{N}{v_N} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2\alpha}}{4} = \alpha. \quad (14)$$

Ve zbývajících případech, kdy $N + v_N < n < N + 1 + v_{N+1}$ pro nějaké přirozené N , existuje takové $m \in \{0, 1, \dots, q_{N+1} - 1\}$, že

$$s'_n = s'_{N+v_N} + \frac{1}{2N+1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2(v_N+k)} > s'_{N+v_N} + \frac{1}{2N+1} - \sum_{k=1}^{q_{N+1}} \frac{1}{2(v_N+k)} = s'_{N+1+v_{N+1}}.$$

Navíc platí $s'_n \leq s'_{N+v_N} + 1/(2N+1)$, tj.

$$s'_{N+1+v_{N+1}} < s'_n \leq s'_{N+v_N} + \frac{1}{2N+1}.$$

Z věty o sevřených posloupnostech a ze (14) pak plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \alpha.$$

Tabulka 2: Přerovnání řady (1) mající součet $\alpha = 17/33$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
u_N	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
v_N	1	2	4	5	7	8	9	11	12	14	15	17	18	19	21	22	24
q_N	1	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2

Přerovnejme nyní řadu (1) tak, aby nová řada měla součet $17/33$. Tabulka 2 obsahuje hodnoty prvních několika členů posloupnosti v_N (celkový počet záporných členů v prvních N blocích) a posloupnosti q_N (počet záporných členů v N -tém bloku).

Z (12) plyne, že posloupnost (q_N) nabývá hodnot 1 a 2. I nyní se v přerovnané řadě nepravidelně střídají bloky s jedním, resp. s dvěma zápornými členy. Pro názornost uvádíme níže výčet několika prvních indexů N , pro které N -tý blok obsahuje právě dva záporné členy, tj. $q_N = 2$:

$$n = 3, 5, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 29, 31, 33, 36, 38, 40, 43, 45, 47, 50, 52, \dots$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{17}{33} = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} \\ & + \frac{1}{15} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} + \frac{1}{17} - \frac{1}{24} + \frac{1}{19} - \frac{1}{26} - \frac{1}{28} + \frac{1}{21} - \frac{1}{30} + \frac{1}{23} - \frac{1}{32} - \frac{1}{34} + \dots \end{aligned}$$

2.3 Přerovnání obecné alternující řady do bloků o konstantním počtu členů

V poslední části představíme několik základních poznatků o přerovnání alternujících řad (3) obecnějších než řada (1), např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} \quad \text{apod.}$$

Omezíme se pouze na přerovnání řady (3) typu (p, q) , viz (4). O konvergenci, příp. součtu takto přerovnaných řad, hovoří následující věta, kterou v roce 1873 dokázal německý matematik Oscar Xavier Schlömilch.

Věta 4 (Schlömilch, [5]). *Nechť (a_n) je klesající posloupnost kladných reálných čísel taková, že existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ (vlastní, nebo nevlastní). Nechť s je součet řady (3), tj.*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

Pak přerovnaná řada (4), tj.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = & \underbrace{a_1 + a_3 + \dots + a_{2p-1}}_p - \underbrace{a_2 - a_4 - \dots - a_{2q}}_q \\ & + \underbrace{a_{2p+1} + a_{2p+3} \dots + a_{4p-1}}_p - \underbrace{a_{2q+2} - a_{2q+4} - \dots - a_{4q}}_q + \dots, \end{aligned}$$

má součet s' (konečný, nebo nekonečný), pro který platí

$$s' = s + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n a_n \ln \frac{p}{q} \right). \quad (15)$$

Důkaz věty se opírá o známou větu o střední hodnotě pro integrály.

Věta 5 (Theorem 3.16, [1]). *Nechť u je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$ a v je integrovatelná funkce na $\langle a, b \rangle$, která na něm nemění své znaménko. Pak existuje číslo $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = u(c) \int_a^b v(x) dx.$$

Důkaz věty 4. Nechť s_n , resp s'_n označuje n -tý částečný součet řady (3), resp (4). Nyní mohou nastat tři případy.

1. Je-li $p = q$, pak pro každé n existuje přirozené N , že platí $2pN < n \leq 2p(N + 1)$ a navíc

$$s_{2Np} < s'_n \leq s_{2Np} + a_{2Np+1} + a_{2Np+3} + \dots + a_{2Np+2p-1}.$$

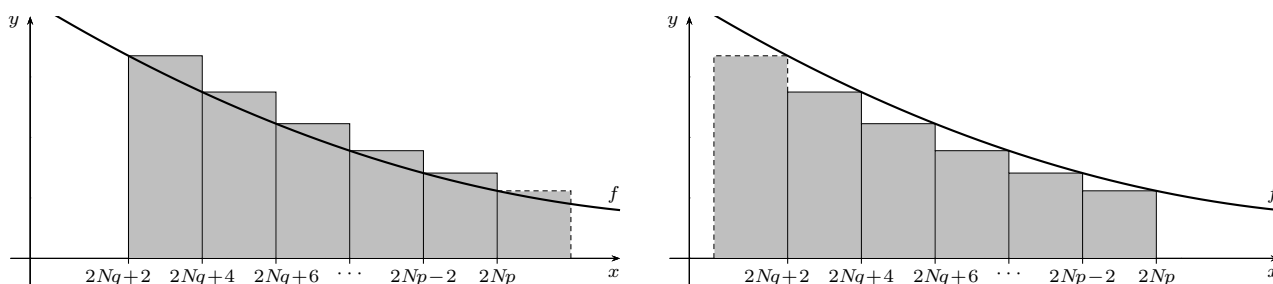
Z konvergence řady (3) plyne $a_n \rightarrow 0$, $s_n \rightarrow s$, a tedy $s'_n \rightarrow s$, což je ve shodě s (15), kde limitní člen je podle předpokladu $p = q$ nulový.

2. Je-li $p > q$, definujme kladnou klesající funkci f takovou, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$, $f(n) = a_n$ pro $n = 1, 2, \dots$ a $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$. Uvažujme částečný součet s'_n , kde $n = (p + q)N$, který obsahuje N bloků kladných a N bloků záporných členů řady (4), a částečný součet s_{2Np} , který obsahuje kromě jiných také veškeré kladné členy, které jsou obsaženy v $s'_{(p+q)N}$. Pak

$$s'_{(p+q)N} - s_{2Np} = a_{2Nq+2} + a_{2Nq+4} + \dots + a_{2Np}.$$

Rozdíl částečných součtů lze odhadnout z obou stran jednoduchými integrály funkce f , viz také Obrázek 1.

$$\frac{1}{2} \int_{2Nq+2}^{2Np} f(x) dx + a_{2Np} < s'_{(p+q)N} - s_{2Np} < \frac{1}{2} \int_{2Nq+2}^{2Np} f(x) dx + a_{2Nq+2}.$$



Obrázek 1: Dolní a horní odhad rozdílu $s'_{(p+q)N} - s_{2Np}$ integrálem

Po substituci $x = Nt$ dostáváme

$$\frac{1}{2} \int_{2q+\frac{2}{N}}^{2p} \frac{Nt \cdot f(Nt)}{t} dt + a_{2Np} < s'_{(p+q)N} - s_{2Np} < \frac{1}{2} \int_{2q+\frac{2}{N}}^{2p} \frac{Nt \cdot f(Nt)}{t} dt + a_{2Nq+2}.$$

Nyní použijeme větu o střední hodnotě pro integrály (věta 5), ve které položíme $u(t) = Nt \cdot f(Nt)$, $v(t) = 1/t$, $a = 2q + 2/N$ a $b = 2p$:

$$\frac{1}{2}Nc \cdot f(Nc) \cdot \ln \frac{p}{q} + a_{2Np} < s'_{(p+q)N} - s_{2Np} < \frac{1}{2}Nc \cdot f(Nc) \cdot \ln \frac{p}{q} + a_{2Nq+2},$$

kde $c \in (2q + \frac{2}{N}, 2p)$. Aplikací limitního přechodu pro $N \rightarrow \infty$ dostáváme

$$\frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(Nf(N) \ln \frac{p}{q} + a_{2Np} \right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} s'_{(p+q)N} - s \leq \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(Nf(N) \ln \frac{p}{q} + a_{2Nq+2} \right)$$

a odtud plyne

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s'_{(p+q)N} = s + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(na_n \ln \frac{p}{q} \right). \quad (16)$$

Pro ostatní indexy n lze vždy nalézt N takové, že $(p+q)N < n < (p+q)(N+1)$. Pak s'_n se liší od $s'_{(p+q)N}$ nejvýše o $p+q$ členů, tj.

$$|s'_n - s'_{(p+q)N}| < \sum_{k=1}^p a_{2(Np+k)-1} + \sum_{k=1}^q a_{2(Nq+k)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |s'_n - s'_{(p+q)N}| = 0.$$

Odtud a z (16) plyne tvrzení věty, tj.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(na_n \ln \frac{p}{q} \right).$$

3. Je-li $p < q$, odhadujeme pro změnu rozdíl $s_{2Np} - s'_{(p+q)N}$ a postupujeme podobně jako v případě 2.

□

Položíme-li $a_n = 1/\sqrt{n}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \infty$ a z věty 4 vyplývá, že jakékoliv přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ typu (p, q) diverguje k $+\infty$ pro $p > q$, resp. k $-\infty$ pro $p < q$, např.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots = +\infty.$$

Na druhou stranu pro $a_n = 1/(n \ln n)$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. Označíme-li s součet řady $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}/(n \ln n)$, pak jakékoliv její přerovnání typu (p, q) konverguje vždy k původnímu součtu s , např.

$$-\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{4 \ln 4} - \frac{1}{6 \ln 6} + \frac{1}{3 \ln 3} - \frac{1}{8 \ln 8} - \frac{1}{10 \ln 10} - \frac{1}{12 \ln 12} + \frac{1}{5 \ln 5} - \dots = s.$$

Nakonec vezmeme-li $a_n = 1/(2n-1)$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{1}{2}$. Z Taylorova rozvoje funkce $\arctan x$ plyne známá identita pro součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Z věty 4 plyne, že jakékoliv přerovnání této řady typu (p, q) má součet s' ve tvaru

$$s' = \frac{1}{4} \left(\pi + \ln \frac{p}{q} \right),$$

např.

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{3} + \frac{1}{17} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25} + \frac{1}{29} - \frac{1}{7} + \frac{1}{33} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{45} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Závěr

Teorie neabsolutně konvergentních řad patří mezi nedoceněné partie obecné teorie nekonečných řad. Skýtá široké spektrum pozoruhodných výsledků, jež lze navíc odvodit základním, popř. mírně pokročilým aparátem plně pokrytým základními kurzy matematické analýzy vyučované na vysoké škole. Předložené výsledky mohou sloužit zájemcům k hlubšímu pochopení nekonečných řad a mohou tak být vhodným námětem výběrových seminářů.

Reference

- [1] APOSTOL, Tom M. 1967. Calculus, Vol. 1. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- [2] KNOPP, Konrad. 1990. Theory and application of infinite series. Dover ed. New York: Dover Publications. Dover books on mathematics.
- [3] OHM, Martin. 1839. De nonnullis seriebus infinitis summandis Commentatio, Berlin.
- [4] PRINGSHEIM, Alfred. 1883. Über die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte, Mathematische Annalen 22, 455–503.
- [5] SCHLÖMILCH, Oscar Xavier. 1873. Über bedingt-convergierende Reihen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 18, 520–522.

DOBŘÁ PRAXE SUPPORT CENTRA PŘI VŠTE V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

SMETANOVÁ Dana, NÁHLÍK Tomáš, OPRŠAL Ivo, DUŠEK Zdeněk

VŠTE v Českých Budějovicích, Katedra informatiky a přírodních věd, Okružní 10 370 01 České Budějovice
e-mail: smetanova@mail.vstecb.cz

Abstrakt: V článku uvádíme příklady dobré praxe Support centra v Českých Budějovicích. Jedná se o opakovací hodiny připravované v předmětech matematického a fyzikálního základu, online kurz matematických základů fyziky, nebo matematicko-fyzikální, popř. statistické základy odborných předmětů jako například pro předmět Mechanika tekutin. Jako velice žádané se jeví různé formy popularizace matematiky a fyziky.

Klíčová slova: dobrá praxe, (online) konzultace, popularizace matematiky a fyziky

1 Úvod

Na vysokých školách technického směru se velmi často setkáváme s tím, že studenti nastupují do školy s nesourodými znalostmi, popřípadě mají chybně zafixované postupy u řešení různých úloh. Matematika je základem všech technických i ekonomických oborů a její dobré zvládnutí pomůže studentům i v jejich odborných předmětech.

Koncepce výuky matematiky na technických vysokých školách byla mnohokrát diskutována, např. [6]. Jednou z klíčových rolí podpory matematiky a statistiky, popřípadě fyziky je umožnit všem studentům dosáhnout jejich plného potenciálu ve zvoleném oboru tím, že jim pomůže rozvíjet znalosti, dovednosti a porozumění ve vztahu k matematice a statistice, popřípadě fyzice a sebevědomí při řešení problémů. Support centra byla založena s myšlenkou dopomoci studentům rozvinout a plně využít jejich potenciál ve studiu matematiky a statistiky [5].

V České republice je několik support center, které se věnují podpoře především předmětu základního kurzu z oblasti matematiky, statistiky a fyziky. Práce ostravského centra je popsána v [1], [2] a [7]. První rok práce centra v Českých Budějovicích je diskutován v [3].

V tomto článku uvádíme příklady dobré praxe ze Support centra v Českých Budějovicích. Inspirací nám byly webové stránky Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, na kterých jsou uvedené příklady dobře praxe na různých typech škol [4].

2 Příklady z praxe Support centra v Českých Budějovicích

V této kapitole zmíníme některé případy z praxe Support centra při VŠTE v Českých Budějovicích, o kterých se domníváme, že by mohly být inspirací do budoucna nejen pro členy našeho centra.

Do základního programu Budějovického Support centra patří tutoriály pro zájemce z řad studentů, které běží dle naplánovaného rozvrhu. Na základě zpětné vazby studentů, jsme do hlavní činnosti centra zařadili opakovací hodiny z matematiky a fyziky. V případě, že se naskytne vhodná příležitost, tak se podílíme na popularizačních akcích a jsme schopni nachystat mimořádné hromadné konzultace na základě požadavků a potřeb studentů.

2.1 Opakovací hodiny z fyziky a matematiky

Sylabus předmětů Fyzika a Fyzika I je velmi rozsáhlý. Fyzika pro studenty oborů Technologie a řízení dopravy a Pozemní stavby je v zimním semestru, Fyzika I pro studenty Strojírenství je v letním semestru. Studenti tento předmět vnímají jako náročný a mají problémy z něj složit zkoušku. Z tohoto důvodu v Support centru každý semestr pro studenty pořádáme opakovací hodiny. Hodiny se odehrávají prezenčně. Obvykle jsou třikrát za semestr.

První hodina bývá věnována rychlému shrnutí přednášek – Kinematika, Dynamika, Práce-Výkon-Energie, Tuhé Těleso. Druhá hodina se týká témat Gravitace, Kmitání, Vlnění, Akustika. Poslední opakovací hodina bývá před koncem semestru – témata: Mechanika tekutin, Kinetická teorie látek, Termika a Optika. V případě potřeby či žádosti studentů bývají opakovací hodiny z fyziky i v průběhu zkouškového období.

Z každého tématu bývají zopakovány základní poznatky, veličiny a vzorce, jejich uvedení do kontextu výpočtu možných příkladů. Zmíní se návazností a propojení jednotlivých kapitol. Z každého tématu vyřešen obecně alespoň jeden typový příklad. Dále bývají průběžně zodpovídány dotazy studentů. V průběhu opakovacích hodin je možnost počítání příkladů na přání – úlohy z průběžných testů i úlohy ze sbírky příkladů, která je používána na seminářích. Studenti téměř vždy projevují zájem o další opakovací hodiny.

Opakovací hodiny z Matematiky, Matematiky I a Matematiky II bývají online, obvykle ve všední den v podvečerních hodinách. Setkání se studenty probíhá prostřednictvím MS Teams, do kterých mají všichni studenti přístup díky zřízenému školnímu mailu. Stačí jim rozeslat emailem přístupový kód.

Hodiny probíhají jednou až dvakrát v průběhu semestru a jednou až dvakrát v průběhu zkouškového období. Opakovaná témata jsou vybírána na základě domluvy se studenty. Na závěr každé opakovací hodiny je prostor na libovolné dotazy. Tyto dotazy se nemusí vztahovat pouze k opakovanému tématu, mohou být i z jiných oblastí matematiky.

U opakovacích hodin z matematiky se velmi osvědčilo pořádat je online v podvečerních hodinách. Důvodem je velký počet studentů v kombinované formě, kteří jsou z různých koutů republiky. V některých letech se dokonce stávalo, že počet studentů v kombinované formě u daného oboru převyšoval počet studentů v prezenční formě. Ve chvíli, kdy byly opakovací hodiny přesunuty do online prostředí do podvečerních hodin, se stalo, že počet studentů prezenční formy na hodinách nebyl a přibýlo větší množství účastníků z kombinované formy. Studenti si oblíbili opakovací hodiny z matematiky zejména ve zkouškovém období.

Na opakovací hodiny z fyziky a matematiky chodí obvykle řádově desítky studentů. Občas se stává, že jich přijde jen kolem desítky. Je totiž velmi těžké určit termín vyhovující všem, občas se podaří vybrat nevhodný termín. Téměř všechny matematické a fyzikální předměty jdou napříč obory a studenti jsou děleni do velkého počtu skupin, proto i v rámci oboru mohou mít výrazně jiné rozvrhy.

2.2 Online hodina Matematické základy fyziky

Studenti oboru Strojírenství mají Fyziku II, která obsahuje základy elektromagnetické teorie. U zkoušky nastaly potíže zejména s parciálními derivacemi složené funkce a velkému počtu studentů se zkoušku nepodařilo složit. Studentům byla nabídnuta online hodina obsahující matematické základy fyziky.

Hodina byla připravena ve spolupráci vyučujícího předmětu Fyzika II s vyučující matematiky. Na této hodině byl vysvětlen kalkulus parciálních derivací, byly opakovány výpočty s operátory – gradient, divergence, rotace, vše bylo ilustrováno na jednoduchých příkladech z Fyziky II. Na závěr hodiny byl dán prostor na dotazy. V návaznosti na online lekci vysvětlující používaný matematický aparát se zvýšila úspěšnost studentů u zkoušky.

Na základě domluvy se studenty vznikl přehledný výukový text a videozáznam online lekce. Tyto materiály byly dány k dispozici studentům i v dalších semestrech. Takto vznikly nové podpůrné materiály pro předmět cílené na slabá místa v dovednostech studentů.

2.3 Online konzultace pro studenty předmětu Mechanika tekutin

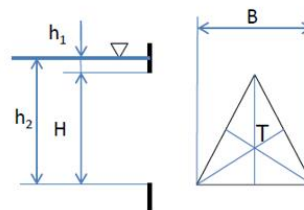
Do Support centra přišlo několik studentů oboru Strojírenství, že mají problém s příkladem ze semináře Mechanika tekutin. Přišli se informovat, zda bychom jim mohli poradit s výpočtem části příkladu (viz. Obr. 1).

Příklad

Ve svislé stěně je trojúhelníkový otvor o rozměrech B a H . Hloubka otvoru pod hladinou je h_1 . Výtokový součinitel je μ . Určete množství vody, které protéká tímto otvorem. Zanedbejte vliv přítokové rychlosti. Jaké chyby Δ bychom se dopustili, kdybychom uvažovali konstantní rychlost, rovnou rychlosti v těžišti otvoru (T) ?

D: $h_1 = 0,05$ m $B = 0,4$ m
 $\mu = 0,7$ $H = 0,3$ m

U: $\dot{V}_{SK}, \dot{V}_T, \Delta$



Obr 1. Zadaný příklad v předmětu Mechanika tekutin

K zadanému příkladu také donesli vzorec $\dot{V} = \mu \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gh} \cdot b(h) \cdot dh$ pro výpočet výtoku velkým otvorem, který měli použít k vyřešení části příkladu.

Z rozhovoru se studenty bylo zřejmé, že nerozumí zejména tomu, co znamená funkce $b(h)$. Navíc se zmínili, že takových studentů, kteří tomu nerozumí je více. Domluvili jsme se na online konzultaci, která proběhla následující den.

Konzultace byla konána se šesti studenty formou brainstormingu. Po prozrazení faktu, že funkce $b(h)$ popisuje průměr otvoru v závislosti na hloubce a následném odvození funkce, už bylo pro studenty jednoduché spočítat integrál, tedy průtok vody otvorem.

3 Popularizační akce

Support centrum a Katedra informatiky a přírodních věd se účastní také různých popularizačních akcí. Jedná se zejména o Noc vědců a spolupráci s Mateřskou a základní školou při VŠTE v Českých Budějovicích.

Od roku 2019 se pravidelně účastníme Noci vědců. V rámci této akce jsme představili různé zajímavosti z oblasti matematiky a fyziky. Z matematiky se jednalo například o různé hříčky a hlavolamy, mozaiky, stereogramy, anaglyfy, fraktály. Z oblasti fyziky byly předvedeny přesýpací a vodní hodiny (klepsydra), jednoduché stroje, Neneutonovská kapalina a další.



Obr. 2. Kreslení planet s žáky mateřské školy

Na základě domluvy s ředitelkou Základní a mateřské školy VŠTE, s.r.o. od roku 2021 děláme zhruba jedenkrát měsíčně akci pro žáky mateřské a základní školy. Jedná se vždy o 45 až 60 minut pro každou skupinu. Každé setkání s dětmi je připraveno na nějaké konkrétní téma, které se vztahuje ke vzdělávacímu plánu. Zmíníme alespoň některá z nich: Obnovitelné zdroje (názorné předvedení principů elektráren – vodní, větrné, sluneční), Vesmír a kosmonautika (kreslení planet viz. Obr. 2, házení vlašťovkami s různými aerodynamickými vlastnostmi, odpálení rakety), Povrchy a sítě těles (poznávání o jaké těleso se jednalo), Počasí (jak vzniká duha, déšť, hrom a blesk).

Závěr

Vnímáme jako velmi důležité uvádět příklady z dobré praxe a to, že se podělíme o zkušenosti. Naše centrum je specifické v tom, že mále málo vyučujících v centru, což souvisí s tím, že na katedře je celkově málo vyučujících na matematiku, fyziku a statistiku. Z tohoto důvodu se snažíme pracovat tak, abychom zvládli v rámci jedné akce pomoci co nejvíce studentům a maximalizovat profit z pořádané akce. Příkladem jsou opakovací hodiny, které mohou využít desítky studentů zároveň a mohou se jich účastnit i studenti kombinované formy. Dalším příkladem, jak mít co největší profit z uspořádané akce je online hodina z matematických základů fyziky. Proběhla online opakovací hodina a z ní vznikly zároveň podpůrné výukové materiály.

Tyto příklady mohou inspirovat jiná pracoviště a samozřejmě vedou k zamyšlení pro osoby na pracovišti, na kterém se odehrály.

Odkazy

- [1] HAMŘÍKOVÁ, R., KOTŮLEK, J., ŽÍDEK, A. MATH SUPPORT CENTRE AT TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA. *Cross-border exchange of experience in production engineering using principles of mathematics*. P.A. NOVA S.A., 2017, **6**(4), s. 257-262. ISSN 0000-0000.
- [2] HAMŘÍKOVÁ, Radka, Jan KOTŮLEK a Arnošt ŽÍDEK. Běžný den v Math Support Centre. In: *Sborník z 26. semináře Moderní matematické metody v inženýrství: 22.1. - 24.1.2018*, Horní Lomná, Česko. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2018. s. 78-83. ISBN 978-80-248-4135-9.
- [3] NÁHLÍK, T., SMETANOVÁ, D. First-year of Support centre at the Institute of Technology and Business. *ICERI 2020*, Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres. *ICERI 2020 PROCEEDINGS*. Španělsko: IATED Academy, 2020. s. 3175-3179. ISBN 978-84-09-24232-0.
- [4] MŠMT, 2013-2023, Příklady dobré praxe [online] [cit. 2023-04-10]. Dostupné z: <https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/priklady-dobre-praxe>
- [5] Sigma network for excellence in mathematics and statistics support [online] [cit. 2023-04-10]. Dostupné z: <https://www.sigma-network.ac.uk/about/mathematics-and-statistics-support-centres>
- [6] VOLNÝ, P., SCHREIBEROVÁ, P. Koncepce výuky matematiky na VŠB – TU. *Užití počítačů ve výuce matematiky : sborník příspěvků 7. konference : 5. - 7. listopadu 2015, České Budějovice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2015. s. 219-226. ISBN 978-80-7394-549-7.
- [7] ŽÍDEK, A., KOTŮLEK, J. Tutorials in the math support centre at the technical university of Ostrava. *APLIMAT 2019 : 18th Conference on Applied Mathematics: proceedings : February 5-7, 2019, Bratislava, Slovak Republic*. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 2019. s. 1352-1359. ISBN 978-80-227-4884-1.

PŘÍKLADY KINEMATICKÝCH VAZEB NEOVLIVŇUJÍCÍCH POHYB ČÁSTICE

SWACZYNA Martin*, VOLNÝ Petr**

*Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, 17. listopadu 15, 708 00 Ostrava-Poruba

**Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra matematiky, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail na hlavního autora: martin.swaczyna@vsb.cz

Abstrakt: Studujeme typové mechanické systémy jedné částice podrobené jedné kinematické vazbě. Zaměřujeme se na případy, kdy kinematická vazba neovlivňuje pohyb částice, tedy kdy výsledná dynamika částice je stejná, jako by částice nebyla podrobená žádné vazbě. Takovou vazbu označujeme jako pohyb neovlivňující, neboli ignorabilní vazbu. Ignorabilita vazby může být způsobena vlivem specifických počátečních podmínek (specifická ignorabilita) nebo je důsledkem toho, jak vypadají pohybové rovnice a jejich zákony zachování (obecná ignorabilita).

Klíčová slova: pohybové rovnice, integrál pohybu, zákon zachování, kinematická vazba, Che-taevova vazebná síla, Lagrangeův multiplikátor, vázané (deformované) pohybové rovnice, ignorabilní vazba, specifická ignorabilita, obecná ignorabilita.

1 Úvod

Motivací k napsání tohoto příspěvku bylo zjištění, že při studiu dynamiky vázaných mechanických systémů se vyskytnul jistý speciální druh kinematické vazby, která neovlivňovala pohyb studovaného mechanického systému, tzn. mechanický systém se pod vlivem takové vazby choval, jako by byl nevázaný. Takový druh vazby jsme nazvali pohyb neovlivňující neboli *ignorabilní vazba*. Trajektorie obou mechanických systémů, tedy původního nevázaného systému a stejného systému podrobeného ignorabilní vazbě, jsou stejné. Význam ignorabilní vazby pak spočívá jen v omezení možných počátečních podmínek mechanického systému, které musí být kompatibilní s ignorabilní vazbou v tom smyslu, že musí splňovat rovnici takové vazby.

Omezíme se na mechanické systémy jedné částice. Částicí rozumíme těleso s malými rozměry a s nenulovou hmotností. Zanedbáváme tak problematiku rotace tělesa a odpadá i hledisko změny tvaru, tedy deformace tělesa. Zaměřujeme se jen na pohyb částice podél trajektorie.

Dodatečná podmínka svazující komponenty x, y, z okamžité polohy \mathbf{r} a komponenty $v_x = \dot{x}$,

$v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ okamžité rychlosti \mathbf{v} částice ve tvaru

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0 \quad (1)$$

se nazývá *kinematická vazba*. Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu vzhledem ke komponentám x, y, z okamžité polohy \mathbf{r} částice. V případě, že vazebná podmínka (1) závisí pouze na komponentách $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ okamžité rychlostí \mathbf{v} částice, tzn.

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \quad (2)$$

hovoříme o *čistě rychlostní kinematické vazbě*.

Pohyb částice podrobené kinematické vazbě (1), resp. (2) je ovlivněn přítomností tzv. *Chetaevovy vazebné síly*,

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (3)$$

kde μ je Lagrangeův multiplikátor. Na pravých stranách pohybových rovnic se tak navíc vyskytnou komponenty Chetaevovy síly (3).

Dynamika vázaného pohybu a odpovídající vázané trajektorie tedy hledáme mezi nevázanými trajektoriemi (řešeními nevázaných pohybových rovnic), které jsou nyní deformovány vektorovým polem vazebné síly Φ (3) pro vhodný Lagrangeův multiplikátor $\mu(t)$, tak aby byla v každém okamžiku splněna vazebná podmínka (1), resp. (2).

Speciálně může být

$$\mu = 0$$

podél každé vázané trajektorie. V tom případě kinematická vazba neovlivňuje pohyb, je tzv. ignorabilní. Potom je každá vázaná trajektorie nedeformovaná, tedy stejná jako nevázaná, a je prvkem množiny řešení odpovídajících nevázaných pohybových rovnic (nevázaných trajektorií). Význam ignorabilní vazby potom spočívá jen v tom, že počáteční podmínky jsou omezeny vazebnou podmínkou (1), resp. (2), tudíž

$$f(x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = 0, \quad \text{resp.} \quad f(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = 0.$$

Ignorabilita vazby (1), resp. (2) může být způsobena jednak vlivem specifických počátečních podmínek splňujících rovnici kinematické vazby, kdy je Lagrangeův multiplikátor μ identicky roven nule jen podél těchto odpovídajících specifických vázaných trajektorií, nebo za druhé může být Lagrangeův multiplikátor identicky roven nule podél každé vázané trajektorie (splňující rovnici vazby). V prvním případě hovoříme o *specifické ignorabilitě* vazby, ve druhém případě se jedná o *obecnou ignorabilitu* kinematické vazby (1), resp. (2).

2 Kinematické vazby neovlivňující pohyb v tíhovém poli - obecná ignorabilita

Uvažujme mechanický systém jedné částice hmotnosti m v homogenním tíhovém poli. Polohu a pohyb částice vyšetřujeme vzhledem ke kartézskému souřadnicovému systému, kde kladná poloosa osy z míří svisle vzhůru, tedy opačně k poli tíhové síly $\mathbf{F}_G = (0, 0, -mg)$ působící svisle dolů. Konstanta $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení. Pohyb částice je popsán Newtonovou pohybovou rovnicí

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G,$$

kterou lze rozepsat do složek pro jednotlivé souřadnice

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned} \quad (4)$$

Pohybové rovnice (4) se řeší postupnou integrací. Po první integraci rovnic systému (4) máme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1, \\ \dot{y} &= C_2, \\ \dot{z} &= -gt + C_3, \end{aligned} \quad (5)$$

kde integrační konstanty C_1, C_2, C_3 , jsou určeny počátečními podmínkami na komponenty rychlosti

$$C_1 = v_{0x} = \dot{x}(0), \quad C_2 = v_{0y} = \dot{y}(0), \quad C_3 = v_{0z} = \dot{z}(0). \quad (6)$$

Po další integraci rovnic (5) dostáváme obecné řešení soustavy rovnic (4)

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 t + D_1, \\ y(t) &= C_2 t + D_2, \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + D_3, \end{aligned} \quad (7)$$

kde integrační konstanty D_1, D_2, D_3 , jsou určeny počáteční polohou částice

$$D_1 = x(0) = x_0, \quad D_2 = y(0) = y_0, \quad D_3 = z(0) = z_0. \quad (8)$$

Podle velikosti, směru a orientace vektoru počáteční rychlosti potom dostáváme typické pohyby: volný pád, vrh svislý vzhůru nebo dolů, vrh vodorovný a vrh šikmý vzhůru nebo dolů.

Zabývejme se nyní otázkou, jaká dodatečná vazebná podmínka svazující kartézské komponenty $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ vektoru okamžité rychlosti \mathbf{v} částice, tzn. kinematická čistě rychlostní vazba $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ neomezí výsledný pohyb částice v homogenním tíhovém poli.

2.1 Příklad 1

Nejdříve podrobíme částici v homogenním tíhovém poli čistě rychlostní kinematické vazbě

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = k, \quad k \neq 0, \quad (9)$$

kde kladná konstanta k je předem zadaná. Vyjádřeno slovně požadujeme, aby kvadrát $|\mathbf{v}_{xy}|^2$ velikosti průmětu \mathbf{v}_{xy} vektoru okamžité rychlosti \mathbf{v} do roviny xy zůstal v průběhu pohybu konstantní.

Vázané (deformované) pohybové rovnice mají společně s rovnicí vazby (9) tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2\mu\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 2\mu\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= -mg, \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= k. \end{aligned} \quad (10)$$

Lagrangeův multiplikátor μ lze vyjádřit z první nebo druhé rovnice systému (10)

$$\mu = \frac{m\ddot{x}}{\dot{x}}, \quad \mu = \frac{m\ddot{y}}{\dot{y}}. \quad (11)$$

Soustavu rovnic (10) je možné řešit postupnou integrací. Dostáváme tři možná obecná řešení.

1. Jestliže $v_{0x} = \dot{x}(0) = 0$, pak $\dot{x}(t) = 0$ a vzhledem k vazebné podmínce (9) platí $\dot{y}(t) = \pm\sqrt{k}$. Po integraci dostáváme

$$x(t) = D_1, \quad y(t) = \pm\sqrt{k}t + D_2, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + D_3. \quad (12)$$

V tomto případě je možné pro multiplikátor μ použít pouze vyjádření $\mu = \frac{m\ddot{y}}{2\dot{y}} = 0$.

2. Jestliže $v_{0y} = \dot{y}(0) = 0$, pak $\dot{y}(t) = 0$ a vzhledem k vazebné podmínce (9) platí $\dot{x}(t) = \pm\sqrt{k}$. Po integraci dostáváme

$$x(t) = \pm\sqrt{k}t + D_1, \quad y(t) = D_2, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + D_3. \quad (13)$$

V tomto případě je možné pro multiplikátor μ použít pouze vyjádření $\mu = \frac{m\ddot{x}}{2\dot{x}} = 0$.

3. Jestliže $v_{0x} = \dot{x}(0) \neq 0$, $v_{0y} = \dot{y}(0) \neq 0$ lze v každém okamžiku použít jedno z možných vyjádření multiplikátoru μ (11). Převedením této rovnice na totální časovou derivaci dostáváme integrál pohybu, tedy výraz který je konstantní podél řešení pohybových rovnic

$$\frac{d}{dt} \ln |\dot{x}| = \frac{d}{dt} \ln |\dot{y}| \implies \frac{|\dot{x}|}{|\dot{y}|} = K = \frac{|\dot{x}(0)|}{|\dot{y}(0)|} \implies |\dot{x}| = K|\dot{y}|, \quad (14)$$

v našem příkladu je to poměr absolutních hodnot komponent x -ové a y -ové složky okamžité rychlosti, který se v průběhu pohybu zachovává. Po dosazení do rovnice vazby (9) dostáváme

$$\dot{y}^2 = \frac{k}{K^2 + 1} \implies \dot{y} = \pm\sqrt{\frac{k}{K^2 + 1}}. \quad (15)$$

Po integraci rovnic (15) a (14) v tomto pořadí dostáváme

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{k}{K^2 + 1}}t + D_2, \quad x(t) = \pm K\sqrt{\frac{k}{K^2 + 1}}t + D_1. \quad (16)$$

Integrační konstanty D_1 , D_2 lze určit z podmínek pro počáteční polohu částice x_0 , y_0 . Lagrangeův multiplikátor μ (11) je evidentně roven nule, $\mu = 0$. Řešení pro svislou komponentu okamžité polohy $z(t)$ zůstává stejné jako v nevázaném případě

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + D_3. \quad (17)$$

Existují rovněž dvě možnosti, jak systém pohybových rovnic (10) upravit. Pokud první rovnici systému (10) vynásobíme \dot{x} , druhou rovnici systému (10) vynásobíme \dot{y} a obě rovnice sečteme, dostáváme

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 2\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (18)$$

Uplatněním vazebné podmínky (9) a úpravou výrazu na levé straně rovnice (18) na totální časovou derivaci obdržíme

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2\mu k. \quad (19)$$

Přihlédneme-li znovu k vazebné podmínce (9), dostáváme

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(k) = 2\mu k. \quad (20)$$

Jelikož totální časová derivace konstanty je rovna nule a $k \neq 0$, musí platit

$$\mu = 0. \quad (21)$$

Druhou možností je rovnici vazby (9) zderivovat totálně podle času,

$$\frac{df}{dt} = 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = 0 \quad (22)$$

a dosadit do (22) za \ddot{x} a \ddot{y} první dvě deformované rovnice systému (10),

$$\frac{4\mu}{m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0. \quad (23)$$

Vzhledem k rovnici vazby (9) a nenulovosti konstant k a m platí

$$\frac{4\mu}{m}k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0. \quad (24)$$

Jelikož $\mu = 0$ identicky, soustava vázaných pohybových rovnic (10) přechází na soustavu původních nevázaných pohybových (4). Každé řešení soustavy vázaných rovnic (10) je rovněž řešením systému původních nevázaných rovnic (4). Ovšem obráceně řešení systému původních nevázaných rovnic (4) je řešením systému vázaných rovnic (10) právě tehdy, když počáteční podmínky splňují vazebnou podmínku

$$\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0) = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = |\mathbf{v}_{0xy}|^2 = k. \quad (25)$$

Vazba (9) je ignorabilní, představuje pouze omezení, resp. výběr přípustných počátečních podmínek, hodnota kvadrátu $|\mathbf{v}_{0xy}|^2$ velikosti průmětu $|\mathbf{v}_{0xy}|$ vektoru počáteční rychlosti \mathbf{v}_0 do roviny xy se musí rovnat konstantě k v rovnici vazby (9).

Fakt, že vazba (9) je ignorabilní, je přímým důsledkem zákonů zachování prvních dvou nevázaných pohybových rovnic systému (4). Na první dvě zintegrované rovnice (5) lze totiž nahlížet jako na zákony zachování x -ové a y -ové komponenty okamžité rychlosti \mathbf{v} částice. Dále násobením první rovnice systému (4) výrazem \dot{x} a druhé rovnice výrazem \dot{y} a sečtením obou rovnic dostáváme

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = m \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = C = C_1^2 + C_2^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = k. \quad (26)$$

Vazebná podmínka (9) tedy plyne přímo z nevázaných pohybových rovnic (4), takže jako dodatečná vazebná podmínka omezující pohyb částice je redundantní, redukuje se pouze na omezení možných počátečních podmínek (25) resp. (26).

2.2 Příklad 2

V tomto příkladu podrobíme pohyb částice v tíhovém poli čistě rychlostní kinematické vazbě

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}\dot{y} = k, \quad k > 0. \quad (27)$$

Slovně vyjádřeno požadujeme, aby součin x -ové $v_x = \dot{x}$ a y -ové komponenty $v_y = \dot{y}$ vektoru okamžité rychlosti \mathbf{v} zůstal v průběhu pohybu konstantní, tzn. komponenty v_x , v_y okamžité rychlosti \mathbf{v} musí být současně buď obě kladné, nebo obě záporné.

Vázané (deformované) pohybové rovnice mají společně s rovnicí vazby tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \mu \dot{y}, \\ m\ddot{y} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \mu \dot{x}, \\ m\ddot{z} &= -mg, \\ \dot{x}\dot{y} &= k. \end{aligned} \quad (28)$$

Soustavu rovnic (28) lze vyřešit využitím zákona zachování a následně postupnou integrací. Pokud první rovnici systému (28) vynásobíme \dot{x} , druhou rovnicí systému (28) vynásobíme \dot{y} a obě rovnice sečteme, dostáváme

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 2\mu\dot{x}\dot{y}. \quad (29)$$

Uplatněním vazebné podmínky (27) na pravé straně rovnice (29) a úpravou výrazu na levé straně rovnice (29) na totální časovou derivace získáme

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2\mu k. \quad (30)$$

Dále, první rovnici systému (28) vynásobíme \dot{x} , druhou rovnicí systému (28) vynásobíme \dot{y} a rovnice od sebe odečteme, získáme

$$m(\dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0. \quad (31)$$

Výraz $\dot{x}^2 - \dot{y}^2$ je tedy konstantou pohybu (zákonem zachování) a jeho hodnota se rovná hodnotě v počátečním okamžiku

$$\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = K = \dot{x}(0)^2 - \dot{y}(0)^2 = v_{0x}^2 - v_{0y}^2. \quad (32)$$

Sečtením a odečtením rovnic (30) a (31) dostáváme

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2) &= 2\mu k, \\ m \frac{d}{dt}(\dot{y}^2) &= 2\mu k. \end{aligned} \quad (33)$$

Lagrangeův multiplikátor μ může být opět vyjádřen alternativně jedním z následujících způsobů,

$$\mu = \frac{m}{2k} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = \frac{m}{2k} \frac{d}{dt}(\dot{y}^2). \quad (34)$$

Z rovnice vazby (27) vyjádříme $\dot{y} = k/\dot{x}$ a dosadíme do zákona zachování (32),

$$\dot{x}^2 - \frac{k^2}{\dot{x}^2} = K. \quad (35)$$

Tuto rovnici upravíme na bikvadratickou rovnici

$$\dot{x}^4 - K\dot{x}^2 - k^2 = 0, \quad (36)$$

která se po substituci $\xi = \dot{x}^2$ redukuje na kvadratickou rovnici

$$\xi^2 - K\xi - k^2 = 0 \quad (37)$$

s diskriminantem $D = K^2 + 4k^2 > 0$. Vzhledem k substituci $\xi = \dot{x}^2$ má smysl pouze kladný kořen rovnice (37),

$$\xi = \frac{K + \sqrt{K^2 + 4k^2}}{2} \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{K + \sqrt{K^2 + 4k^2}}{2}} = \text{const.} \quad (38)$$

Po integraci dostáváme časovou závislost x -ové souřadnice polohy částice

$$x(t) = \sqrt{\frac{K + \sqrt{K^2 + 4k^2}}{2}} t + D_1. \quad (39)$$

Z rovnice vazby (27) dopočítáme časovou závislost y -ové komponenty rychlosti částice

$$\dot{y} = \frac{k}{\dot{x}} = \frac{k}{\sqrt{\xi}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{K + \sqrt{K^2 + 4k^2}}{2}}} = \text{const.} \quad (40)$$

a po její integraci obdržíme rovněž časovou závislost y -ové souřadnice polohy částice

$$y(t) = \frac{k}{\sqrt{\frac{K + \sqrt{K^2 + 4k^2}}{2}}} t + D_2. \quad (41)$$

Evidentně je Lagrangeův multiplikátor μ (34) roven nule, viz vztahy (38),(40). Časová závislost pro svislou souřadnici $z(t)$ zůstává stejná jako v nevázaném případě,

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + D_3. \quad (42)$$

Druhou možností je nejdříve rovnici vazby (27) zderivovat,

$$\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} = 0 \quad (43)$$

a potom dosadit do (43) za \ddot{x} , \ddot{y} z prvních dvou deformovaných rovnic systému (28),

$$\frac{\mu\dot{y}}{m}\dot{y} + \dot{x}\frac{\mu\dot{x}}{m} = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0. \quad (44)$$

Z rovnice vazby (27) plyne, že v každém okamžiku je $\dot{x} \neq 0$ nebo $\dot{y} \neq 0$, a tedy výraz $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ vždy. Takže rovnice (44) bude splněna pouze, když $\mu = 0$. Vazba (27) je tedy ignorabilní, řešení

(39), resp. (38) a (41), resp. (40) představuje pouze omezení nebo výběr přípustných počátečních podmínek,

$$\dot{x}(0)\dot{y}(0) = v_{0x}v_{0y} = k. \quad (45)$$

Fakt, že vazba (27) je ignorabilní, je přímým důsledkem zákonů zachování prvních dvou nevázaných pohybových rovnic systému (4), zákonů zachování x -ové a y -ové komponenty okamžité rychlosti částice, $v_x = \dot{x} = C_1$, $v_y = \dot{y} = C_2$, tudíž

$$v_x v_y = \dot{x} \dot{y} = C = C_1 C_2 = v_{0x} v_{0y} = k. \quad (46)$$

Vazebná podmínka (27) tedy plyne přímo z nevázaných pohybových rovnic (4), takže jako dodatečná vazebná podmínka omezující pohyb částice je redundantní, redukuje se pouze na omezení integračních konstant C_1 , C_2 , resp. možných počátečních podmínek (45) resp. (46) pro komponenty v_{0x} , v_{0y} počáteční rychlosti.

Příklad 3

V tomto příkladu bude částice v homogenním tíhovém poli podrobená kinematické čistě rychlostní vazbě

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = k^2, \quad k \neq 0. \quad (47)$$

Slovně vyjádřeno požadujeme, aby se částice pohybovala rovnoměrně, tzn. aby velikost $v = |\mathbf{v}|$ okamžité rychlosti zůstávala v průběhu pohybu konstantní. Vazbu (47) nazýváme *izotachytonní vazbou*. Termín izotachytonní vznikl spojením slov izo=stejný a řeckého slova tachytita $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha$ ve významu rychlost.

Případ rovnoměrného pohybu částice v homogenním tíhovém poli je úplně vyřešen a detailně diskutován včetně kinematiky, dynamiky a energetické bilance pohybu částice v článku [2], kde je tento pohyb studován bez újmy na obecnosti v souřadnicové rovině xy , tzn., že roli svislé souřadnice z hraje v tomto článku souřadnice y .

Ukážeme, že izotachytonní vazba (47) nemůže být za žádných počátečních podmínek ignorabilní. Vázané (deformované) pohybové rovnice mají společně s rovnicí vazby tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2\mu\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 2\mu\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= -mg + 2\mu\dot{z}, \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= k^2. \end{aligned} \quad (48)$$

První rovnici systému (48) vynásobíme \dot{x} , druhou rovnicí vynásobíme \dot{y} a třetí rovnicí vynásobíme \dot{z} a tyto tři rovnice sečteme,

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) + mg\dot{z} = 2\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (49)$$

Úpravou výrazu na levé straně rovnice (49) na totální časovou derivaci a uplatněním vazebné podmínky (47) na pravé straně rovnice (49) získáme

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mg\dot{z} = 2\mu k^2. \quad (50)$$

Znovu aplikujeme vazebnou podmínku (47) a dostáváme

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(k^2) + mg\dot{z} = 2\mu k^2 \Rightarrow mg\dot{z} = 2\mu k^2 \Rightarrow \mu = \frac{mg\dot{z}}{2k^2}. \quad (51)$$

Po dosazení vyjádřeného Lagrangeova multiplikátoru μ do třetí deformované rovnice systému (48) obdržíme diferenciální rovnici jen pro jednu neznámou $z(t)$,

$$\ddot{z} = -g + \frac{g\dot{z}^2}{k^2} = -\frac{g}{k^2}(k^2 - \dot{z}^2). \quad (52)$$

Rovnici (52) řešíme nejdříve substitucí $\dot{z} = w(t)$ za účelem redukce jejího řádu

$$\dot{w} = -\frac{g}{k^2}(k^2 - w^2). \quad (53)$$

Po separaci proměnných

$$\frac{dw}{k^2 - w^2} = -\frac{g}{k^2}dt \quad (54)$$

a následné integraci dostáváme

$$\frac{1}{2k} \ln \frac{k+w}{k-w} = -\frac{g}{k^2}t + C. \quad (55)$$

Po odlogaritmování poslední rovnice obdržíme

$$\frac{k+w}{k-w} = e^{2(-\frac{g}{k}t + Ck)}, \quad (56)$$

z níž vyjádříme $w(t)$, tedy časovou závislost z -ové komponenty okamžité rychlosti

$$w(t) = \dot{z}(t) = k \frac{e^{2(-\frac{g}{k}t + Ck)} - 1}{e^{2(-\frac{g}{k}t + Ck)} + 1}. \quad (57)$$

Uplatněním identity

$$\tanh X = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} = \frac{e^{2X} - 1}{e^{2X} + 1} \quad (58)$$

lze vztah (57) vyjádřit v alternativním tvaru

$$w(t) = \dot{z}(t) = k \tanh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right), \quad (59)$$

kde integrační konstanta C je určena počáteční podmínkou pro z -ovou komponentu počáteční rychlosti, $\dot{z}(0) = v_z(0) = v_{0z}$,

$$C = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{k + v_{0z}}{k - v_{0z}} \right). \quad (60)$$

Závislost $\dot{z}(t)$ (57) dosadíme do vztahu (51) pro Lagrangeův multiplikátor μ a dostaneme tak explicitní vyjádření multiplikátoru μ v závislosti na čase

$$\mu(t) = \frac{mg}{2k} \tanh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right). \quad (61)$$

Vyjádření multiplikátoru (61) dosadíme do prvních dvou rovnic systému (48) zapsaných v mírně upraveném tvaru

$$\begin{aligned} m \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} &= m \frac{d}{dt} \ln |\dot{x}| = 2\mu = \frac{mg}{k} \tanh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right), \\ m \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} &= m \frac{d}{dt} \ln |\dot{y}| = 2\mu = \frac{mg}{k} \tanh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right), \end{aligned} \quad (62)$$

a následně postupně integrujeme. Po první integraci obdržíme

$$\begin{aligned} \ln |\dot{x}| &= -\ln \left(\cosh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right) \right) + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{C_1}{\cosh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right)}, \\ \ln |\dot{y}| &= -\ln \left(\cosh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right) \right) + \ln C_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = \frac{C_2}{\cosh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right)}, \end{aligned} \quad (63)$$

kde integrační konstanty C_1, C_2 jsou určeny komponentami v_{0x}, v_{0y} počáteční rychlosti,

$$C_1 = v_{0x} \cosh(kC) = \frac{kv_{0x}}{\sqrt{k^2 - v_{0z}^2}}, \quad C_2 = v_{0y} \cosh(kC) = \frac{kv_{0y}}{\sqrt{k^2 - v_{0z}^2}}.$$

Po druhé integraci potom dostáváme

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1 \frac{k}{g} \arctan \left[\exp \left(-\frac{g}{k}t + kC \right) \right] + D_1, \\ y(t) &= -C_2 \frac{k}{g} \arctan \left[\exp \left(-\frac{g}{k}t + kC \right) \right] + D_2. \end{aligned} \quad (64)$$

Časovou závislost z -ové souřadnice okamžité polohy získáme přímou integrací (59)

$$z(t) = -\frac{k^2}{g} \ln \left[\cosh \left(-\frac{g}{k}t + kC \right) \right] + D_3. \quad (65)$$

Integrační konstanty D_1, D_2, D_3 lze určit na základě souřadnic počátečních polohy x_0, y_0, z_0 .

Aby získaná řešení (64) a (65) splňovala vazebnou podmínku (47) pro každé t , musí rovněž integrační konstanty C_1, C_2, C , respektive komponenty v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} počáteční rychlosti splňovat vazebnou podmínku (47), tzn.

$$C_1^2 + C_2^2 = v_{0x}^2 \cosh^2(kC) + v_{0y}^2 \cosh^2(kC) = k^2, \quad \text{kde} \quad C = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{k + v_{0x}}{k - v_{0x}} \right).$$

Skutečně

$$C_1^2 + C_2^2 = \frac{k^2 v_{0x}^2}{k^2 - v_{0z}^2} + \frac{k^2 v_{0y}^2}{k^2 - v_{0z}^2} = \frac{k^2 (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)}{k^2 - v_{0z}^2} = k^2,$$

jelikož z vazebné podmínky (47) plyne vztah pro kvadrát z -ové komponenty okamžité rychlosti

$$v_z^2 = \dot{z}^2 = k^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = k^2 - v_x^2 - v_y^2,$$

který musí platit rovněž pro kvadrát z -ové komponenty počáteční rychlosti

$$v_{0z}^2 = k^2 - v_{0x}^2 - v_{0y}^2.$$

Získané řešení (64), (65) soustavy vázaných rovnic (48) v homogenním tíhovém poli s vazbou (47) je evidentně výrazně odlišné od řešení (7) nevázaných rovnic v homogenním tíhovém poli. Je zřejmé, že Lagrangeův multiplikátor (61) není identicky roven nule podél žádné trajektorie. Vazba (47) tedy není ignorabilní ani pro specifické počáteční podmínky.

Výsledky těchto příkladů jsou přímým důsledkem následující věty.

Věta 1: *Kinematická čistě rychlostní vazba $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ je pro mechanický systém částice v homogenním tíhovém poli ignorabilní právě tehdy, když je tvaru*

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathcal{F}(\dot{x}, \dot{y}) - k = 0, \quad (66)$$

kde \mathcal{F} je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. Takové vazby představují pouze omezení

$$\mathcal{F}(v_{0x}, v_{0y}) = k \quad (67)$$

možných počátečních podmínek pro komponenty v_{0x} , v_{0y} vektoru počáteční rychlosti.

Důkaz: Uvažujme obecnou kinematickou čistě rychlostní vazbu

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (68)$$

Deformované pohybové rovnice částice v homogenním tíhovém poli pod vlivem této vazby jsou

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \\ m\ddot{y} &= \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}, \\ m\ddot{z} &= -mg + \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}. \end{aligned} \quad (69)$$

Vazbu (68) zderivujeme totálně podle t ,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \ddot{z} = 0 \quad (70)$$

a dosadíme za \ddot{x} , \ddot{y} a \ddot{z} pravé strany deformovaných rovnic (69), dostáváme

$$\frac{\mu}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)^2 + \frac{\mu}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)^2 + \frac{\mu}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right)^2 - g \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0. \quad (71)$$

Z předchozí rovnice (71) vyjádříme Lagrangeův multiplikátor,

$$\mu = \frac{mg \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right)^2}. \quad (72)$$

Aby kinematická čistě rychlostní vazba (68) byla ignorabilní, musí být Lagrangeův multiplikátor μ identicky roven nule podél každé vázané trajektorie. Tedy

$$\mu = 0 \Leftrightarrow mg \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0 \Leftrightarrow f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathcal{F}(\dot{x}, \dot{y}) - k, \quad (73)$$

kde \mathcal{F} je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. Komponenty počáteční rychlosti $v_{0x} = \dot{x}(0)$, $v_{0y} = \dot{y}(0)$ musí samozřejmě splňovat rovnici takové vazby, tedy $\mathcal{F}(v_{0x}, v_{0y}) = k$. \square

Je evidentní, že vazebné podmínky z **Příkladu 1** a z **Příkladu 2** splňují podmínku (110), zatímco vazebná podmínka z **Příkladu 3** tuto podmínku nespĺňuje, tedy není ignorabilní.

3 Izotachytonní vazba v centrálním gravitačním poli - specifická ignorabilita

Pohyb částice v centrálním gravitačním poli vyjadřuje Newtonova pohybová rovnice

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_g = F_g(r) \mathbf{e}_r, \quad (74)$$

kde pro velikost $F_g = |\mathbf{F}_g|$ gravitační síly \mathbf{F}_g platí známý Newtonův gravitační zákon

$$F_g(r) = \frac{\alpha}{r^2} = -\frac{\kappa Mm}{r^2}. \quad (75)$$

Vektor $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru \mathbf{r} spojující centrum a okamžitou polohu částice. Znaménko minus vyjadřuje skutečnost, že gravitační síla \mathbf{F}_g má přitažlivý charakter, tzn. její směr je do centra, opačně ke směru vektoru \mathbf{r} . Konstanta úměrnosti α je dána vztahem

$$\alpha = -\kappa Mm, \quad (76)$$

kde κ je univerzální gravitační konstanta, M hmotnost centra (Země) a m hmotnost částice.

Dá se ukázat, že pohyb částice v libovolném centrálním silovém poli je rovinný. Proto se další vyšetřování pohybu částice vztahuje k rovině, jejíž normálový vektor je dán vektorem počátečního momentu hybnosti částice $\mathbf{l}_0 = m(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0)$, kde \mathbf{r}_0 je vektor počáteční polohy a \mathbf{v}_0 je vektor počáteční rychlosti částice. V odpovídající počáteční rovině pak lze vyšetřovat pohyb částice s využitím polárních souřadnic (r, φ) .

Rovinná verze Newtonovy pohybové rovnice částice v centrálním poli (74) má v polárních souřadnicích tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2}, \\ mr^2\ddot{\varphi} &= -2mr\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (77)$$

Řešením rovnic (77) jsou parametrické rovnice $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ kuželoseček s ohniskem umístěným do centra gravitačního pole, které lze vyjádřit explicitně v polárních souřadnicích

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (78)$$

kde p je fokální parametr a ϵ numerická excentricita

$$p = \frac{l_0^2}{m|\alpha|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l_0^2 E_0}{m\alpha^2}} \quad (79)$$

a $\varphi_0 = \varphi(0)$ je počáteční úhlová souřadnice částice v počáteční rovině.

Geometrické parametry p a ϵ (79) výsledné trajektorie jsou určeny počátečními podmínkami, tedy počáteční hodnotou E_0 mechanické energie E částice,

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{|\alpha|}{r_0}, \quad (80)$$

a počáteční hodnotou velikosti $l_0 = |\mathbf{l}_0|$ vektoru momentu počáteční hybnosti \mathbf{l}_0 ,

$$l_0 = mr_0 v_\varphi(0) = mr_0 v_0 \sin \beta_0, \quad (81)$$

kde β_0 je úhel mezi vektorem počáteční polohy \mathbf{r}_0 a vektorem počáteční rychlosti \mathbf{v}_0 . Symbolem r_0 je vyjádřena počáteční vzdálenost od centra a symbolem $v_\varphi(0) = v_0 \sin \beta_0$ označujeme úhlovou komponentu počáteční rychlosti.

Odovídající, tzv. *Keplerovské trajektorie* jsou dány vztahem mezi počátečními hodnotami počáteční mechanické energie E_0 a velikostí počátečního momentu hybnosti l_0 takto:

$$\begin{aligned} \text{kruhová trajektorie} \quad \epsilon = 0 & \Rightarrow E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2l_0^2}, \\ \text{eliptická trajektorie} \quad 0 < \epsilon < 1 & \Rightarrow E_0 \in \left(-\frac{m\alpha^2}{2l_0^2}, 0\right), \\ \text{parabolická trajektorie} \quad \epsilon = 1 & \Rightarrow E_0 = 0, \\ \text{hyperbolická trajektorie} \quad \epsilon > 1 & \Rightarrow E_0 > 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Jestliže je hodnota úhlové komponenty počáteční rychlosti nulová, $v_\varphi = 0$, pak je vzhledem k rovnici (81) velikost momentu hybnosti $l = l_0 = 0$. Znamená to, že pohyb částice se odehrává pouze v radiálním směru.

Jestliže navíc pro radiální složku počáteční rychlosti v_r platí $v_r(0) = v_0 > 0$, jedná se o radiální pohyb směrem od centra (vrh svislý vzhůru radiálně od centra).

Jestliže navíc pro radiální složku počáteční rychlosti $v_r(0) = -v_0 < 0$, jedná se o radiální pohyb směrem do centra (vrh svislý dolů radiálně do centra).

Pokud navíc pro radiální složku počáteční rychlosti platí $v_r(0) = v_0 = 0$, jedná se o volný pád radiálně do centra v centrálním gravitačním poli.

Jestliže částice startuje s nulovou složkou radiální komponenty rychlosti, tzn. úhlová komponenta počáteční rychlosti je rovna velikosti počáteční rychlosti $v_\varphi(0) = v_0$. Vektor okamžité rychlosti \mathbf{v}_0 je tedy kolmý k vektoru spojnice okamžité polohy \mathbf{r}_0 částice a centra, $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{r}_0$, pak pro velikost počátečního momentu hybnosti platí $l_0 = mr_0 v_0$. Navíc, když je počáteční energie E_0 dána první relací v (82), je možné odvodit formuli pro *kruhovou rychlost* (první kosmická rychlost),

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{\alpha}{r_0} = -\frac{m\alpha^2}{2l_0^2} \Rightarrow v_0 = v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{\alpha M}{r_0}}. \quad (83)$$

Jestliže je počáteční energie nulová, $E_0 = 0$ (parabolická trajektorie), lze odvodit formuli pro *únikovou rychlost* (druhá kosmická rychlost),

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{\alpha}{r_0} = 0 \Rightarrow v_0 = v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\alpha M}{r_0}} = \sqrt{2} v_{\text{circ}}. \quad (84)$$

Budeme nyní požadovat, aby se částice v centrálním gravitačním poli pohybovala rovnoměrně, tzn. s konstantní velikostí okamžité rychlosti. Podrobíme její pohyb izotachytonní vazbě, která má v počáteční rovině v polárních souřadnicích vyjádření

$$f(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = k^2. \quad (85)$$

Pozorný čtenář si zajisté všimne, že tato vazebná podmínka již není čistě rychlostní.

Deformované pohybové rovnice částice mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2} + \mu \frac{\partial f}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2} + 2\mu\dot{r}, \\ mr^2\ddot{\varphi} &= -2mr\dot{r}\dot{\varphi} + \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} = -2mr\dot{r}\dot{\varphi} + 2\mu r^2\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (86)$$

Tyto rovnice však nemají analytické řešení analogické řešení (78). K vizualizaci vázaných trajektorií je nutné systém rovnic (86) řešit numericky. Problematika rovnoměrného pohybu částice v centrálních silových polích je detailně rozpracována, řešena a diskutována včetně zákonů zachování v článku [3].

V tomto příspěvku se vzhledem k problematice ignorabilních vazeb zaměříme pouze na kruhový pohyb. V nevázaném případě se jedná o klasickou Keplerovskou trajektorii, kružnici, kterou lze najít vyřešením odpovídajících pohybových rovnic vzhledem ke specifickým počátečním podmínkám, $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{r}_0$, $|\mathbf{v}_0| = v_0 = v_{\text{circ}}$,

$$r(0) = r_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad v_r(0) = \dot{r}(0) = 0, \quad v_\varphi(0) = r_0\dot{\varphi}(0) = v_{\text{circ}}. \quad (87)$$

Úplně stejný pohyb obdržíme, když vyřešíme systém vázaných pohybových rovnic (86) vzhledem ke stejným počátečním podmínkám (87).

Rovnoměrný pohyb po kružnici v centrálním poli lze popsat parametrickými rovnicemi

$$r(t) = r_0, \quad \varphi(t) = \dot{\varphi}(0)t + \varphi_0. \quad (88)$$

Potom pro časové derivace komponent pohybu v polárních souřadnicích platí

$$\dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0), \quad \ddot{\varphi}(t) = 0. \quad (89)$$

Radiální komponenta Φ_r Chetaevovy síly $\Phi = (\Phi_r, \Phi_\varphi) = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = (2\mu\dot{r}, 2\mu r^2\dot{\varphi})$ je rovna nule,

$$\Phi_r = 2\mu\dot{r} = 2\mu \cdot 0 = 0. \quad (90)$$

Protože se druhá deformovaná rovnice systému (86) trivializuje, dostáváme pro úhlovou složku Chetaevovy síly Φ_φ rovnici

$$\Phi_\varphi = 2\mu r^2\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0. \quad (91)$$

Izotachytonní vazba (85) se pod vlivem počátečních podmínek (87) stává ignorabilní vazbou, jedná se o **specifickou ignorabilitu**, ignorabilita vlivem speciálních počátečních podmínek. Chetaevova síla, jejíž prostřednictvím se realizuje vazba omezující pohyb mechanického systému, vymizí.

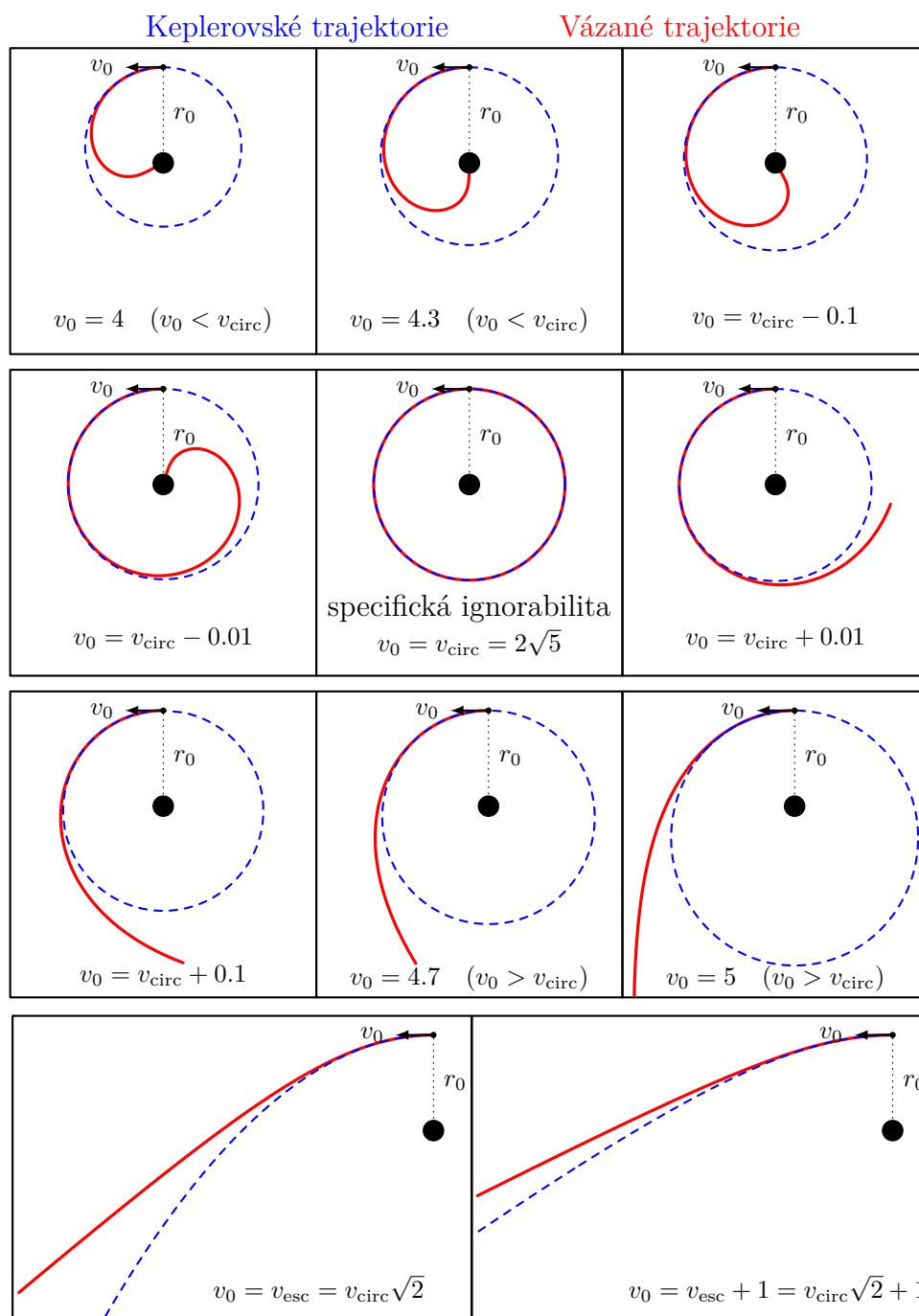
Pro úplnost uvádíme přehled nevázaných trajektorií (vyznačeno čárkovaně) a vázaných trajektorií vzhledem ke specifickým počátečním podmínkám $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{r}_0$, tedy $v_r(0) = 0$ a $v_\varphi(0) = r_0\dot{\varphi}(0) = v_0$,

$$r(0) = r_0 = 5, \quad \varphi(0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad v_\varphi(0) = r_0\dot{\varphi}(0) = v_0. \quad (92)$$

Konstanty mechanického systému volíme

$$M = 100, \quad m = 1, \quad \kappa = 1, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -100. \quad (93)$$

Detailní vysvětlení a úplné řešení problému rovnoměrného pohybu v centrálním gravitačním poli lze dohledat v článku [3].



Obrázek 1: Srovnání trajektorií: rovnoměrný (vázaný) vs klasický pohyb

4 Izotachytonní vazba v magnetickém poli - obecná ignorabilita

Uvažujme pohyb nabitě částice hmotnosti m ve stacionárním obecně nehomogenním magnetickém poli s vektorem magnetické indukce \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B} = (B_1(x, y, z), B_2(x, y, z), B_3(x, y, z)). \quad (94)$$

Na částici působí magnetická složka \mathbf{F}_{mag} Lorentzovy síly

$$\mathbf{F}_{mag} = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (95)$$

kde Q je elektrický náboj částice, \mathbf{v} je vektor okamžité rychlosti. Newtonova pohybová rovnice hmotné nabitě částice ve stacionárním magnetickém poli s vektorem magnetické indukce \mathbf{B} má tvar

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{mag} = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (96)$$

kterou rozepíšeme-li do souřadnic, dostáváme

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Q (\dot{y}B_3 - \dot{z}B_2), \\ m\ddot{y} &= Q (\dot{z}B_1 - \dot{x}B_3), \\ m\ddot{z} &= Q (\dot{x}B_2 - \dot{y}B_1). \end{aligned} \quad (97)$$

Pohyb nabitě částice nyní podrobíme izotachytonní vazbě

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = k^2, \quad (98)$$

požadujeme tedy, aby se částice pohybovala rovnoměrně, tzn. aby velikost okamžité rychlosti $v = |\mathbf{v}|$ zůstávala v průběhu pohybu konstantní. Vázané (deformované) rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Q (\dot{y}B_3 - \dot{z}B_2) + 2\mu\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= Q (\dot{z}B_1 - \dot{x}B_3) + 2\mu\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= Q (\dot{x}B_2 - \dot{y}B_1) + 2\mu\dot{z}. \end{aligned} \quad (99)$$

Vazbu (98) zderivujeme totálně podle času

$$\frac{df}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = 0 \quad (100)$$

a dosadíme do této rovnice za \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} pravé strany deformovaných rovnic (99), dostaneme

$$\frac{2Q}{m} [\dot{x}(\dot{y}B_3 - \dot{z}B_2) + \dot{y}(\dot{z}B_1 - \dot{x}B_3) + \dot{z}(\dot{x}B_2 - \dot{y}B_1)] + \frac{4\mu}{m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0. \quad (101)$$

Sčítance uvnitř hranaté závorky na levé straně rovnice se odečtou, takže dostáváme

$$4\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0. \quad (102)$$

Izotachytonní vazba (98) v magnetickém poli je tedy ignorabilní. Tento závěr lze zobecnit pro silové pole obecně časově závislé gyroskopické síly tvaru

$$\mathbf{F}_{gyr} = \mathbf{v} \times \mathbf{G}(t, x, y, z), \quad (103)$$

kde \mathbf{G} je intenzita gyroskopické síly, která může explicitně záviset i na čase t , [1], str. 107.

Ignorabilita izotachytonní vazby je důsledkem zákona zachování kinetické energie částice v poli gyroskopické síly, tedy nevázaných rovnic (97), kde místo B_1 , B_2 , B_3 lze obecně psát komponenty G_1 , G_2 , G_3 intenzity gyroskopické síly. Skutečně, násobíme-li první rovnici systému

(97) \dot{x} , druhou rovnici systému (97) vynásobíme \dot{y} a třetí rovnici systému (97) vynásobíme \dot{z} a všechny tři rovnice sečteme dostaneme

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2 \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) = 0,$$

tedy kinetická energie částice, resp. velikost její okamžité rychlosti se v magnetickém poli (95), resp. v poli gyroskopické síly (103) zachovává

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const}, \quad \text{resp.} \quad v = v_0 = \text{const}.$$

Kritérium obecné ignorability obecné kinematické vazby $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ pro pohyb nabitě částice ve stacionárním magnetickém poli (95) s vektorem magnetické indukce \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B} = (B_1(x, y, z), B_2(x, y, z), B_3(x, y, z))$$

lze zformulovat do následující věty.

Věta 2: *Kinematická vazba $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ je pro mechanický systém hmotné nabitě částice v magnetickém poli (95) ignorabilní právě tehdy, když platí*

$$m(\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{grad}_v f \cdot \mathbf{F}_{mag} = 0, \quad (104)$$

resp.

$$m(\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{grad}_v f \cdot (Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = 0, \quad (105)$$

kde

$$\mathbf{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{grad}_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) \quad (106)$$

je obyčejný gradient, resp. rychlostní gradient kinematické vazby f , \mathbf{v} je vektor okamžité rychlosti částice, m hmotnost částice, Q je elektrický náboj částice a \mathbf{B} je vektor magnetické indukce. Podmínka (104), resp. (105) představuje parciální diferenciální rovnici pro ignorabilní kinematickou vazbu $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{Q}{m} (\dot{y} B_3 - \dot{z} B_2) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{Q}{m} (\dot{z} B_1 - \dot{x} B_3) \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \frac{Q}{m} (\dot{x} B_2 - \dot{y} B_1) \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0, \quad (107)$$

kde $B_1(x, y, z)$, $B_2(x, y, z)$, $B_3(x, y, z)$ jsou komponenty vektoru magnetické indukce \mathbf{B} .

Parciální diferenciální rovnici (107) pro neznámou $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ lze řešit metodou charakteristik. Speciálně pro homogenní magnetické pole orientované ve směru osy z , tzn. $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ a pro čistě rychlostní vazbu $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ se rovnice (107) zredukuje na

$$\frac{Q}{m} B_0 \left(\dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (108)$$

Její obecné řešení lze nalézt metodou charakteristik a má tvar

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathcal{F}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2, \dot{z}) - k = 0, \quad (109)$$

kde \mathcal{F} je libovolná diferencovatelná funkce. Tento závěr, který je důsledkem **Věty 2** lze zformulovat následovně.

Důsledek: *Kinematická čistě rychlostní vazba $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ je pro mechanický systém částice v homogenním magnetickém poli orientovaném ve směru osy z s vektorem magnetické indukce $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ ignorabilní právě tehdy, když je tvaru*

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathcal{F}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2, \dot{z}) - k = 0, \quad (110)$$

kde \mathcal{F} je libovolná diferencovatelná funkce. Takové vazby představují pouze omezení

$$\mathcal{F}(v_{0x}^2 + v_{0y}^2, v_{0z}) = k \quad (111)$$

možných počátečních podmínek pro komponenty v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} vektoru počáteční rychlosti částice.

5 Poděkování

Autoři děkují za podporu Katedře matematiky a deskriptivní geometrie, Fakulta strojní, a Katedře matematiky, Fakulta stavební, VŠB-TUO.

Reference

- [1] BRDIČKA, M., HLADÍK, A., Teoretická mechanika, Academia Praha, 1987.
- [2] SWACZYNA, M., VOLNÝ, P., Rovnoměrný šikmý vrh, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* Vol. 61 (1), 2016, pp. 34–68, <http://dml.cz/dmlcz/144901>.
- [3] SWACZYNA, M., VOLNÝ, P., Uniform Motions in Central Fields. *J. Geom. Mech.* Vol. 9 (1), 2017, pp. 91–180, doi:10.3934/jgm.2017004.

2D TIME DEPENDING STOKES PROBLEM WITH DIRICHLET–NEUMANN–SLIP BOUNDARY CONDITIONS

TOMEČKOVÁ Ivona

VŠB–Technická univerzita Ostrava, FS KMDg, 17. listopadu 2172/15, 708 00 Ostrava-Poruba
e-mail: ivona.tomeckova@vsb.cz

Abstract: This contribution is dealing with two dimensional Stokes problem with nonlinear boundary conditions. It describes the behavior of Newton’s fluids in given region restricted into two dimensions. We are dealing with boundary conditions of Dirichlet, Neumann and slipping type. The last one describes the effect on fluid behavior through the nonlinear term. The main goal of our work is to take the time variable into account and offer the suitable computing program.

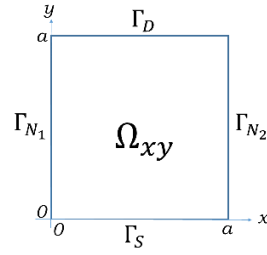
Key words: Stokes problem, slip–stick boundary condition, variational inequality

1 Introduction

This paper would not have arisen if there were no precedent work of team around Professor Kučera from VŠB–Technická univerzita Ostrava. There is detailed description of the path following algorithm including convergence analysis, implementation and for example spectral analysis of the preconditioners in [2], which is also used in the presented calculation program for calculations in individual time layers. The problem introduced in the text is similar to the one described in the paper [3]. This text follows on from the mentioned articles.

2 Setting of the problem

In general we suppose the two dimensional region with sufficiently smooth boundary which is divided into four disjoint parts. Especially the two dimensional region is given by the square $\Omega_{x,y} = (0, a) \times (0, a)$ for $a = 1$. See the figure 1.


 Figure 1: The region Ω_{xy} with parts of it's boundary.

2.1 Problem setting

The whole problem consists of the system of balance equations, boundary conditions, the initial condition.

System of equations. Let's $\mathbf{x} \in \Omega_{xy}$ and $t \in (T_0, T_{\text{end}}) \subset \mathbb{R}$ then

$$\left. \begin{aligned} \text{we find fields } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \text{ and } p = p(\mathbf{x}, t) \text{ such that} \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbf{u}} - \beta \operatorname{div} \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}}) + \nabla p = \vec{\mathbf{f}}, \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{u}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where the scalar field p and the vector field $\vec{\mathbf{u}}$ stand for a pressure and velocity of the Newton's fluid, which is contained in the volume represented by two dimensional region Ω_{xy} . The positive valued scalar field $\rho = \rho(\mathbf{x})$ stands for density of the fluid, the vector field $\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ is the internal resource density.

Usually the operator \mathcal{D} stands for Nabla operator in the Stokes problem, i.e.

$$\mathcal{D} = \nabla \quad \text{and therefore} \quad \beta = \nu \quad (2a)$$

for positive valued scalar field $\nu = \nu(\mathbf{x})$ which is fluid viscosity. We will suppose this choice as one of two possibilities. The second meaning of \mathcal{D} follows from this idea: If there are prescribed Dirichlet boundary conditions in every point of $\partial\Omega_{xy}$ in addition to (1) then the gradient from \mathcal{D} could be replaced with it's symmetric part, i.e.

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T) \quad \text{and consequently} \quad \beta = 2\nu. \quad (2b)$$

Note that the differential operators div and ∇ contain partial derivatives only with respect to space variables x and y .

Boundary Conditions. We divide the boundary $\partial\Omega_{xy}$ into the four non-empty parts

$$\partial\Omega_{xy} = \Gamma_D \cup \Gamma_{N_1} \cup \Gamma_S \cup \Gamma_{N_2},$$

as is drawn in the figure 1. Let us denote \mathbf{n} as the outward-pointing normal to the boundary and $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ as the direction derivative according to the normal \mathbf{n} . Then we suppose the following

Dirichlet and Neumann boundary conditions for given fields $\vec{\mathbf{u}}_D$ on Γ_D and $\vec{\mathbf{h}}$ on $\Gamma_N := \Gamma_{N_1} \cup \Gamma_{N_2}$, which are in the form

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_D \quad \text{on } \Gamma_D \times (T_0, T_{\text{end}}) \quad \text{and} \quad (3a)$$

$$\beta \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}})\mathbf{n} - p\mathbf{n} = \vec{\mathbf{h}} \quad \text{on } \Gamma_N \times (T_0, T_{\text{end}}), \quad (3b)$$

where $\beta \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}}) - Ip$ is the Cauchy–stress tensor and $\boldsymbol{\sigma} = \beta \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}})\mathbf{n} - p\mathbf{n}$ is so called traction force. In the following text there is assumed the decomposition $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_n \mathbf{n} + \sigma_\tau \boldsymbol{\tau}$ for normal stress $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n})$ and shearing stress $\sigma_\tau = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$.

For the velocity in the normal direction of magnitude $u_n = (\vec{\mathbf{u}}, \mathbf{n})$ we prescribe *impermeability* in the normal direction to the boundary Γ_S

$$u_n = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \times (T_0, T_{\text{end}}). \quad (3c)$$

Next we prescribe *Navier–Tresca stick–slip condition* for the velocity in the tangential direction $u_\tau = (\vec{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\tau})$. For this reason we suppose a given slip threshold labeled by g , $g : \Gamma_S \mapsto \mathbb{R}$ and if tangential stress σ_τ has it's value beyond this limit it causes the originally sticking fluid to begin to slide along the boundary Γ_S . Moreover the frictional adhesion between the wall represented by Γ_S and moving fluid is reduced proportionately to the tangential displacement with adhesion positive valued coefficient $\kappa \in \mathbb{R}$, i.e.

$$|\sigma_\tau - \kappa u_\tau| \leq g \quad \text{and} \quad (3d)$$

$$\sigma_\tau u_\tau + g |u_\tau| + \kappa u_\tau^2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \times (T_0, T_{\text{end}}). \quad (3e)$$

A given initial velocity vector field $\vec{\mathbf{u}}_0$ is used in **initial condition** of the problem, i.e.

$$\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, T_0) = \vec{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{xy}. \quad (3f)$$

Let us note that in view of the assumption $\Gamma_N \neq \emptyset$ we do not need any additional condition which would ensure the uniqueness of pressure field p .

3 Discretization

We perform the discretization of given problem in two steps. Firstly we substitute the time derivative in $(1)_1$ by scheme, which is stable in calculations, and reformulate the whole problem in selected time layers. Subsequently, we proceed the spatial discretization.

Time discretization. We convert the problem (1), (3a)–(3f) to a sequence of tasks via approximation of the first time derivative by the *implicit Euler scheme*. Therefore we choose the following nodes t_k from the interval $\langle T_0, T_{\text{end}} \rangle$

$$T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_{\text{end}}$$

and replace the time derivation by backward difference. Then we get the following sequence of problems for time step $\delta^k = t_{k+1} - t_k$ and for abbreviation $\vec{\mathbf{u}}^{(k)}(\mathbf{x}) := \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_k)$ and analogous for $p^{(k)}(\mathbf{x}) := p(\mathbf{x}, t_k)$, $\vec{\mathbf{f}}^{(k)}(\mathbf{x}) := \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t_k)$ and $\vec{\mathbf{u}}_D^{(k)} = \vec{\mathbf{u}}_D(\mathbf{x}, t_k)$.

For given $\vec{\mathbf{u}}^{(0)} = \vec{\mathbf{u}}_0$

we find fields $\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}$ and $p^{(k+1)}$ on $\Omega_{x,y}$ (4)

such that for $k = 0, 1, 2 \dots n - 1$

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}(\mathbf{x}) - \vec{\mathbf{u}}^{(k)}(\mathbf{x})}{\delta^k} - \beta \operatorname{div} \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}(\mathbf{x})) + \nabla p^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \vec{\mathbf{f}}^{(k+1)}(\mathbf{x}), \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= 0, \\ \vec{\mathbf{u}}^{(k+1)} &= \vec{\mathbf{u}}_D^{(k+1)} \quad \text{on } \Gamma_D \\ \beta \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)})\mathbf{n} - p^{(k+1)}\mathbf{n} &= \vec{\mathbf{h}}^{(k+1)} \quad \text{on } \Gamma_N \\ u_n^{(k+1)} = 0, \quad \left| \sigma_\tau^{(k+1)} - \kappa u_\tau^{(k+1)} \right| &\leq g \quad \text{and} \\ \sigma_\tau^{(k+1)} u_\tau^{(k+1)} + g \left| u_\tau^{(k+1)} \right| + \kappa \left(u_\tau^{(k+1)} \right)^2 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_S. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Variational formulation and space discretization. After standard variational formulation of the problems in (5) we are looking for the couple $(\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}, p^{(k+1)})$ from the Cartesian product $V(\Omega_{x,y}) \times L^2(\Omega_{x,y})$, where $V(\Omega_{x,y}) = \{\vec{\mathbf{v}} \in (H^1(\Omega_{x,y}))^2 : \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} \text{ on } \Gamma_D, v_n = 0 \text{ on } \Gamma_S\}$, such that it solves the following variational inequality of the second kind

$$\left. \begin{aligned} \forall \vec{\mathbf{v}} \in V(\Omega_{x,y}) \text{ and } \forall q \in L^2(\Omega_{x,y}) \\ a(\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}, \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}) + b(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}, p) + j_{\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}}(\vec{\mathbf{v}}) - j_{\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}}(\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}) &\geq \ell(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}) \\ b(\vec{\mathbf{u}}^{(k+1)}, q) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

where (\cdot, \cdot) stands for the scalar product in $L^2(\Omega_{x,y})$, $a(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}) = \varrho \delta_k^{-1} \int_{\Omega_{x,y}} \vec{\mathbf{w}} \vec{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \beta (\mathcal{D}(\vec{\mathbf{w}}), \mathcal{D}(\vec{\mathbf{u}}))$ and especially for $\mathcal{D}(\vec{\mathbf{w}}) = \nabla \vec{\mathbf{w}}$ the second term in the mapping a is in the standard form $\beta \int_{\Omega_{x,y}} \nabla \vec{\mathbf{w}} : \nabla \vec{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$, and where $b(\vec{\mathbf{w}}, q) = - \int_{\Omega_{x,y}} q \operatorname{div} \vec{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x}$, $\ell(\vec{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega_{x,y}} \vec{\mathbf{f}} \vec{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \vec{\mathbf{h}} \vec{\mathbf{w}} \, ds$ and finally $j_{\vec{\mathbf{w}}}(\vec{\mathbf{v}}) = \int_{\Gamma_S} (g + \kappa |w_\tau|) |v_\tau| \, ds$.

Now we triangulate $\Omega_{x,y}$ to M triangles, $\Omega_{x,y} = \cup_{j=1}^M T_j$, with N vertices $\{\mathbf{x}_i\}_i$. The triangles cover the area as shown in figure number 2.

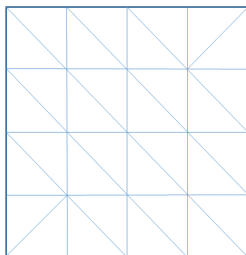


Figure 2: Triangulated region $\Omega_{x,y} = \cup_{j=1}^M T_j$.

Then we define the system of P_1^{bubble} base FEM functions for approximating the velocity. See [1] for details. Therefore the restriction of the velocity field $\vec{\mathbf{u}}_h^{(k)}$ on any triangle T_j is approximated by linear combination

$$\vec{\mathbf{u}}_h^{(k)}|_{T_j}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^T \quad \text{for} \quad u_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 u_l \varphi_l(\mathbf{x}) + u_b \varphi_b(\mathbf{x}) \quad \forall i = 1, 2$$

where the values of coefficients u_1, u_2, u_3 and so called bubble coefficient u_b depend on the selected triangle T_j and on the chosen time level $t = t_k$. The base functions are in the form

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 1 - x - y, \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = x, \quad \varphi_3(\mathbf{x}) = y, \quad \varphi_b(\mathbf{x}) = 27 \varphi_1(\mathbf{x}) \varphi_2(\mathbf{x}) \varphi_3(\mathbf{x})$$

for $\mathbf{x} = (x, y)$. In the case of space approximation of the pressure we use common P_1 base FEM functions, i.e.

$$p_h^{(k)}|_{T_j}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^3 p_l \varphi_l(\mathbf{x}).$$

Let V_h and W_h are suitable finite element approximation of $V(\Omega_{xy})$ and $L^2(\Omega_{xy})$. We are seeking an totally approximation of the solution $(\vec{\mathbf{u}}_h, p_h) \in V_h \times W_h$ of (1) in the form of variational inequality of the second kind described in the previous, thus

$$\left. \begin{aligned} \forall \vec{\mathbf{v}}_h \in V_h \text{ and } \forall q_h \in W_h \\ a(\vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}, \vec{\mathbf{v}}_h - \vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}) + b(\vec{\mathbf{v}}_h - \vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}, p_h^{(k+1)}) + j_{\vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}}(\vec{\mathbf{v}}_h) - j_{\vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}}(\vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}) \geq \ell(\vec{\mathbf{v}}_h - \vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}) \\ b(\vec{\mathbf{u}}_h^{(k+1)}, q_h) = 0, \end{aligned} \right\}$$

For details see [3].

The main difficulty in finding a solution stems from the shape of the mapping j which is non-smooth and non-differentiable. Let us now summarize the steps leading to the construction of the computational algorithm in each time layer which are described in [2] in detail.

After algebraic formulation the subproblem (for every time layer t_k) could be formulated as a saddle-point problem for augmented Lagrangian and the absolute value in j which still stays in the problem could be replaced by equivalent expression $|\varphi| = \max\{\varphi, -\varphi\}$.

- The *interior-point method* and it's version the *path following algorithm* is the chosen computing method as the best even to look for the optimum of given functional.
- The main idea is to use *Karush-Kuhn-Tucker conditions* to find the optimum and use one of them to reduce one unknown from the system.
- The *dumping Newton iteration* process is used to solve a reduced system of equations.
- Because the issue to solve the indefinite system of linear equations is the most time spending part the system is again reduced via the method of *Schur complement*.

For the algorithm, its analysis and the implementation details see [2].

4 A numerical experiment

The given region $\Omega_{xy} = (0, 1) \times (0, 1)$ is meshed by 180×180 nodes (i.e. we have $3.24 \cdot 10^4$ vertices \mathbf{x}_i) and they are used to set the triangulation in the manner of the figure 2. The bounds of time variable are $T_0 = 0$ and $T_{\text{end}} = 1$.

The operator \mathcal{D} and consequently the coefficient β are chosen like in (2a) and the values of fluid viscosity and it's density are set so that $\nu = 1$ and $\rho = 1$.

We use the concept from [1] for this example, where is constructed an exact solution of (1). This solution have to be adjusted for the time depending model, so we consider $\vec{\mathbf{u}}^{\text{exact}} = (u_1^{\text{exact}}, u_2^{\text{exact}})^T$ and p^{exact} , where

$$u_1^{\text{exact}}(x, y, t) = e^{-t} (-\cos(2\pi x) \sin(2\pi y) + \sin(2\pi y)) , \quad (6a)$$

$$u_2^{\text{exact}}(x, y, t) = e^{-t} (\sin(2\pi x) \cos(2\pi y) - \sin(2\pi x)) , \quad (6b)$$

$$p^{\text{exact}}(x, y, t) = 2\pi e^{-t} (\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)) . \quad (6c)$$

for all $(x, y) \in \Omega_{xy}$ and $t \in \langle T_0, T_{\text{end}} \rangle$. This solution will be taken into account to get information about errors in every time layer.

Due to the choice of building an exact solution we set the initial condition from (3f) as $\vec{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{u}}^{\text{exact}}(x, y, 0)$. After substituting $\vec{\mathbf{u}}^{\text{exact}}$ and p^{exact} into the left hand side of (1) and (3a)–(3b) we get the input for $\vec{\mathbf{f}}$, $\vec{\mathbf{u}}_D$ and $\vec{\mathbf{h}}$.

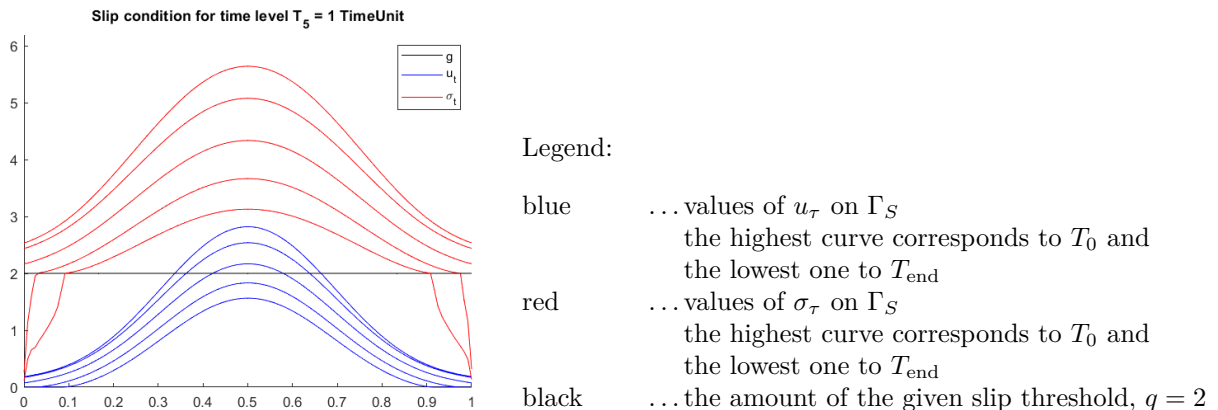


Figure 3: The progress of u_τ and σ_τ at the points of the boundary Γ_S for individual time layers.

In the graph, one can observe how the values of σ_τ are gradually affected by exceeding the limit g in the active points of Γ_S . It is caused by the chosen expression of the exact solution (6a)–(6c). The exponential decrease of values $\vec{\mathbf{u}}^{\text{exact}}$ and p^{exact} is necessarily reflected in $\vec{\mathbf{f}}$ and $\vec{\mathbf{h}}$, see (1) and (3b). Thus, the fluid moves freely at the points of the Γ_S in the beginning. It slips. Then its speed decreases over time until it reaches the limit where the tangential stresses σ_τ begin to be affected by the activated part Γ_S and the fluid is going to stick. Notice the values over the left and the right part of (0.1) in the figure 3.

5 Conclusion

The results of the numerical implementation of the Stokes model were presented in the text. An implicit Euler scheme was chosen to discretize the time derivative.

In the future, it is planned to extend the actual numerical model with the Crank–Nicolson scheme and its generalization and subsequent analysis.

Acknowledgment

The author's kind duty is to thank Professor Kučera (VŠB-TU Ostrava) for his suggestions, guidance and consultation during the creation of the presented work.

References

- [1] KOKO, J. 2007. Vectorized Matlab Codes for Linear Two-Dimensional Elasticity *Scientific Programming*, 15, ISSN 1875-919X, p. 157-172
- [2] KUČERA, R., HASLINGER, J., ŠÁTEK, V., JAROŠOVÁ, M. 2018. Efficient methods for solving the Stokes problem with slip boundary conditions. *Mathematics and computers in simulation*. Amsterdam: Elsevier Science BV, ISSN 0378-4754, p. 114-124
- [3] KUČERA, R., MACHALOVÁ, J., NETUKA, H., ŽENČÁK P. 2013. An interior point algorithm for the minimization arising from 3D contact problems with friction. *Optimization methods and software*. Philadelphia: Taylor & Francis, 29(3), ISSN 1055-6788, p. 1195-1217

KONSTRUKTIVNÍ GEOMETRIE NA AKCÍCH PRO VEŘEJNOST

JAHODOVÁ Monika, VOTOUPAL Václav

VŠB – Technická univerzita Ostrava, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, 17. listopadu
2172/15, 708 00 Ostrava – Poruba
monika.jahodova@vsb.cz

Abstrakt: V příspěvku je představen soubor pomůcek využívaných při výuce předmětu Konstruktivní geometrie na Fakultě strojní VŠB – Technické univerzity Ostrava a popsáno jejich využití na akcích pro veřejnost.

Klíčová slova: deskriptivní geometrie, Mongeovo promítání, 3D tisk, výukové pomůcky

1 Úvod

Předmět Konstruktivní geometrie se na Fakultě strojní vyučuje ve druhém semestru bakalářského studia. Jeho cílem je seznámit studenty s těmi prvky deskriptivní geometrie, které později využijí ve své strojírenské praxi. Jsou to dvě základní zobrazovací metody, Mongeovo promítání a pravoúhlá axonometrie, a dále geometrické vlastnosti těles, rovinných i prostorových křivek a ploch.

Důraz se klade na to, aby studenti rozuměli principům zobrazovacích metod, znali jejich vlastnosti, výhody a nevýhody a dokázali v nich sestavit zmíněná tělesa či plochy. Tím se zároveň rozvíjí jejich prostorová představivost, tvůrčí schopnosti a logické myšlení.

K tomuto jsou studenti vedeni na přednáškách, kde se jim nenabízí pouze postup řešení, ale i komplexní pohled na danou problematiku, která je vysvětlována na 3D modelech vytvořených v GeoGebře. Tyto modely je možné otáčet, nastavovat pohledy z různých směrů, skrýt nebo zvýraznit důležité části, anebo jednotlivé části otáčet. Podobné modely mají studenti k dispozici i ve cvičení. Přes vlastní GeoGebra účet získají přístup k modelům těles, které odpovídají úlohám řešeným ve cvičení. Student může s modely manipulovat dle svého uvážení, díky tomu získá individuální náhled na situaci a snáze pochopí problém.

I nadále se ale jeví jako užitečné doplňovat tento virtuální přístup o modely fyzické, které studenti skutečně mohou vzít do ruky, osahat si je, poskládat a zase rozebrat nebo různě natočit.

2 Propagační akce

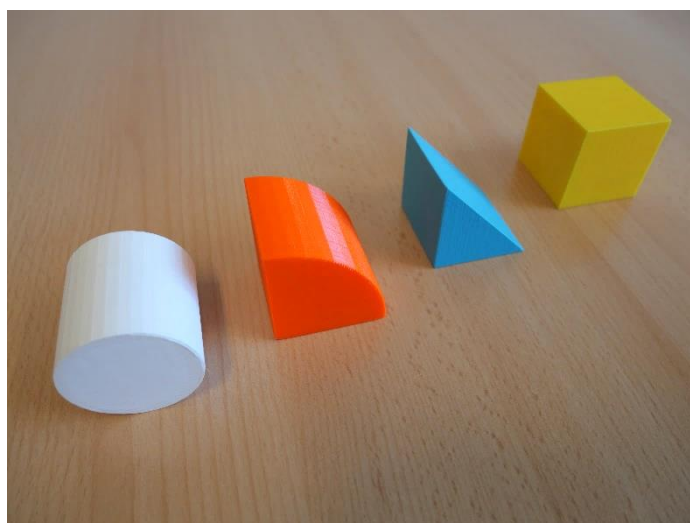
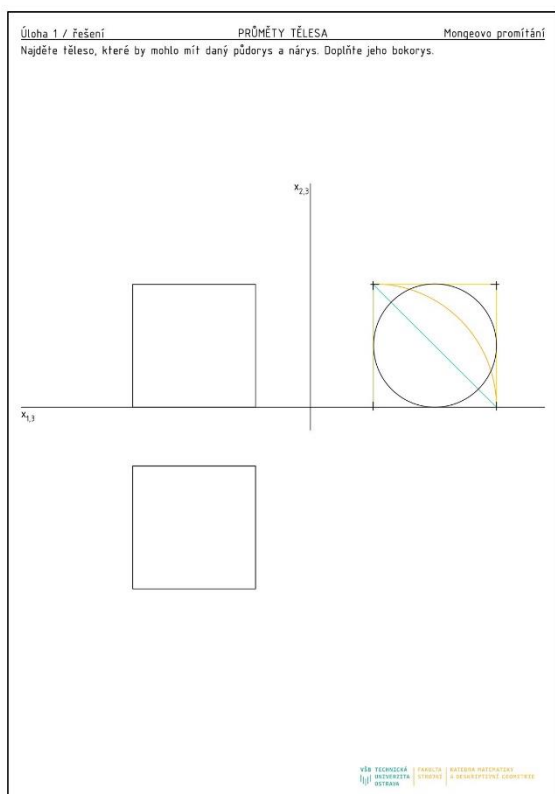
Jedním z cílů různých akcí pro veřejnost jako jsou Den otevřených dveří, Zlepši si techniku nebo Prázdniny na VŠB je předem oslovit potenciální zájemce a uchazeče o studium na vysoké škole a nějakou zajímavou formou jim přiblížit obsah a způsoby výuky matematických předmětů na Fakultě strojní.

Pro seznámení s předmětem Konstruktivní geometrie je možné využít pomůcky vytvořené pro cvičení z tohoto předmětu a zapojit je do interaktivních úloh nabízených veřejnosti. Pomůcky byly připraveny tak, aby zájemce na první pohled zaujaly svojí velikostí, barevností a moderností a zároveň velmi rychle přiblížily řešenou problematiku.

3 Popis pomůcek

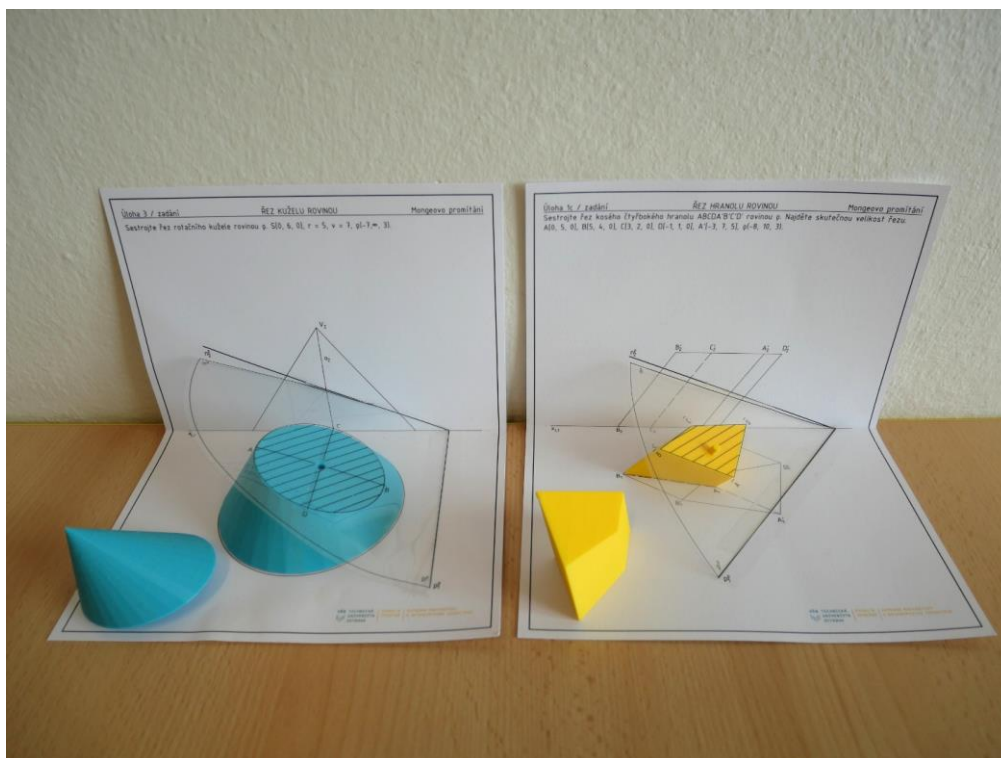
Jako ukázka pomůcek používaných při výuce a na propagačních akcích zde vybíráme pět modelů, které v dalším textu detailněji popisujeme. Většina pomůcek je složena z několika samostatných částí, které jsou vyrobeny z výkresu, průhledné fólie a různých typů plastů používaných pro tisk modelů na 3D tiskárně (PLA, PETG).

První pomůcka je určena ke stručnému vysvětlení principu Mongeova promítání. Skládá se z papírové části reprezentující půdorysnu a nárysnu a dále obsahuje čtyři tělesa – krychli, trojboký hranol, těleso s podstavou ve tvaru čtvrtkruhu a válec. Úlohou je umístit těleso do půdorysné roviny tak, aby odpovídalo zadanému půdorysu a nárysu.



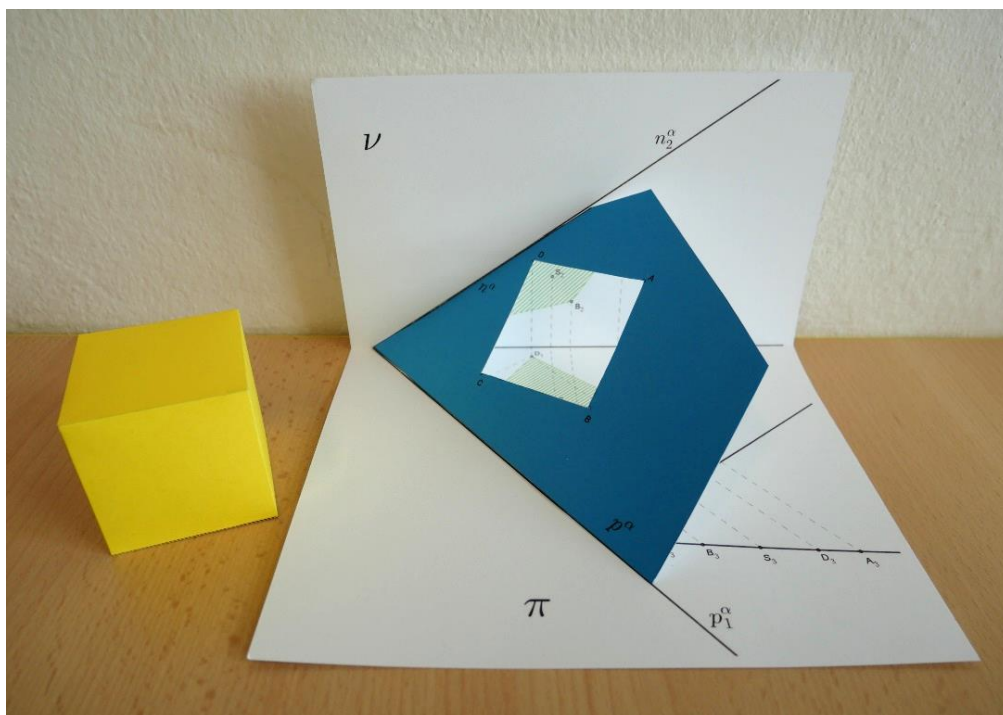
Obrázek 1: Pomůcka Mongeova promítání

Další dvě pomůcky jsou inspirovány projektem [3] a představují model řezu tělesa rovinou. Obě pomůcky, *Řez hranolu* obecnou rovinou i *Řez kužele* rovinou kolmou k nárysně, odpovídají konkrétním úlohám, se kterými se studenti setkají obvykle ve čtvrtém a pátém cvičení. Tyto pomůcky se opět skládají z papírové části reprezentující půdorysnu a nárysnu, modelu tělesa složeného ze dvou částí a průhledné fólie odpovídající rovině řezu. Průmětny lze otočit, těleso rozpojit, otočit rovinu řezu nebo těleso z modelu úplně odstranit. V obou případech je úkolem najít řez tělesa rovinou a tento řez promítnout do půdorysny a nárysny a sestavit jeho skutečný tvar. Tato pomůcka je doplněna i ukázkou toho, jak vypadá řešení, které vypracovali pomocí rýsovacích pomůcek samotní studenti.



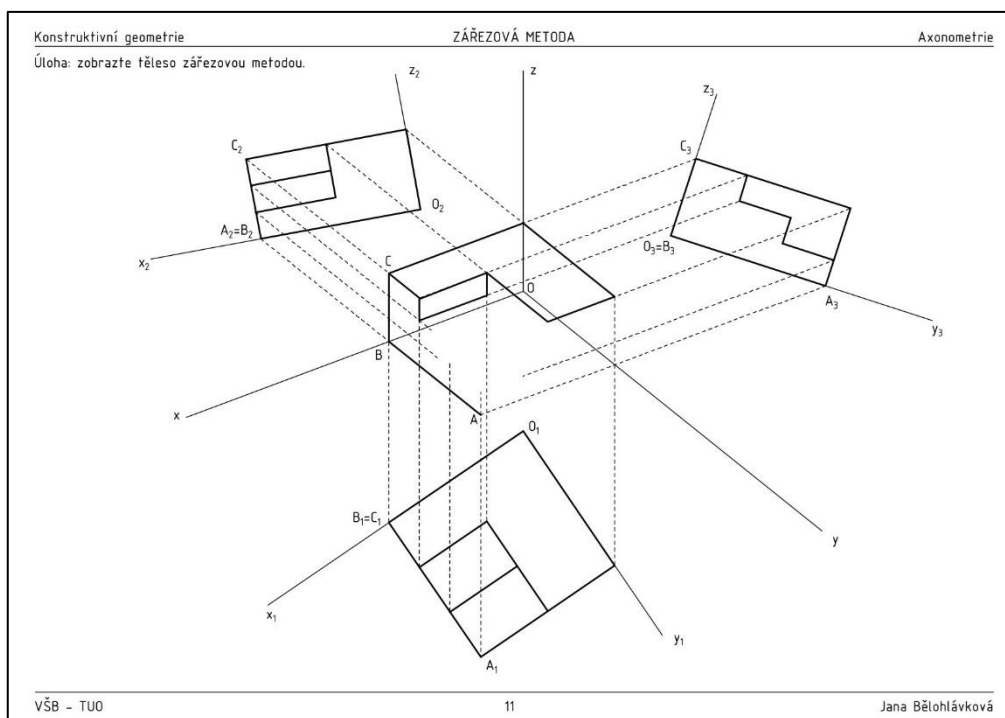
Obrázek 2: Pomůcky Řez kužele a Řez hranolu

Čtvrtá pomůcka *Těleso v obecné rovině* byla inspirována modely v publikaci [2]. Je celá vyrobená z papíru a reprezentuje zobrazení rovinného útvaru ležícího v obecné rovině a zobrazení tělesa s podstavou tvořenou právě tímto útvarem. Pro jednoduchost je zvoleným útvarem čtverec a tělesem krychle. Obecná rovina je daná pomocí stopy v půdorysně a v nárysně a je v ní vyřiznutý čtvercový otvor, přes který lze ověřit správnost sestavených průmětů tohoto útvaru do půdorysny a do nárysny. Pomůcka obsahuje i samotnou krychli, kterou je možné do otvoru vsadit a řešit tak zobrazení tělesa s podstavou v obecné rovině.



Obrázek 3: Pomůcka Těleso s podstavou v obecné rovině

Poslední pomůcka *Zářezová metoda* ukazuje souvislost mezi Mongeovým promítáním a pravouhlou axonometrií a naznačuje, jak přejít od zobrazení v Mongeově promítání k zobrazení v pravouhlé axonometrii pomocí zářezové metody. Tady se opět využily originální pracovní listy z přednášky Konstruktivní geometrie a pracovní listy z odpovídajícího cvičení. V těchto pracovních listech je úloha vyřešena pro několik vrcholů tělesa a toto částečné řešení slouží jako návod pro konstrukci zbývajících částí tělesa.



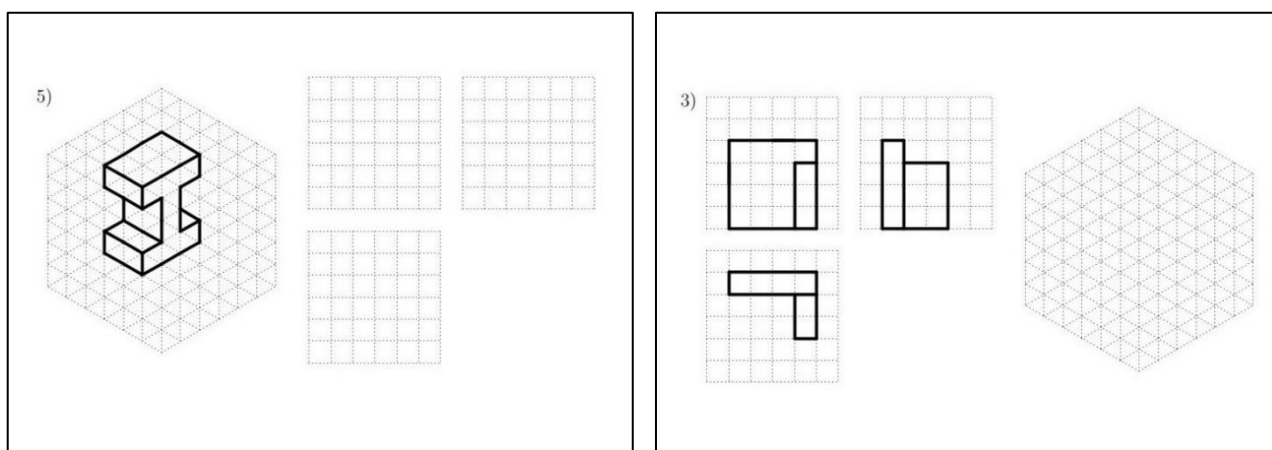
Obrázek 4: Pomůcka Zářezová metoda

4 Práce s pomůckami

Ve cvičeních z předmětu Konstruktivní geometrie se z předchozích pomůcek využívá především model *Řez hranolu* a *Řez kužele*, anebo pouze některé jejich části. Na těchto modelech lze demonstrovat a vysvětlit více problémů, například rozdíl mezi kosým a kolmým tělesem, zachování výšky jednotlivých bodů v různých průmětech nebo jak volit průmět při hledání skutečné velikosti řezu. Na akcích pro veřejnost se pomůcky využijí trochu odlišným způsobem.

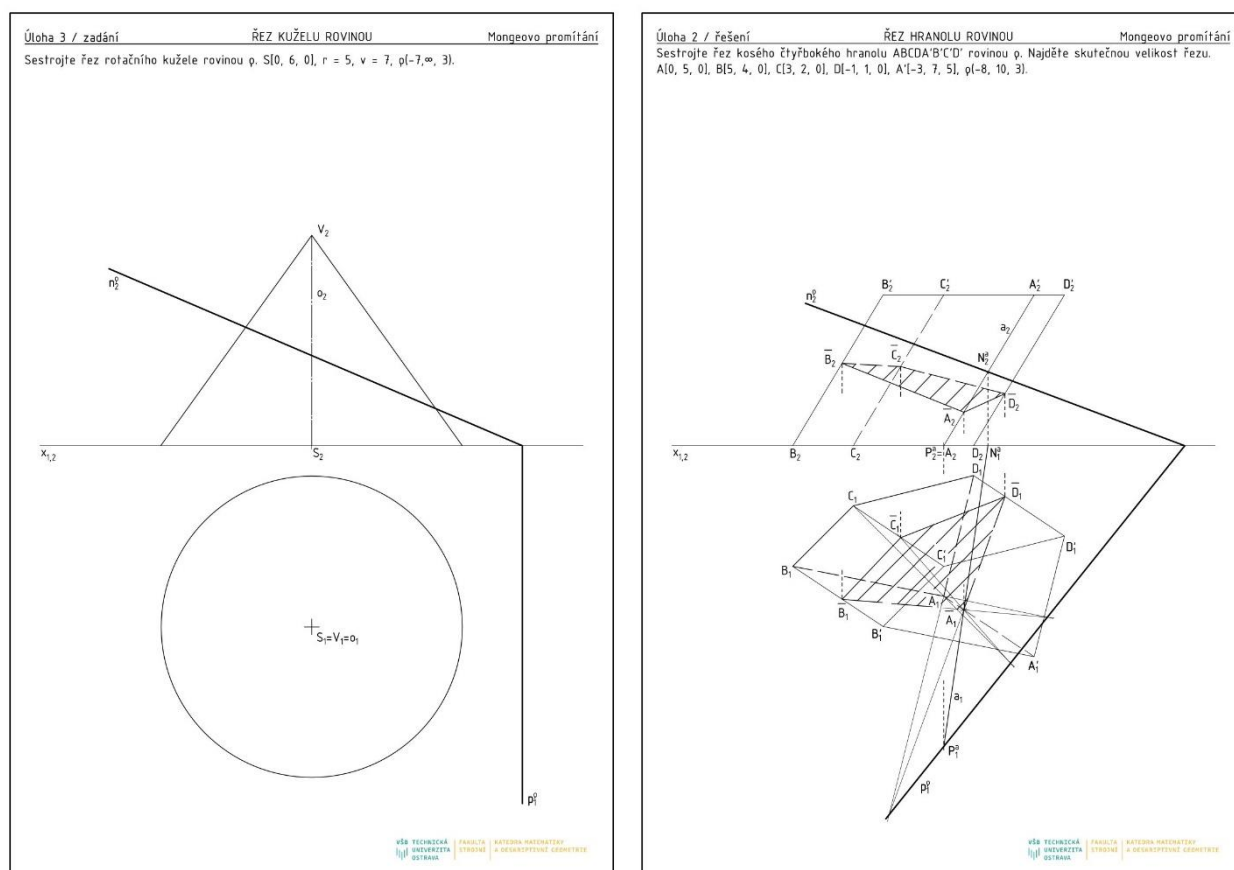
Zájemcům z řad žáků a veřejnosti nejprve představíme pomůcku *Mongeovo promítání*. Je na ní vysvětlen princip této zobrazovací metody a úlohou pro zájemce je umístit těleso na půdorysnou rovinu tak, aby jeho zobrazení odpovídalo danému půdorysu a nárýsu. Bokorys tělesa v tu chvíli nevidí. Zájemci obvykle velmi rychle a správně umístí krychli a úlohu považují za vyřešenou. Navedeme je však k tomu, ať zváží, zda je to opravdu jediná možnost a zda ještě některé z nabízených těles nevyhovuje zadání. Obvykle následuje krátká diskuse ve skupince spojená s pokusy umístit do rysu některé z dalších těles. Nejčastěji jako druhý v pořadí umísťují trojboký hranol i s tím, že obvykle naleznou dvě různé vyhovující polohy. Následuje správné umístění částečně zaobleného tělesa. Nejvíce úsilí a prostorové představivosti je potřeba ke správnému umístění válce, ale většina zájemců po chvíli zkoušení na správné řešení přijde. Na závěr se diskutuje o tom, že je možné tuto nejednoznačnost odstranit například využitím dalšího pohledu na těleso, v technické praxi nejčastěji bokorysu.

Pokud jsou účastníci akce žáci druhého stupně základních škol, jsou jim po této aktivitě nabídnuty k vyplnění pracovní listy [1] využívané ve cvičeních z Konstruktivní geometrie. Tyto pracovní listy obsahují úlohy, kde je potřeba k tělesu v izometrickém průmětu načrtnout jeho půdorys, nárýs a bokorys a naopak, k danému půdorysu, nárýsu a bokorysu najít izometrický průmět tělesa. Na obrázku 5 je náhled na dvě vybrané konkrétní úlohy z těchto pracovních listů.



Obrázek 5: Pracovní listy Izometrie

Pokud jsou mezi účastníky akce žáci středních škol, s pomůckou *Mongeovo promítání* pracují stejným způsobem, díky kterému se seznámí s principem této zobrazovací metody. V další části se pak naváže ukázkou reálných úloh řešených v Konstruktivní geometrii na FS a s pomůckou *Řez hranolu* a *Řez kužele*. V obou případech je úlohou do předem připraveného rysu načrtnout půdorys a nárys řezu tělesa danou rovinou. V případě řezu kosým hranolem se bude jednat v půdorysu i v nárysu o čtyřúhelníky s vrcholy na hranách hranolu a v případě řezu kužele rovinou kolmou k nárysně se tento řez zobrazí do půdorysu jako elipsa a do nárysu jako úsečka. Zájemce má možnost si svůj odhad a přesnost zkontrolovat přiložením průhledné fólie s kompletním řešením úlohy. Opět následuje diskuse o tom, jak studenti postupují, když tuto úlohu řeší přesně pomocí pravítka a kružítka.



Obrázek 6: Pracovní listy Řez tělesa rovinou

Jestliže zájemce program opravdu velmi zaujme, nabídneme jim ještě čtvrtou a pátou pomůcku. Čtvrtá pomůcka *Těleso v obecné rovině* zájemcům umožní objevit souvislost mezi zobrazením rovinného útvaru a tělesa. Úkolem je seznámit se s průmětem čtverce, poté postavit na rovinu připravenou krychli a do půdorysné a nárysné roviny dokreslit průměty celého tělesa. Úloha může být doplněna o řešení problematiky viditelnosti jednotlivých hran. Opět je možnost zkontrolovat sestrojené řešení přiložením fólie.

U pomůcky *Zářezová metoda* obdrží zájemci pracovní list, kde si mohou vyzkoušet zářezovou metodou vyřešit celou zadanou úlohu. Tato úloha je časově nejnáročnější a je proto možné, aby se na jejím řešení podílelo postupně několik účastníků.

5 Závěr

První akce, které jsme se s výše popsanou aktivitou zúčastnili byl den *Zlepší si techniku* konaný 13.4.2023 v Aule VŠB-TUO. Akce byla určena převážně pro žáky druhého stupně základních škol a pro žáky středních škol. O aktivitu projevovali zájem účastníci všech věkových kategorií. Na úlohách pracovali nejčastěji společně v malých skupinkách 3-4 lidí, o problémech diskutovali mezi sebou a k celé problematice přistupovali velmi konstruktivně. Největší zájem byl o aktivitu spojenou s *Mongeovým promítáním*, kde žáci a studenti pracovali podle instrukcí. U modelů *Řez kužele a Řez hranolu* zaujala žáky hlavně možnost tyto modely rozebrat na jednotlivé díly a zase složit dohromady. Pomůcka *Zářezová metoda* byla využita nejméně, a to hlavně z důvodu chybějícího pracovního prostoru k rýsování.

Z řad doprovázejících učitelů byl největší zájem o pracovní listy s izometrickým průmětem tělesa, často si tyto pracovní listy odnášeli s sebou se záměrem využít je v různých matematických kroužcích.

Odkazy

- [1] BĚLOHLÁVKOVÁ, J. (2023) GeoGebra Těleso v izometrii. [online; cit. 2023-04-24]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/znsxahxd>.
- [2] KUPČÁKOVÁ, M. (2002) Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech, ISBN 80-7196-244-9.
- [3] PRINTABLES. (2022) Printables by Josef Prusa Deskriptivní geometrie – řez jehlanem. [online; cit. 2023-04-20]. Dostupné z: <https://www.printables.com/cs/education/96445-deskriptivni-geometrie-rez-jehlanem>.

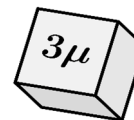
SEZNAM REGISTROVANÝCH ÚČASTNÍKŮ

Zdeněk Boháč, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Jiří Bouchala, Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO
Martin Čermák, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Dagmar Dlouhá, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Vanda Dubáčová, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Monika Jahodová, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Míriam Janíková, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Jiří Jánský, Univerzita obrany, Brno
Jan Jekl, Univerzita obrany, Brno
Jan Kotůlek, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Petr Kovář, Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO
Jiří Krček, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Pavel Kreml, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Radek Kučera, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Alžběta Lampartová, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Pavel Ludvík, Přírodovědecká fakulta, UP v Olomouci
Dalibor Lukáš, Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO
Lukáš Másilko, Masarykova univerzita, Brno
Zuzana Morávková, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Kristina Motyčková, IT4Innovations, VŠB-TUO
Ivo Müller, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Zuzana Pátíková, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Vladimír Polášek, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Lenka Příbylová, Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO
Marcela Rabasová, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie FS, VŠB-TUO
Pavčina Račková, Univerzita obrany, Brno
Josef Rebenda, Vysoké učení technické v Brně
Thomas Richmond, Western Kentucky University, USA
Pavel Rucki, Katedra matematických metod v ekonomice, EKF, VŠB-TUO
Petra Schreiberová, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Lubomír Sedláček, Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Dana Smetanová, VŠTE v Českých Budějovicích
Jakub Stryja, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Tadeáš Světlík, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Martin Swaczyna, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Josef Šlapal, Vysoké učení technické v Brně
Ivona Tomečková, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Zbyněk Urban, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Radek Varga, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Jaroslav Vlček, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO
Jana Volná, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Petr Volný, Katedra matematiky, FAST, VŠB-TUO
Václav Votoupal, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS, VŠB-TUO

Program

28. ročníku semináře

Moderní matematické metody v inženýrství



Pondělí 5. 6. 2023

10:00-11:30 **registrace, ubytování**

12:00 **oběd**

12:50 - 13:00	zahájení semináře
---------------	--------------------------

plenární přednáška (R. Kučera)

13:00-14:30	Pavel Ludvík: Řád (a chaos)
-------------	------------------------------------

14:30-15:00 **přestávka na kávu**

Matematika a její aplikace (M. Čermák)

15:00-15:20	Jiří Bouchala: Metoda hraničních prvků v 1D (a 2D)
-------------	---

15:20-15:40	Dalibor Lukáš: Metoda hraničních prvků na grafické kartě
-------------	---

15:40-16:00	Radek Kučera, Vladimír Arzt, Jaroslav Haslinger, Václav Šátek: Numerical solution of the Navier-Stokes system with the stick-slip boundary conditions
-------------	--

16:00-16:20	Ivona Tomečková: 2D Time dependent Stokes problem with Dirichlet-Neumann-Slip boundary conditions
-------------	--

16:20-16:40	Jiří Krčec: Variační formulace difrakční úlohy na periodickém rozhraní
-------------	---

16:40-17:00	Alžběta Lampartová: 0-1 test chaosu a jeho aplikace v ekonomických modelech
-------------	--

17:30 **večeře**

20:00 **večerní program s rautem**

Výuka a didaktika matematiky (J. Kotůlek)

Zuzana Morávková, Petra Schreiberová: Rozvoj matematických a informatických dovedností v rámci kroužku Junior univerzity

Dagmar Dlouhá, Petr Volný, Jana Volná: Zkušenosti s tvorbou videí pro Průvodce Matematikou I

Marcela Rabasová: Střední hodnota náhodné veličiny

Ivo Müller: Strukturovaný osobnostní dotazník PISP: jeho konstrukce a příklad použití
--

Úterý 6. 6. 2023

7:30-9:00 **snídaně**

plenární přednáška (P. Kovář)

9:00 -10:30	Pavel Ludvík: Chaos (a řád)
-------------	------------------------------------

10:30 -11:00 **přestávka na kávu**

Matematika a její aplikace (J. Krčec)

11:00 -11:20	Marie Sadowská, Kristina Motyčková: Generování hexahedrálních sítí pomocí polycube deformace
--------------	---

11:20 -11:40	Pavel Ruckí: Zajímavé důsledky přerovnění neabsolutně konvergentních řad
--------------	---

11:40 -12:00	Jan Jekl, Jiří Jáněský, Vojtěch Růžička: Definice zobecněných funkcí sinus a kosinus a rozbor případů, v nichž jsou porušeny předpoklady těchto definic
--------------	--

12:30 **oběd**

13:30 **výlet**

varianta 1: prohlídka zámku Hradec nad Moravicí a zámeckého parku

varianta 2: turistika

ad 1) Na Slezskou kalvárii (s průvodcem, 6,5 km, 150 m převýšení)

ad 2) Po vyhlídkách: Žimrovická skála, Bellaria, Bezručova rozhledna, Lisztova vyhlídka, Bílá věž a Rondela (11 km)

ad 3) Po stopách Weissshuhnova náhonu (pro zdatnější, 2,5+12,5 km)

18:00 **večeře**

19:00 **volný program:** opékání, individuální návštěva wellness

Výuka a didaktika matematiky (Z. Morávková)

Václav Votoupal, Monika Jahodová: Konstruktivní geometrie na akcích pro veřejnost
--

Miriám Janíková, Vladimír Polášek: Techambition ve výuce na VŠ

Lukáš Másilko, Josef Rebenda: Vrstevnické hodnocení ve vysokoškolských matematických předmětech
--

Středa 7. 6. 2023

7:30-9:00 snídane

Matematika a její aplikace (I. Tomečková)

9:00 - 9:20	Petr Kovář , Yifan Zhang: Aplikace rozkladů grafů při paralelizaci numerických výpočtů hustých matic
9:20 - 9:40	Martin Swaczyna, Petr Volný : Příklady kinematických vazeb neovlivňujících pohyb částice
9:40 - 10:00	Zbyněk Urban : Stabilizace mechanických systémů s využitím variačních sil
10:00 - 10:20	Lenka Příbylová : Úvod do neparametrické prediktivní inference

10:20 - 11:00 přestávka na kávu

Matematika a její aplikace (J. Bouchala)

11:00 - 11:20	Tadeáš Světlík, Radek Varga, Lukáš Pospíšil, Martin Čermák : Application of mortar method for linear elastic materials
11:20 - 11:40	Radek Varga : Discrete element method in 2D crack propagation
11:40 - 12:00	zakočení semináře

12:30 oběd

Výuka a didaktika matematiky (D. Dlouhá)

Josef Rebenda : Podpora výuky matematiky a síla zpětné vazby
Jan Kotůlek : Math Support Centre na VŠB-TUO: Zhodnocení činnosti po (téměř) sedmi letech provozu
Zuzana Pátíková, Lubomír Sedláček : Maths Support Centre při Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně
Dana Smetanová, Tomáš Náhlík, Ivo Opršal, Zdeněk Dušek : Dobrá praxe Support centra při VŠTE v Českých Budějovicích

Výuka a didaktika matematiky (J. Kotůlek)

Panelová diskuse : Matematická centra podpory na vysokých školách: vznik, rozvoj a výzvy do budoucna Duncan Lawson (Coventry, online) Markéta Matulová (Brno)

Název: Sborník z 28. semináře Moderní matematické metody v inženýrství

Editoři: ing. Petra Schreiberová, Ph.D. a kolektiv

Autoři: Kolektiv autorů

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2023, 1. vydání

Počet stran: 164

Vydala: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Neprodejné

ISBN 978-80-248-4681-1 (on-line)

DOI 10.31490/9788024846811